

**Joanna Kisielińska**

Katedra Ekonomiki Rolnictwa i Międzynarodowych Stosunków Gospodarczych  
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

## **Wielorównaniowy model ekonometryczny inflacji i bezrobocia w Polsce**

### **Wstęp**

Wielorównaniowe modele ekonometryczne pozwalają zapisać w postaci układu równań zależności między zmiennymi reprezentującymi różnorodne wielkości ekonomiczne. Modele takie mogą być następnie wykorzystane do lepszego zrozumienia mechanizmów kształtujących te wielkości, do prognozowania ich wartości przyszłych bądź do sterowania dalszym ich przebiegiem.

Jednym z ciekawszych problemów makroekonomicznych jest poszukiwanie zależności między inflacją i bezrobociem. Wśród prezentowanych w literaturze polskich modeli inflacji przeważają modele szeregów czasowych. Wymienić można prace Grabka [2006], Milo i wsp. [2003], Kisielińskiej [2003] i wiele innych. Dwa jednorównaniowe, przyczynowo-skutkowe modele inflacji przedstawiła Uztig [2000]. Pierwszy z nich wyjaśniał zmiany inflacji na gruncie teorii kosztowej, drugi na gruncie teorii monetarnej. Złożony wielorównaniowy model inflacji przedstawił Kłós [2000]. W modelu uwzględniono 17 równań stochastycznych i 2 równania bilansowe. Bardzo obszerny model polskiej gospodarki zaprezentowali Fic i wsp. [2005]. Model zawierał 66 równań i wyjaśniał zmienność wielu wskaźników makroekonomicznych – między innymi inflacji.

Modele zaproponowane przez Kłosa [2000] oraz Fica i wsp. [2005] są modelami bardzo złożonymi. Korzystanie z nich wymaga znajomości wielu wskaźników makroekonomicznych charakteryzujących polską gospodarkę. Przypuszczać można, że zbudować można znacznie prostsze modele obrazujące związki między inflacją a bezrobociem. Celem przeprowadzonych badań było opracowanie niezbyt skomplikowanego, łatwego w użyciu, wielorównaniowego modelu ekonometrycznego inflacji i bezrobocia w Polsce.

Do oszacowania modelu wykorzystano dane kwartalne z okresu od IV kwartału 1996 do II kwartału 2009. Dane te pochodziły z elektronicznych publikacji GUS oraz NBP.

## Modele wielorównaniowe i ich estymacja

Modele wielorównaniowe opisywane są w większości podręczników z zakresu ekonometrii np. Gruszczyński i Podgórska (red.) [2004], Gajda [2004], Osińska (red.) [2004], Borkowski i wsp. [2003]. Bardziej szczegółowe omówienie zasad ich estymacji zawiera praca Thiela [1979]. Ponieważ model inflacji i bezrobocia przedstawiony w artykule będzie modelem o równaniach wzajemnie współzależnych, do nich ograniczone zostaną rozważania.

Wielowymiarowy model ekonometryczny jest układem równań obrazującym związki między zmiennymi reprezentującymi różne zjawiska ekonomiczne w różnych momentach czasu. W układzie tym występuje wiele zmiennych objaśnianych (zależnych) i objaśniających (niezależnych). Ponieważ zmienne objaśniane w jednym równaniu mogą być zmiennymi objaśniającymi w innych, dla modeli wielorównaniowych określenie zmiennych zależnych i niezależnych nie jest jednoznaczne. Konieczne jest wprowadzenie odmiennego sposobu podziału zmiennych. W modelach wielorównaniowych wyróżnia się:

- zmienne endogeniczne – zmienne objaśniane przez którekolwiek równanie modelu,
- zmienne egzogeniczne – zmienne objaśniające, które nie są objaśnianymi przez żadne równanie modelu,
- zmienne z góry ustalone – wszystkie zmienne egzogeniczne i opóźnione w czasie zmienne endogeniczne,
- zmienne łącznie współzależne – zmienne egzogeniczne z chwili bieżącej.

Modele wielorównaniowe obrazujące prawa ekonomiczne zapisywane są w postaci następującego równania macierzowego, zwanego postacią strukturalną:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{Z} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

gdzie:

$\mathbf{Y}$  – wektor  $m$  zmiennych wzajemnie współzależnych,

$\mathbf{Z}$  – wektor  $k$  zmiennych z góry ustalonych,

$\boldsymbol{\varepsilon}$  –  $m$ -wymiarowy wektor składników losowych,

$\mathbf{B}$  i  $\mathbf{\Gamma}$  – macierze współczynników o wymiarach odpowiednio  $m \times m$  i  $m \times k$ .

