Jerzy Tymiński
Wydział Zarządzania
Wyższa Szkoła Gospodarki Krajowej w Kutnie

Wybrane aspekty optymalnego sterowania portfelem inwestycyjnym akcji na rynku kapitałowym

Wstęp

Rynek kapitałowy zyskuje na znaczeniu w miarę rozwoju gospodarki rynkowej. W szczególności istotne jest zainteresowanie przedsiębiorców i menedżerów strategiami inwestowania na rynku kapitałowym.

Podejmowanie racjonalnych decyzji w obszarze transakcji handlowych na rynku kapitałowym wymaga stosowania odpowiednich, precyzyjnych narzędzi analitycznych. Należą do nich metody optymalizacyjne oraz teoria sterowania. Umiejętne ich wykorzystanie może istotnie zwiększyć trafność podejmowanych decyzji inwestycyjnych i osiągnięcie przez inwestora oczekiwanego poziomu kreacji zaangażowanego kapitału [Pońsko 2000, s. 37; Tymiński, Zawiślak 2009, s. 719].

Rentowność kapitału, obok płynności finansowej, odgrywa szczególną rolę w kształtowaniu się przyszłej sytuacji gospodarczej przedsiębiorstwa [Wasilewski, Gałecka 2010, s. 231]. Efektywne wykorzystanie kapitału jest istotnym procesem optymalnego sterowania w sytuacjach decyzyjnych w przedsiębiorstwie.

Celem artykułu jest zaprezentowanie autorskiej koncepcji sterowania w procesach decyzyjnych związanych z nabyciem portfeli inwestycyjnych akcji spółek, jak również sprzedaży portfeli mniej korzystnych w generowaniu dochodów. Procesowi badawczemu poddano dwa portfele różniące się pod względem konstrukcji. Pierwszy portfel został skonstruowany w oparciu o koncepcję Sharpe'a i rozwiązany metodą programowania kwadratowego z wykorzystaniem funkcji Lagrange'a. Drugi, skonstruowany według koncepcji autora z uwzględnieniem elementów teorii niezawodności, rozwiązano metodą programowania dynamicznego.

Prowadzone rozważania zilustrowano praktycznymi przykładami. W pierwszej części artykułu przedstawiono zarys teorii sterowania, wykorzystując wcześniejsze badania autora [Tymiński, Zawiślak 2008]. W drugiej części artykułu wykorzystano informacje dotyczące kursów akcji oraz stóp zwrotu wybranych spółek notowanych na GPW w Warszawie w latach 2005–2006.

Elementy teorii sterowania

Inwestor konstruując strategię inwestowania powinien dysponować różnymi instrumentami decyzyjnymi, których celem jest umożliwienie jak najkorzystniejszego lokowania kapitału.

Zasoby kapitału będące w dyspozycji inwestora w momencie t wyrazić można funkcją $S(t)$. Transakcje zakupu portfeli na rynku kapitałowym powodują wyczerpywanie zasobów kapitału, co można wyrazić stopą wyczerpywania się kapitału [Tymiński, Zawiślak 2009, s. 719]:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -E(t) \tag{1}$$

gdzie:
$E(t)$ – stopa wyczerpywania się kapitału.

Podstawą decyzji o inwestowaniu kapitału jest funkcja użyteczności inwestora $U(E)$. Jest to funkcja celu zależna od wielkości zużywanego kapitału $S(t)$ w kolejnych transakcjach. $U(E)$ jest więc zmienną sterowaną, zaś zmienną sterującą jest $E(t)$. Przyjęcie $E(t)$ jako zmiennej sterującej wynika z faktu, że decyzje inwestora wpływają bezpośrednio na tempo zużywania się kapitału. W konsekwencji stopa wyczerpywania się kapitału $E(t)$ kształtuje wielkość zasobu kapitałowego $S(t)$.