Jeśli macierz  $\mathbf{B}$  nie jest macierzą jednostkową ani trójkątną, równanie (1) jest modelem wielorównaniowym o równaniach wzajemnie współzależnych. Jeśli równań w układzie (1) jest tyle samo co zmiennych łącznie współzależnych – model jest zupełny.

Proste operacje macierzowe pozwalają przekształcić model z postaci strukturalnej na następującą postać zredukowaną:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{Z} + \boldsymbol{\gamma} \quad (2)$$

gdzie:

$\Pi = -\mathbf{B}^{-1} \cdot \Gamma$  jest macierzą współczynników postaci zredukowanej o wymiarze  $m \times k$ ,  $\gamma = \mathbf{B}^{-1} \cdot \varepsilon$  jest wektorem składników losowych postaci zredukowanej.

Zakładamy, że dysponujemy  $n$  obserwacjami wszystkich zmiennych uwzględnionych w modelu. Oszacowania parametrów strukturalnych dokonuje się podwójną metodą najmniejszych kwadratów (2MNK). Najpierw MNK szacowane są współczynniki modelu zredukowanego (2). Oszacowany model wykorzystywany jest do obliczenia teoretycznych wartości zmiennych łącznie współzależnych. Ponownie MNK stosuje się dla każdego równania postaci strukturalnej. Jedną ze zmiennych łącznie współzależnych traktuje się jako zmienną objaśnianą przez model. Równanie szacuje się na podstawie  $n$  obserwacji wyróżnionej zmiennej objaśnianej i zmiennych z góry ustalonych. Dla pozostałych zmiennych łącznie współzależnych zakłada się wartości teoretyczne.

Podwójna metoda najmniejszych kwadratów zapewnia możliwość oszacowania zarówno parametrów postaci strukturalnej, jak i zredukowanej. W chwili  $t$  znane są rzeczywiste wartości wszystkich zmiennych egzogenicznych i opóźnionych w czasie zmiennych endogenicznych. Nie są znane natomiast zmienne endogeniczne z chwili bieżącej. Zauważmy, że w postaci zredukowanej wszystkie zmienne z góry ustalone występują po stronie prawej równania, a wszystkie łącznie współzależne po lewej. Oznacza to, że postać zredukowana umożliwia wyznaczenie teoretycznych wartości zmiennych endogenicznych w chwili bieżącej. Model może być więc wykorzystany do szacowania czy prognozowania wartości zmiennych endogenicznych na podstawie znajomości zmiennych z góry ustalonych. W przypadku postaci strukturalnej tak nie jest. Jeśli rozważamy wielowymiarowy model o równaniach wzajemnie współzależnych, do obliczenia wartości teoretycznych wybranej zmiennej endogenicznej w chwili bieżącej  $t$  może być potrzebna znajomość innych zmiennych endogenicznych w tej chwili. Wynika z tego, że postać strukturalna nie pozwala na wyznaczenie wartości zmiennych, które objaśniane są przez model.

Modele strukturalne obrazują prawa ekonomiczne oraz zależności między zjawiskami ekonomicznymi. Modele zredukowane umożliwiają prognozowanie i przewidywanie wartości tych zjawisk. Z tego też względu weryfikacja statystyczna modelu wielorównaniowego jest szczególnie istotna w odniesieniu do jego równań w postaci zredukowanej. W postaci strukturalnej większego znaczenia nabiera ocena parametrów.

Na zakończenie rozważań nad modelami wielorównaniowymi konieczne jest zwrócenie uwagi na jeszcze jeden możliwy problem. W wielu modelach praktycznych (między innymi w modelu Klejna I) w postaci strukturalnej ustala się wartości niektórych parametrów albo narzuca związki między nimi. Oznacza to, że dane parametry nie są już swobodne, a wobec tego nie mogą być swo-

badnie estymowane. Uniknięcie tej komplikacji umożliwi wprowadzenie nowych zmiennych, których wartości określane są przez tzw. równania bilansowe. W równaniach tych nie ma składnika losowego, a parametry są ustalone. Za-uważmy jednak, że postać zredukowana takich modeli niczym nie różni się od modeli bez równań bilansowych. We wszystkich równaniach występuje składnik losowy  $\gamma$ , a elementy macierzy  $\Pi$  są swobodne. Jeśli stosujemy podwójną metodę najmniejszych kwadratów, różnica pojawi się jedynie na etapie szacowania postaci strukturalnej. Nie ma bowiem potrzeby estymacji równań bilansowych, a jedynie równań pozostałych – o parametrach swobodnych, w których występuje składnik losowy.