Omawiane relacje w aspekcie optymalizacji decyzji inwestycyjnych podlegają sterowaniu w kierunku maksymalizacji funkcji użyteczności inwestora. Można to wyrazić formułą:

$$\max \int_0^T U(E) e^{-\rho t} dt \ \text{dla} \ \frac{dS\ (t)}{dt} = -E(t) \tag{2}$$

oraz $S(o) = S_0$, $S(T)$ – dowolne
gdzie:
S_0, T – dane.

Kształtowanie się zasobu kapitałowego w czasie opisać można przy pomocy funkcji trendu postaci:

$$S(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t - \alpha_2 t^2 \tag{3}$$

Stąd tempo wyczerpywania się kapitału zgodnie z formułą (1) określa zależność:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \alpha_1 - 2\alpha_1 t = -E(t)$$

Na podstawie danych historycznych oszacowana funkcja (3) przyjmuje wartość:

$$S(t) = 400 + 40t - 40t^2 \tag{4}$$

stąd: E(t) = 40

Procedura optymalizacji wymaga określenia wyjściowych wielkości:

$$S(0) = S_0 = 400 \tag{4a}$$

$$U(E) = [S_0 - E(t)] \tag{4b}$$

Jest to zasób kapitału po pomniejszeniu o stopę jego wyczerpywania.

Całkowanie funkcji $U(E)$ zgodnie z modelem ciągłej kapitalizacji pozwala wyznaczyć wartość bieżącego strumienia użyteczności:

$$\int_0^T U(E)e^{-\rho t}dt \tag{5}$$

gdzie:
ρ – stopa zwrotu z zakupionego portfela.

W momencie realizowania transakcji rynkowych (t = 0) $U(E)$ przyjmie wartość:

U(E) = 400 – 0 = 400

Zgodnie z formułą (2) maksymalizacja strumienia użyteczności jest równoznaczna z obliczeniem całki:

$$\int_0^{10} 400e^{-\rho t}dt = 400\int_0^{10} e^{-\rho t}dt = \frac{-400}{\rho}e^{-\rho t}\Big|_0^{10} = \frac{-400}{\rho}(e^{-1,0\rho} - 1) = \frac{400}{\rho}(1 - e^{-1,0}) \tag{6}$$

Wyrazem użyteczności $U(E)$ można uznać wartość bieżącą ciągłego strumienia przychodów osiąganych przez inwestora jako rezultat podjętej decyzji na rynku kapitałowym. Z przeprowadzonych wcześniej badań wynika, że przy założonych parametrach ρ = 10% oraz T = 10 okresów będzie to:

$$\frac{400}{0,1}(1-e^{-1,0}) = 2528,5 \text{ jednostek (dla } S_o)$$

Dla $t = 1$, będzie: $\dfrac{360}{0,1}(1-e^{-1,0}) = 2275,6$ jednostek (dla S_1)

Otrzymane wyniki maksymalizujące wartość bieżącą ciągłego strumienia przychodów są ilustracją efektu optymalnego sterowania kapitałem przy wykorzystaniu elementów teorii sterowania.

Proces optymalnego sterowania portfelem inwestycyjnym na rynku kapitałowym. Wyniki badań

W problematyce optymalizacji portfela inwestycyjnego kluczowe znaczenie obok wartości stopy zwrotu zoptymalizowanego portfela ma efektywność zainwestowanego kapitału. Kryterium efektywności kapitału może być rozstrzygające przy wyborze optymalnego portfela.

Proces badawczy dotyczy oceny efektywności kapitału dwóch alternatywnych portfeli. Należy dodać, że niezależnie od wariantu portfela, zarówno wielkość zasobu kapitałowego, jak i okres inwestowania T są określone przez inwestora. Zmienna stanu występuje w procesie sterowania portfelem jako argument funkcji celu. W prezentowanej koncepcji jest to zasób kapitału przeznaczony na zakup portfela inwestycyjnego. Zmienna stanu jest kształtowana przez inwestora w sposób pośredni (Pońsko 2000, s. 36; por. wz. 4b).

Ocenę efektywności zainwestowanego kapitału przeprowadzono dla dwóch alternatywnych portfeli, wykorzystując kursy akcji oraz stopy zwrotu wybranych spółek z lat 2005–2006 (dane z gazety PARKIET 2006).

Portfel I – zoptymalizowany metodą tradycyjną – składa się z akcji czterech spółek według udziałów:

–1,336 PKM + 1,714 GTC + 0,673 RPC – 0,052 WWL

Wartość zaangażowanego kapitału w chwili zakupu ustalono przyjmując średnie kursy akcji rozpatrywanych spółek oraz krótką sprzedaż, co wiąże się z kapitałem pożyczonym [Trzaskalik 2004, s. 159]. I tak dla portfela I wynosi:

$$U(E)I = -1,336 \times 124,2 + 1,714 \times 167,3 + 0,673 \times 22,0 - 0,052 \times 155,5 = 125,8$$

Oznacza to, że inwestor powinien przeznaczyć na zakup portfela I 125,8 jednostek kapitału własnego, pomijając inne koszty związane z kapitałem pożyczonym.

Portfel II – zoptymalizowany metodą programowania dynamicznego przy wykorzystaniu teorii niezawodności – składa się z akcji trzech spółek GTC, RPC oraz WWL i wymaga zaangażowania kapitału w wysokości:

U(E)II = – 0,85 × 166,3 + 0,128 × 22,0 + 0,023 × 155,5 = 161,2

Na tym etapie optymalizacji można określić i ocenić efektywność kapitału wprowadzonego do portfela, a następnie podjąć decyzję o wyborze korzystniejszego wariantu.

Z przeprowadzonych badań wynika, że ρ = 15% dla portfela I zaś dla II ρ = 9,7%. Zgodnie z formułą (5) wartość bieżąca ciągłego strumienia dochodów dla portfela I wyniesie:

$$\int_0^{T=10} 125{,}8e^{-0{,}15t}\,dt = 651{,}5 \text{ jednostek} \tag{7}$$

zaś dla portfela II:

$$\int_0^{T=10} 161{,}2e^{-0{,}097t}\,dt = 1031{,}9 \text{ jednostek} \tag{8}$$

A zatem efektywność zainwestowanego kapitału jest wyższa w portfelu II. Należałoby więc wybrać ten portfel jako korzystniejszy.

Ocena optymalnego sterowania portfelem w warunkach losowych

Proces podejmowania optymalnych decyzji na rynku kapitałowym nie zawsze kończy się wyborem korzystniejszego, efektywnego portfela [Haugen 2000, s. 105]. Należy pamiętać, że decyzje o wyborze najkorzystniejszego portfela inwestor podejmuje przez pryzmat maksymalnej oczekiwanej użyteczności. Osiągnięcie oczekiwanej użyteczności wymaga często od inwestora fachowego monitorowania sytuacji na rynku, a także podejmowania decyzji modyfikujących dotychczasowe kroki.

Do istotniejszych elementów wpływających na poziom użyteczności inwestora, obok zakupu portfela, zalicza się moment jego sprzedaży oraz ocenę prawdopodobieństwa realizacji oczekiwanej stopy zwrotu.

Optymalne sterowanie portfelem wymaga uwzględnienia sytuacji stochastycznych. Kształtowanie się kluczowych parametrów instrumentów finansowych (dochód, ryzyko) ma charakter losowy, zatem realizacja oczekiwanego dochodu z zakupionego portfela powinna być poparta odpowiednio wysokim poziomem prawdopodobieństwa.

W prezentowanej koncepcji końcowym etapem jest analiza optymalnego sterowania w warunkach losowych [Kryński, Badach 1976, s. 523]. Uwagę skoncentrowano na ocenie potencjalnych możliwości zbycia zakupionego portfela w zależności od popytu na rynku kapitałowym na instrumenty finansowe wchodzące w jego skład.

W analizie stochastycznej uwzględniono następujące parametry:
X – zmienna losowa wyrażająca liczbę instrumentów finansowych w portfelu,
x – wartość zmiennej losowej X,
Y – zmienna losowa wyrażająca liczbę instrumentów finansowych; określa potencjalny popyt na instrumenty finansowe na rynku kapitałowym,
y – wartość zmiennej losowej Y,
Z – zmienna losowa wyrażająca zysk uzyskany ze zbycia X ilości instrumentów finansowych,
z – wartość zmiennej losowej Z,
c – jednostkowa cena; oznacza dochód jednostkowy (na spółkę w portfelu),
k – jednostkowy nakład kapitału (na spółkę w portfelu).