## Wielorównaniowy model inflacji i bezrobocia

Związek między inflacją i bezrobociem został opracowany przez Philipisa na podstawie danych empirycznych z Wielkiej Brytanii z okresu 1861–1957 [Philipis 1958]. W modelu Philipisa, zwanym krzywą Philipisa, związek między tymi wielkościami jest odwrotnie proporcjonalny. Oznacza to, że spadkowi bezrobocia towarzyszy wzrost inflacji, a wraz ze wzrostem bezrobocia obniża się inflacja. Aktualnie model ten ma znaczenie jedynie historyczne, ponieważ po 1970 roku zależności takiej nie udało się potwierdzić [Marciniak (red.) 2001, s. 417].

Chiang [1994, s. 533–534] zaproponował ciągły model współzależności inflacji i bezrobocia. Model ten obejmuje trzy równania. Pierwsze z nich jest zmodyfikowaną wersją zależności Philipisa poszerzoną o oczekiwania adaptacyjne, drugie stanowi hipotezę dotyczącą powstawania oczekiwań adaptacyjnych, trzecie zaś nazwane zostało sprzężeniem zwrotnym od inflacji do bezrobocia za pośrednictwem polityki pieniężnej. Układ opisuje trzy zmienne ciągłe – stopę inflacji, oczekiwaną stopę inflacji oraz stopę bezrobocia. Spośród trzech równań modelu, dwa są równaniami różniczkowymi rzędu pierwszego:

$$\begin{aligned}
 p &= \alpha - T - \beta \cdot U + h \cdot \pi \\
 \frac{d\pi}{dt} &= j \cdot (p - \pi) \\
 \frac{dU}{dt} &= -k \cdot (m - p)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

gdzie:

- $p$  – stopa inflacji,
- $\pi$  – oczekiwana stopa inflacji,
- $U$  – stopa bezrobocia,
- $\alpha, \beta, h, j$  i  $k$  – parametry strukturalne.

Wzrost wydajności pracy  $T$  oraz stopa wzrostu nominalnego zasobu pieniądza  $m$  również potraktowane zostały jako parametry.

Nieco zmodyfikowana dyskretna wersja modelu opisanego równaniami (3) [Chiang 1994, s. 589] jest następująca:

$$\begin{aligned} P_t &= \alpha - T_t - \beta \cdot U_t + h \cdot O_t \\ O_t - O_{t-1} &= j \cdot (P_{t-1} - O_{t-1}) \\ U_t - U_{t-1} &= -k \cdot (M_t - P_t) \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

- $P_t$  – bieżąca stopa inflacji,
- $P_{t-1}$  – opóźniona stopa inflacji,
- $O_t$  – bieżąca oczekiwana stopa inflacji,
- $O_{t-1}$  – opóźniona oczekiwana stopa inflacji,
- $U_t$  – bieżąca stopa bezrobocia,
- $U_{t-1}$  – opóźniona stopa bezrobocia,
- $T_t$  – stopa wzrostu wydajności pracy,
- $M_t$  – stopa wzrostu nominalnego zasobu pieniądza.

Model opisany układem równań (4) różni się nieco od pierwotnej wersji modelu [Chiang 1994, s. 589]. Zamiast wzrostu wydajności pracy do modelu wprowadzono stopę wzrostu wydajności pracy. Zauważmy bowiem, że w równaniu pierwszym układu (4) z lewej strony występuje stopa inflacji. Jeśli z prawej strony wprowadzany jest wzrost wydajności pracy, konieczny jest współczynnik, który pozwoli na eliminację miana. Ponieważ jednak współczynnik w równaniu jest równy  $-1$ , jednorodność mian (a w istocie brak miana) wymaga, aby zamiast wzrostu wydajności pracy wprowadzić stopę jego wzrostu.

Drugą modyfikacją jest uzmiennienie w czasie wzrostu wydajności pracy oraz stopy wzrostu nominalnego zasobu pieniądza. Chiang z konieczności wielkości te traktuje jako parametry. Konieczność ta wynika z faktu, że różnicowy układ równań rozwiązywany jest w celu wyznaczenia ścieżek czasowych zmiennych endogenicznych. Ponieważ w niniejszym artykule układ (4) traktowany jest jako wielowymiarowy model ekonomiczny, którego parametry będą szacowane, możliwe jest uzmiennienie w czasie stopy wzrostu wydajności pracy i zasobu pieniądza oraz potraktowanie tych wielkości jako zmiennych egzogenicznych.