Inwestor zainteresowany sprzedażą posiadanych w portfelu walorów powinien rozważyć kilka możliwych wariantów z punktu widzenia skutków transakcji zbytu. Ponadto powinien precyzyjnie ocenić prawdopodobieństwo możliwości zbycia portfela lub jego części. W tym celu rozważane zagadnienie opisano w dwóch wariantach.

Wariant I, w którym realnie inwestor może sprzedać posiadaną liczbę instrumentów finansowych x (portfel), przy czym potencjalny popyt y jest większy od x.

$$z_1(x) = cx - ky \quad \text{(gdyż } y > x\text{)} \tag{9}$$

Wariant II zakłada, że inwestor może zbyć nie mniejszą liczbę instrumentów finansowych w porównaniu do popytu y.

$$z_2(x) = cy - ky$$

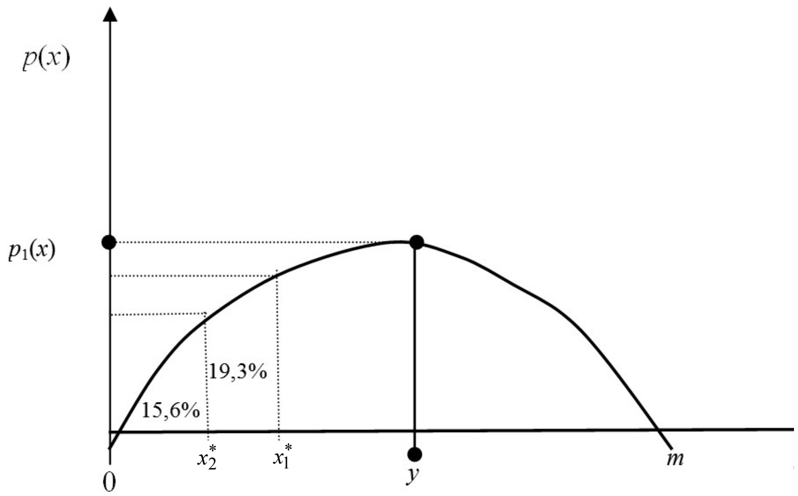
bądź:

$$z_2(x) = (c - k)y \quad \text{(gdyż } y \leq x\text{)} \tag{10}$$

Jeżeli intensywność zbycia jest zmienną losową, to wartość oczekiwana zysku Z jest również zmienną losową oraz sumą wartości oczekiwanego zysku z dwóch alternatywnych sytuacji, tj. z_1 oraz z_2. Model oczekiwanego zysku przyjmie więc postać:

$$E(Z) = E(Z_1) + E(Z_2) \tag{11}$$

Przyjmuje się, że zbycie instrumentów finansowych ma rozkład normalny [Jajuga K., Jajuga T. 1998, s. 154]. Na rys. 1 przedstawiono gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej X.



Rysunek 1
Krzywa gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej X
Źródło: Badania własne.

W związku z tym, iż postać funkcji gęstości $p(x)$ nie jest znana, nie będzie możliwe uzyskanie w analizie decyzyjnej w sposób bezpośredni rozwiązania jednoznacznego (dla optymalnego y^* oraz x^*). W tym przypadku można przeprowadzić proces analityczny w następujący sposób:

$$E(z_1) = \int z_1 p(x)dx = \int_0^y (cx - ky)p(x)dx \tag{12}$$

oraz

$$E(z_2) = \int z_2 p(x)dx = \int_0^y y(c - ky)p(x)dx \tag{13}$$

Uwzględniając wzór (11) i odpowiednie przekształcenia w obszarze rachunku całkowego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E(z) &= \int_0^y (cx - ky)p(x)dx + \int_y^m (cy - ky)p(x)dx = \\ &= \int_0^y (cx - ky)p(x)dx - \int_0^y ky\ p(x)dx + \int_y^m cy\ p(x)dx - \int_y^m ky\ p(x)dx = \\ &= c\int_0^y xp(x)dx - ky\int_0^y p(x)dx + cy\int_y^m p(x)dx - ky\int_y^m p(x)dx = \\ &= c\int_0^y xp(x)dx - ky\left[\int_0^y p(x)dx + \int_y^m p(x)dx\right] + cy\int_y^m p(x)dx \end{aligned} \tag{14}$$

Wiedząc z rachunku całkowego, iż:

$$\int_0^m p(x)dx = \int_0^y p(x)dx + \int_y^m p(x)dx = 1 \tag{15}$$

zależność (14) można zredukować do postaci:

$$E(z) = c\int_0^y xp(x)dx + cy\int_y^m p(x)dx - ky \tag{16}$$

Następnie, ponieważ y jest wielkością zmienną, wykorzystując własności rachunku różniczkowego oraz całkowego, można zapisać:

$$\frac{d}{dy}\left[\int_0^y xp(x)dx\right] = yp(y) \tag{17}$$

także:

$$\frac{d}{dy}\left[y\int_y^m p(x)dx\right] = -yp(y) \quad (m = \text{const.}) \tag{18}$$

Obliczenie pochodnej $\frac{dE(z)}{dy}$ i przyrównanie jej do zera pozwala ustalić dystrybuantę w przedziale całkowania od y do m:

$$\begin{aligned}\frac{dE(z)}{dy} &= c\frac{d}{dy}\left[\int_0^y xp(x)dx\right] + c\int_y^m p(x)dx + cy\frac{d}{dy}\left[\int_y^m p(x)dx\right] - k = \\ &= cyp(y) + c\int_y^m p(x)dx - cyp(y) - k = \\ &= c\int_y^m p(x)dx - k = 0\end{aligned} \tag{19}$$

stąd:

$$\int_{y}^{m} p(x)dx = \frac{k}{c} \tag{20}$$

Relacja $\frac{k}{c}$ wskazuje jaka część popytu y może być zrealizowana posiadaną liczbą instrumentów finansowych x (z przedziału $(y : m)$ – por. rys. 1).

Wprowadzenie do (15) zależności (20) prowadzi do formuły:

$$\int_{0}^{y} p(x)dx = \frac{c-k}{c} \tag{21}$$

W przypadku, gdy $\frac{c-k}{c} > \frac{k}{c}$ maksymalny zysk znajduje się w punkcie odpowiadającym zrealizowanej sprzedaży x_1^* przedziału <0; y> z prawdopodobieństwem nie wyższym niż $p_1(x)$. Jeżeli zachodzi $\frac{c-k}{c} < \frac{k}{c}$, to maksymalny zysk znajdzie się w punkcie x_2^* przedziału <y; m> z niższym prawdopodobieństwem niż $p_1(x)$ (por. rys. 1).

Zatem wartości c oraz k dla portfela I składającego się z czterech spółek (PKM, GTC, RPC, WWL) wynoszą:

c = 162,875 jednostek (wzór 7) – jest to iloraz wartości bieżącej strumienia przychodów i liczby spółek w portfelu, tj. 651,5/4;

k = 31,45 jednostek – jest to iloraz wartości zaangażowanego kapitału w nabycie portfela i liczby spółek w portfelu, tj. 125,8/4.

Stąd wartość dystrybuanty dla portfela I wynosi:

$$\frac{c-k}{c} = \frac{162{,}87 - 31{,}45}{162{,}87} = 0{,}807$$

Ponieważ $\frac{c-k}{c} > \frac{k}{c}$, zysk maksymalny znajduje się w punkcie x_1^* przedziału <0; y> (por. rys. 1).