Wielowymiarowy model ekonometryczny (4) musi zostać poddany jeszcze dodatkowym przekształceniom wynikającym ze sposobu estymacji modelu podwójną metodą najmniejszych kwadratów (2MNK). Parametry strukturalne muszą mieć wartości swobodne, a nie ustalone (jeden lub minus jeden przy zmiennych  $T_t$ ,  $O_{t-1}$  oraz  $U_{t-1}$ ). Nie jest również możliwe, aby współczynniki stojące przed dwiema zmiennymi opisującymi były sobie równe. Ominięcie tych ogra-

niczeń wymaga wprowadzenia pięciu nowych zmiennych i dodania do układu pięciu równań bilansowych. Ostatecznie więc wielowymiarowy zmodyfikowany model Chianga jest następujący:

$$\begin{aligned}
 PT_t &= \alpha + h \cdot O_t - \beta \cdot U_t + \eta_1 \\
 DO_t &= j \cdot PO_{t-1} + \eta_2 \\
 DU_t &= -k \cdot (MP_t) + \eta_3 \\
 PT_t &= P_t + T_t \\
 DO_t &= O_t - O_{t-1} \\
 DU_t &= U_t - U_{t-1} \\
 MP_t &= M_t - P_t \\
 PO_{t-1} &= P_{t-1} - O_{t-1}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Równania strukturalne uzupełniono o składniki losowe  $\eta$ .

W modelu (5) występuje 13 zmiennych:  $P_t, O_t, U_t, DO_t, DU_t, PT_t, MP_t, T_t, M_t, P_{t-1}, O_{t-1}, U_{t-1}, PO_{t-1}$ , spośród których cztery są zmiennymi opóźnionymi, dwie zaś endogenicznymi ( $T_t, M_t$ ). Aby rozpatrywany model wielorównaniowy był modelem zupełnym, powinien zawierać 7 równań (w modelu uwzględniono 7 zmiennych łącznie współzależnych) – co ma miejsce, ponieważ ostatnie równanie jest równaniem bilansowym dla zmiennych z góry ustalonych.

Postać zredukowana modelu (5) w zapisie macierzowym jest następująca:

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{\Pi}_1 \cdot \mathbf{Z}_1 + \eta \tag{6}$$

gdzie:  $\mathbf{Y}_1^T = [PT_t, DO_t, DU_t, P_t, O_t, U_t, MP_t]$  jest wektorem zmiennych wzajemnie współzależnych, natomiast  $\mathbf{Z}_1^T = [X_0, T_t, M_t, O_{t-1}, U_{t-1}, PO_{t-1}]$  wektorem zmiennych z góry ustalonych. Zmienna  $X_0$  została wprowadzona w celu estymacji wyrazu wolnego pierwszego równania strukturalnego (współczynnika  $\alpha$ ). Wektor jej wartości składa się z samych jedynek. Zmienne  $T_t$  i  $M_t$  są zmiennymi egzogenicznymi.  $\mathbf{\Pi}_1$  jest macierzą współczynników postaci zredukowanej o wymiarze  $7 \times 6$  zawierającą współczynniki modelu.

Do oszacowania parametrów modelu (6) wykorzystano dane kwartalne z okresu od I kwartału 1997 do I kwartału 2009. Dane te pochodziły z elektronicznych publikacji GUS oraz NBP. Opis zmiennych i źródła danych statystycznych zawarto w tabeli 1.

Wielorównaniowy model inflacji i bezrobocia został oszacowany zarówno w wersji zredukowanej, jak i strukturalnej. Podkreślić należy, że w przypadku postaci strukturalnej istotne są jedynie trzy pierwsze równania, ponieważ pozostałe są równaniami bilansowymi (których parametry są znane). W postaci

**Tabela 1**  
Zmienne występujące w modelach

Oznaczenie	Nazwa i formuła	Numer strony www*
<i>P</i>	stopa inflacji**	3
<i>O</i>	oczekiwana stopa inflacji**	1
<i>U</i>	stopa bezrobocia**	4
<i>M</i>	stopa wzrostu nominalnych zasobów pieniądza obliczana na podstawie agregatu pieniężnego M3	2
<i>T</i>	stopa wzrostu wydajności pracy: wydajność pracy obliczono jako iloraz produktu krajowego brutto (PKB) i liczby pracujących (LP)	
<i>PKB</i>	produkt krajowy brutto	6
<i>SPKB</i>	stopa wzrostu produktu krajowego brutto	
<i>LP</i>	liczba pracujących	5

Uwagi: \* numer strony www podany w spisie literatury, \*\* podane stopy procentowe pomniejszono o 100% – jeśli wartość była równa 130%, dana wprowadzana do modelu miała wartość 30.

Źródło: Opracowanie własne.

zredukowanej równań jest tyle, ile parametrów z góry ustalonych i wszystkie są niezbędne do wyznaczenia wartości zmiennych zależnych wynikających z modelu. W tabeli 2 przedstawiono ocenę statystyczną równań postaci zredukowanej obejmującą wartość empiryczną statystyki F, wartość p-value oraz współczynnik determinacji.

Oceniając model stwierdzić można, że prawie wszystkie równania (z wyjątkiem trzeciego) potwierdzają istnienie statystycznej zależności między zmienną objaśnianą a zmiennymi objaśniającymi. Równanie trzecie ma wyjaśnić przyrost stopy bezrobocia (*U*). Podane w tabeli wartości ( $F_{emp}$  i p-value) wskazują na brak zależności między przyrostem stopy bezrobocia (*U*) a sumą stopy wzrostu nominalnych zasobów pieniądza (*M*) i stopy inflacji (*P*). Mimo to oszacowano parametry strukturalne trzech pierwszych równań postaci strukturalnej. Wyniki zawarto w tabeli 3. Również w tym przypadku dwa pierwsze równania potwierdzają istnienie zależności liniowej między zmiennymi, natomiast dla równania trzeciego hipotezę o istnieniu zależności liniowej należy odrzucić. W ostatniej kolumnie podano estymatory parametrów strukturalnych równań wraz ze standardowym błędem ich szacunku (w nawiasie). Istotnie różne od zera okazały się jedynie *h* oraz *j*.

Model w postaci zredukowanej wykorzystano następnie do wyznaczenia stóp inflacji rejestrowanej i oczekiwanej oraz stopy bezrobocia w II kwartale

**Tabela 2**

Statystyczna ocena równań postaci zredukowanej modelu (5)

Nr równania	Zmienna objaśniana	$F_{emp}$	p-value	$R^2$
1	$PT_t = P_t + T_t$	977,4	$4,3 \cdot 10^{-43}$	0,99
2	$DO_t = O_t - O_{t-1}$	3,8	0,006	0,31
3	$DU_t = U_t - U_{t-1}$	1,0	0,42	0,11
4	$P_t$	192	$2,9 \cdot 10^{-28}$	0,96
5	$O_t$	144,0	$1,0 \cdot 10^{-25}$	0,94
6	$U_t$	127,9	$1,1 \cdot 10^{-24}$	0,94
7	$MP_t = M_t - P_t$	151,9	$3,6 \cdot 10^{-26}$	0,95

Źródło: Badania własne.

2009 (wyniki podano w tab. 4). Ocena stóp inflacji jest daleka od wartości faktycznych, natomiast w przypadku stopy bezrobocia błąd jest wyraźnie mniejszy.

Podsumowując ocenę wielorównaniowego modelu (5) stwierdzić należy, że nie odzwierciedla on prawidłowo związków między zmiennymi. Model zaproponowany przez Chianga [1994, s. 589] nie sprawdza się w analizowanym okresie w Polsce. Wniosek taki można wyciągnąć przede wszystkim na podstawie analizy statystycznej (weryfikacja statystyczna równania trzeciego wskazuje na

**Tabela 3**

Statystyczna ocena oraz współczynniki równań postaci strukturalnej modelu (5)

Nr równania	Zmienna objaśniana	$F_{emp}$	p-value	Współczynniki i standardowy błąd szacunku
1	$PT_t$	8,9	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$\alpha = 5,99 (8,26)$ , $\beta = 0,26 (0,48)$ , $h = 0,94 (0,32)$
2	$DO_t$	21,7	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$j = 0,79 (0,17)$
3	$DU_t$	1,0	0,32	$k = 0,03 (0,03)$

Źródło: Badania własne.

**Tabela 4**

Stopa inflacji i inflacji oczekiwanej oraz stopa bezrobocia dla II kwartału 2009 wyznaczone na podstawie modelu (5)

Wartość	Zmienna		
	$P_t$	$O_t$	$U_t$
Z modelu	1,3	1,3	11,7
Rzeczywista	3,7	3,8	10,7

Źródło: Badania własne.



brak liniowej zależności między przyrostem stopy bezrobocia i różnicą między stopą wzrostu zasobów pieniądza a stopą inflacją).