Na mocy zależności:

$$F(x) + P(x) = 1$$

prawdopodobieństwo wystąpienia zysku z_1 wynosi:

$P(x)$ = 0,193 (19,3%)

Dla portfela II składającego się z trzech spółek (GTC, RPC, WWL) wartości c i k wynoszą:

c = 344,00 jednostek

k = 53,73 jednostek

Stąd wartość dystrybuanty dla portfela II:

$$\frac{344,00-53,73}{344,00}=0,844(84,4\%)$$

oraz $P_{(x)}$ = 0,156 (15,6%)
Zachodzi więc nierówność $\frac{c-k}{c}>\frac{k}{c}$, a zatem x_2^* znajduje się w przedziale <0; y> (por. rys. 1).

Z przeprowadzonej analizy wynika, że inwestor powinien zbyć portfel II mimo wyższej efektywności kreacji kapitału wyrażonej wyższą wartością bieżącą ciągłego strumienia przychodów. Jednakże prawdopodobieństwo realizacji tego portfela jest niższe niż portfela I.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono koncepcję optymalnego sterowania portfelem inwestycyjnym na rynku kapitałowym. Sterowanie zasobami kapitału angażowanego w transakcjach finansowych ma na celu jego efektywne wykorzystanie, tj. maksymalizowanie jego kreacji.

Proces sterowania wiąże się z wyborem (zakupem) optymalnego portfela akcji zapewniającego nie tylko generowanie dodatkowego kapitału, ale także odpowiednio wysoki poziom prawdopodobieństwa jego realizacji.

W artykule optymalnemu sterowaniu poddano dwa portfele. Optymalizację przeprowadzono dwiema metodami dającymi różne wartości kreacji kapitału.

Badanie pogłębiono oceną maksymalizacji zysku w warunkach stochastycznych, w której określono poziom prawdopodobieństwa realizacji obu analizowanych portfeli.

Z przeprowadzonych badań wynika, że portfel generujący wyższy poziom efektów kapitałowych daje niższy poziom prawdopodobieństwa ich realizacji. Inwestor na tym etapie procesu sterowania powinien dokonać sprzedaży tego portfela.

Założenia przyjęte w procesie badawczym zostały zrealizowane dla danych empirycznych z lat 2005–2006. Autor kontynuuje badania w obszarze sterowania portfelami inwestycyjnymi, stosując obydwa prezentowane warianty dla kolejnych okresów badawczych po 2006 r. Wyniki badań będą przedmiotem kolejnego opracowania.

Literatura

HAUGEN R.A.: *Teoria nowoczesnego inwestowania*. Wydawnictwo WIG PRESS, Warszawa 2000.

JAJUGA K., JAJUGA T.: *Inwestycje instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.

KRYŃSKI H., BADACH A.: *Zastosowania matematyki do podejmowania decyzji ekonomicznych.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976.

POŃSKO P.: *Optymalizacja dynamiczna wzrostu gospodarczego*. Wydawnictwo ELIPSA, Warszawa 2000.

TRZASKALIK T.(red.): *Modelowanie preferencji a ryzyko.* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice 2004.

TYMIŃSKI J., ZAWIŚLAK R.: *Dwukryterialna koncepcja wyboru instrumentów finansowych dla efektywnej konstrukcji portfela i jego optymalizacja na rynku kapitałowym*. [w:] *Zarządzanie finansami.* Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego 2008.

TYMIŃSKI J., ZAWIŚLAK R.: *Wykorzystanie elementów teorii sterowania w problematyce optymalizacji portfela inwestycyjnego na rynku kapitałowym.* [w:] *Zarządzanie finansami*. Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego 2009.

WASILEWSKI M., GAŁECKA A.: *Rentowność kapitału własnego gospodarstw rolniczych w zależności od bieżącej płynności finansowej.* Zeszyty Naukowe SGGW, Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej, Nr 81, Warszawa 2010.

Some aspects of optimal control applied to an investment portfolio in the capital market

Abstract

The article presents a concept of capital management for assembling investment portfolios. Two optimization variants of a portfolio to be purchased are discussed. Portfolio I is structured using the “traditional method”. To assemble portfolio II, elements of reliability theory and the dynamic programming method were used. The article also analyses the sale of a portfolio with respect to the demand for financial instruments in the capital market.