Ze względu na niedostatki modelu (5) postanowiono uzupełnić zestaw zmiennych egzogenicznych o stopę wzrostu produktu krajowego brutto (*SPKB*). *PKB* jest bowiem jednym z podstawowych mierników wykorzystywanych do oceny sytuacji gospodarczej. Nową zmienną wprowadzono jedynie do trzeciego równania postaci strukturalnej (dwa pierwsze zostały pozytywnie zweryfikowane statystycznie). W równaniu trzecim uwzględniono ponadto stopę wzrostu wydajności pracy (*T*) oraz zróżnicowano współczynniki przed stopą wzrostu nominalnych zasobów pieniądza (*M*) i stopą inflacji (*P*). W równaniu pierwszym natomiast wprowadzono parametr dla stopy wzrostu wydajności pracy (*T*). Równanie drugie pozostawiono bez zmian. Zróżnicowanie współczynników w równaniach pozwoliło zmniejszyć liczbę równań bilansowych z pięciu do trzech.

Postać strukturalna zmodyfikowanego modelu inflacji i bezrobocia ostatecznie jest następująca:

$$\begin{aligned}
 P_t &= a_{11} + a_{12} \cdot T_t + a_{13} \cdot O_t + a_{14} \cdot U_t + \varepsilon_1 \\
 DO_t &= a_{21} \cdot PO_{t-1} + \varepsilon_2 \\
 DU_t &= a_{31} \cdot T_t + a_{32} \cdot M_t + a_{33} \cdot SPKB_t + a_{34} \cdot P_t + \varepsilon_3 \\
 DO_t &= O_t - O_{t-1} \\
 DU_t &= U_t - U_{t-1} \\
 PO_{t-1} &= P_{t-1} - O_{t-1}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Postać zredukowaną modelu określa równania:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{Z} + \varepsilon \tag{8}$$

gdzie:  $\mathbf{Y}^T = [P_t, DO_t, DU_t, O_t, U_t]$  jest wektorem zmiennych wzajemnie współzależnych, a  $\mathbf{Z}^T = [X_0, T_t, M_t, SPKB_t, O_{t-1}, U_{t-1}, PO_{t-1}]$  wektorem zmiennych z góry ustalonych. Zmiennymi egzogenicznymi są  $T_t$ ,  $M_t$  i  $SPKB_t$ . Macierz współczynników postaci zredukowanej  $\mathbf{\Pi}$  ma wobec tego wymiar  $5 \times 7$ .

W tabeli 5 przedstawiono ocenę statystyczną pięciu równań postaci zredukowanej obejmującą wartość empiryczną statystyki F, p-value oraz współczynnik determinacji. W przypadku wszystkich równań została potwierdzona hipoteza o istnieniu liniowej zależności między zmienną objaśnianą a przynajmniej jedną ze zmiennych objaśniających.

W tabeli 6 podane zostały oszacowane współczynniki postaci zredukowanej, natomiast ocenę trzech pierwszych równań postaci strukturalnej podano w tabeli 7. Przedstawione wielkości wskazują na poprawność modelu (7). Wszyst-

**Tabela 5**

Statystyczna ocena równań postaci zredukowanej modelu (7)

Nr równania	Zmienna objaśniana	$F_{emp}$	p-value	$R^2$
1	$P_t$	169,9	$8,2 \cdot 10^{-28}$	0,96
2	$DO_t$	3,3	0,01	0,32
3	$DU_t$	8,7	$3,7 \cdot 10^{-6}$	0,55
4	$O_t$	119,7	$8,8 \cdot 10^{-25}$	0,94
5	$U_t$	215,7	$6,6 \cdot 10^{-30}$	0,97

Źródło: Badania własne.

**Tabela 6**

Współczynniki postaci zredukowanej modelu (7)

Zmienne objaśniane	Zmienne z góry ustalone (niezależne)						
	$X_0$	$T_t$	$M_t$	$SPKB_t$	$O_{t-1}$	$U_{t-1}$	$PO_{t-1}$
$P_t$	1,885	-0,146	-0,110	16,328	0,867	-0,086	0,626
$DO_t$	1,676	-0,085	-0,085	10,823	-0,028	-0,091	0,707
$DU_t$	0,743	0,385	-0,059	-38,037	0,006	-0,037	0,108
$O_t$	1,676	-0,085	-0,085	10,823	0,972	-0,091	0,707
$U_t$	0,743	0,385	-0,059	-38,037	0,006	0,963	0,108

Źródło: Badania własne.

**Tabela 7**

Statystyczna ocena oraz współczynniki równań postaci strukturalnej modelu (7)

Nr. równania	Zmienna objaśniana	$F_{emp}$	p-value	Współczynniki i standardowy błąd szacunku
1	$P_t$	358,0	$2,1 \cdot 10^{-31}$	$a_{11} = 0,29 (0,87)$ , $a_{12} = -0,004 (0,015)$ , $a_{13} = 0,88 (0,03)$ , $a_{14} = -0,001 (0,051)$
2	$DO_t$	21,7	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$a_{21} = 0,79 (0,17)$
3	$DU_t$	12,8	$5,5 \cdot 10^{-7}$	$a_{31} = 0,38 (0,06)$ , $a_{32} = -0,02 (0,04)$ , $a_{33} = -37,86 (5,56)$ , $a_{34} = 0,006 (0,022)$

Źródło: Badania własne.

kie równania – również trzecie – zostały pozytywnie zweryfikowane statystycznie. W ostatniej kolumnie tabeli 7 podano estymatory parametrów strukturalnych równań wraz z standardowym błędem ich szacunku (w nawiasie). Istotnie różne od zera są jedynie  $a_{13}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  oraz  $a_{33}$ . Podkreślić należy, że jest to ocena parametrów strukturalnych modelu – trudno więc na tej podstawie wyciągać wnioski o związkach między zmiennymi endogenicznymi i z góry ustalonymi (informacje te zawarte są w równaniach postaci zredukowanej).

Z równania pierwszego oszacowanego modelu wynika, że wzrostowi oczekiwani inflacyjnych ( $O$ ) towarzyszy wzrost stopy inflacji rejestrowanej ( $P$ ). Nie potwierdzono natomiast związku inflacji ze stopą wzrostu wydajności pracy ( $T$ ) i stopą wzrostu bezrobocia ( $U$ ). Równanie drugie potwierdziło związek wzrostu stopy inflacji oczekiwanej z różnicą między inflacją rzeczywistą a oczekiwaną z poprzedniego kwartału. Z równania trzeciego wynika, że wzrostowi wydajności pracy towarzyszy wzrost bezrobocia, natomiast wzrostowi PKB jego spadek. Nie został natomiast potwierdzony wpływ polityki monetarnej i inflacji na zmianę stopy bezrobocia.

Podobnie jak model (5), również model (7) zweryfikowano dla II kwartału 2009. Stopę inflacji rejestrowanej i oczekiwaną oraz stopę bezrobocia przewidywaną przez model podano w tabeli 8. W tym przypadku porównanie z wartościami rzeczywistymi wskazuje na poprawność dokonanych oszacowań. Statystyczna ocena modelu (7) wskazuje na możliwość wykorzystania go do opisu związków między analizowanymi zjawiskami, reprezentowanymi przez zmienne endo- i egzogeniczne, w warunkach polskich. Skuteczność modelu dla danych spoza okresu wykorzystanego do oszacowania dodatkowo skłania do jego akceptacji. Z drugiej jednak strony weryfikacja dotyczyła jedynie jednego kwartału, co wskazuje na konieczność jej kontynuacji w przyszłości.

**Tabela 8**

Stopa inflacji i inflacji oczekiwanej oraz stopa bezrobocia dla II kwartału 2009 wyznaczone na podstawie modelu (7)

Wartość	Zmienna		
	$P_t$	$O_t$	$U_t$
Z modelu	3,8	3,8	11,1
Rzeczywista	3,7	3,8	10,7

Źródło: Badania własne.

## Podsumowanie

W artykule przedstawiono propozycję wielorównaniowego modelu inflacji i bezrobocia w Polsce, stanowiącego modyfikację modelu zaproponowanego przez Chianga [1994, s. 533–534]. W modelu zmiennymi endogenicznymi są stopa inflacji rejestrowanej, przyrost stopy inflacji oczekiwanej oraz przyrost stopy bezrobocia. Zmiennymi egzogenicznymi modelu są stopa wzrostu wydajności pracy, stopa wzrostu nominalnego zasobu pieniądza oraz stopa wzrostu produktu krajowego brutto. W modelu występuje ponadto opóźniona zmienna stanowiąca różnicę między stopą inflacji rejestrowanej i oczekiwanej. Wszystkie

równania postaci zredukowanej zostały pozytywnie zweryfikowane statystycznie, co oznacza, że model można wykorzystać do wyznaczania czy przewidywania wartości zmiennych endogenicznych. Potwierdziła to prognoza na drugi kwartał 2009 roku.

Ocena statystyczna parametrów równań postaci zredukowanej potwierdziła związek między inflacją rejestrowaną a oczekiwaną, zmianą oczekiwań inflacyjnych a różnicą między inflacją rejestrowaną i oczekiwaną z poprzedniego kwartału oraz zmianą stopu bezrobocia a stopą wzrostu wydajności pracy i stopą wzrostu PKB. Kierunek tych związków jest poprawny z ekonomicznego punktu widzenia. Nie potwierdzono natomiast wpływu stopy wzrostu wydajności pracy i stopu wzrostu bezrobocia na stopę inflacji oraz stopy wzrostu nominalnego zasobu pieniądza i stopy inflacji na zmianę stopy bezrobocia.

## Literatura

- BORKOWSKI B., DUDEK H., SZCZESNY W., 2003: *Ekonometria. Wybrane zagadnienia*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- CHIANG A.C., 1994: *Podstawy ekonomii matematycznej*. Polskie Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Ekonometria. Praca zbiorowa pod redakcją Gruszczyńskiego M. i Podgórskiej M. Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 2004.
- Ekonometria współczesna. Praca zbiorowa pod redakcją Osińskiej M. TNOiK Dom Organizatora, Toruń 2004.
- FIC T., KOLASA M., KOT A., MURAWSKI K., RUBASZEK M., TARNICKA M., 2005: *Model gospodarki polskiej ECOMOD*. Narodowy Bank Polski. *Materiały i Studia* (194).
- GAJDA J.B., 2004: *Ekonometria. Wykład i łatwe obliczenia w programie komputerowym*. Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.
- GRABEK G., 2006: Statystyczne własności szeregów czasowych inflacji. *Wiadomości Statystyczne* 3, 1–17.
- KISIELIŃSKA J., 2003: Wykorzystanie metody wskaźników i analizy Fouriera do prognozowania inflacji rejestrowanej w Polsce. *Acta Scientiarum Polonorum seria Oeconomia* 2 (1), 43–53.
- KŁOS B., 2000: Empiryczny model inflacji. *Bank i Kredyt* 9, 9–31.
- MIŁO W., KOZERA Z., SIERADZKA A., 2003: Analiza szeregów czasowych inflacji dóbr inwestycyjnych. *Wiadomości Statystyczne* 2, 9–19.
- Mikro- i makro ekonomia. Podstawowe problemy. Praca zbiorowa pod redakcją Marciniaka S. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
- PHILIPS A.W., 1958: The relation between Unemployment and the Rate of Change in the United Kingdom 1861–1957. *Economica* 25.
- THEIL H., 1979: *Zasady ekonometrii*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- UZTIG G., 2000: Modelowanie inflacji. *Wiadomości Statystyczne* 10, 15–19.

- 1: <http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/statystyka/oczekiwania/oczekiwania.html>, pobrano 10 IX 2009.
- 2: [http://www.nbp.pl/statystyka/pieniezna\\_i\\_bankowa/dwn/podaz\\_bilansowa.xls](http://www.nbp.pl/statystyka/pieniezna_i_bankowa/dwn/podaz_bilansowa.xls), pobrano 10 IX 2009.
- 3: [http://www.stat.gov.pl/gus/5840\\_1636\\_PLK\\_HTML.htm](http://www.stat.gov.pl/gus/5840_1636_PLK_HTML.htm), pobrano 10 IX 2009.
- 4: [http://www.stat.gov.pl/gus/5840\\_677\\_PLK\\_HTML.htm](http://www.stat.gov.pl/gus/5840_677_PLK_HTML.htm), pobrano 10 IX 2009.
- 5: [http://www.stat.gov.pl/cps/rde/xbcr/gus/PUBL\\_pw\\_aktyw\\_ekonom\\_ludnosci\\_ikw\\_2009.pdf](http://www.stat.gov.pl/cps/rde/xbcr/gus/PUBL_pw_aktyw_ekonom_ludnosci_ikw_2009.pdf), pobrano 10 IX 2009.
- 6: [http://www.stat.gov.pl/cps/rde/xbcr/gus/POZ\\_kwartalne\\_mierniki\\_gospodarcze\\_cz\\_III.xls](http://www.stat.gov.pl/cps/rde/xbcr/gus/POZ_kwartalne_mierniki_gospodarcze_cz_III.xls), pobrano 10 IX 2009.

## **Multivariate econometric model of inflation and unemployment in Poland**

### **Abstract**

This paper presents a proposal for a multivariate model imaging relationship between inflation and unemployment in Poland. The model was estimated based on quarterly data. Then subjected them to statistical verification, which confirmed its accuracy. The model used to predict the recorded and expected inflation, and unemployment rate. Theoretical values were close to real values.

