

Lucyna Błażejczyk-Majka, Radosław Kala
Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych
Akademia Rolnicza im. Augusta Cieszkowskiego w Poznaniu
e-mail: lmajka@au.poznan.pl, kalar@au.poznan.pl

ESTYMACJA UDZIAŁÓW METODĄ REGRESJI GRZBIETOWEJ

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę estymacji opartą na regresji grzbietowej, która ma zastosowanie, gdy zmienne objaśniające są silnie skorelowane i równocześnie nie jest możliwa redukcja modelu. Taka sytuacja ma często miejsce podczas próby oceny udziału poszczególnych nakładów w produkcji całkowitej. Rozważania teoretyczne zilustrowano estymując udziały czterech podstawowych nakładów, tj. ziemi, kapitału obrotowego, kapitału trwałego i pracy, w produkcji rolniczej Francji i Wielkiej Brytanii na podstawie danych statystycznych za okres 1973-2003.

Słowa kluczowe: udziały czynników produkcji, funkcja Cobba-Douglasa, regresja grzbietowa.

WSTĘP

Jedną z najstarszych postaci funkcji produkcji jest funkcja Cobba i Douglasa [1928]. Charakteryzuje się ona rozłącznością nakładów, co oznacza, że krańcowa stopa substytucji pomiędzy każdymi dwoma nakładami jest niezależna od poziomu zaangażowania pozostałych nakładów. Jak stwierdza Swanson [1984], funkcje o takiej własności najlepiej nadają się do opisu biologicznych procesów produkcyjnych. Funkcję Cobba-Douglasa wyróżnia ponadto prostota pozwalająca na estymację jej parametrów metodami regresji wielokrotnej, przy czym szacowane parametry nie tracą swojej interpretacji ekonomicznej, nawet jeśli zmienne wyrażone są w postaci indeksów. Wymienione własności powodują, że funkcja Cobba-Douglasa jest często wykorzystywana w badaniach ekonomiczno-rolniczych [Stańko 1987].

Jak wiadomo, nakłady biorące udział w procesie produkcji są zwykle względem siebie komplementarne lub substytucyjne. O zależnościach tych możemy się przekonać analizując skorelowanie zmiennych objaśniających w oparciu o wieloletnie szeregi czasowe. Jednak silne skorelowanie zmiennych objaśniających powoduje, że standardowa analiza regresji oparta na metodzie najmniejszych kwadratów może być nieskuteczna, dostarczając irracjonalnych ocen parametrów funkcji produkcji [Doll 1974]. W takich przypadkach zaleca się redukcję modelu regresji poprzez eliminację jednej lub kilku spośród najbardziej skorelowanych zmiennych objaśniających. Takie rozwiązanie nie jest jednak przydatne, gdy celem oszacowania funkcji Cobba-Douglasa jest uzyskanie ocen elastyczności produkcji względem wszystkich nakładów, które przy założeniu

liniowej jednorodności funkcji produkcji mogą być utożsamione z udziałami poszczególnych nakładów w procesie produkcji [Henrichsmeyer i Witzke 1991]. W takim przypadku możliwym rozwiązaniem jest skorzystanie z regresji grzbietowej. Przedstawienie tej właśnie metody w zastosowaniu do oszacowania udziałów czterech podstawowych nakładów w produkcji rolniczej jest celem niniejszej pracy. Rozważania teoretyczne zostaną zilustrowane analizą rolnictwa francuskiego i brytyjskiego w oparciu o dane statystyczne obejmujące okres 1973-2003. Wybór tych krajów różnych producentów rolniczych był podyktowany z jednej strony dostępnością danych ekonomiczno-statystycznych, a z drugiej strony chęcią pokazania, że proponowane rozwiązanie jest niezależne od wielkości produkcji oraz od jej struktury.

FUNKCJA COBBA-DOUGLASA I ESTYMACJA STANDARDOWA

Wśród głównych nakładów produkcji rolniczej poza pracą (L) i kapitałem trwałym (K) zwykle wyróżnia się ziemię (Z) oraz kapitał obrotowy (N). Wiążąc wymienione nakłady z wielkością produkcji rolniczej (Q) za pomocą funkcji Cobba-Douglasa, otrzymamy zależność:

$$Q = AL^{\beta_L} K^{\beta_K} Z^{\beta_Z} N^{\beta_N}, \quad (1)$$

gdzie A ($A > 0$) jest parametrem efektywności, natomiast parametry β_i ($0 < \beta_i < 1$), $i = L, K, Z, N$, są elastycznościami produkcji względem nakładów. Jeżeli funkcja Q jest liniowo jednorodna, to suma elastyczności jest równa jedności, co pozwala utożsamić parametry β_i , $i = L, K, Z, N$, z udziałami nakładów w produkcji Q [patrz np.: Henrichsmeyer i Witzke 1991; Nasiłowski 2004].

Jeżeli proces produkcji jest rozpatrywany w ujęciu dynamicznym, to dodatkowo w zależności (1) należy uwzględnić efekty postępu technicznego. Standardowym podejściem w takim przypadku jest przyjęcie założenia, że postęp oddziałuje na wydajność całego procesu produkcyjnego. Wtedy funkcja produkcji przyjmie postać:

$$Q_t = AL_t^{\beta_L} K_t^{\beta_K} Z_t^{\beta_Z} N_t^{\beta_N} e^{\gamma t}, \quad (2)$$

gdzie $e^{\gamma t}$ jest funkcją określającą całościowy efekt postępu technicznego w zależności od czasu t . Tak ujęty postęp techniczny, zwany neutralnym postępem Hicksa (patrz np. Intriligator 1957; Pawłowski 1976; Antle, 1986), nie jest ukierunkowany na żaden z nakładów.

Najprostszy sposób estymacji parametrów funkcji (2) polega na jej zlogarytmowaniu, która to zależność uzupełniona o składnik losowy prowadzi do modelu regresji wielokrotnej

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad (3)$$

gdzie y jest wektorem wielkości produkcji w kolejnych okresach szeregu czasowego najpierw zlogarytmowanych, a następnie scentrowanych przez odjęcie średniej, X jest macierzą zmiennych objaśniających, przekształconych analogicznie

jak wielkości produkcji, β jest wektorem nieznanych udziałów uzupełnionych o parametr γ reprezentujący stałą stopę wzrostu produkcji wynikającą z postępu technicznego, a ε jest wektorem nieskorelowanych błędów losowych o jednakowej wariancji σ^2 .

Ponieważ poszczególne nakłady biorące udział w procesie wytwórczym zwykle pozostają w silnym związku, co jest związane bądź z ich komplementarnością (korelacja dodatnia) lub ich substytucyjnością (korelacja ujemna), więc kolumny macierzy X w modelu (3) mogą być bliskie liniowej współzależności. W rezultacie oceny udziałów mogą nie spełniać wymaganych założeń, a same oszacowania udziałów uzyskane metodą najmniejszych kwadratów,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y, \quad (3)$$

mogą charakteryzować się zbyt dużymi odchyleniami standardowymi.

W przypadku, gdy w wyniku współliniowości zmiennych objaśniających macierz $X'X$ jest prawie osobliwa i nie jest dostępna żadna informacja dodatkowa, estymację parametrów w modelu (2) można oprzeć na zaproponowanej przez Hoerla i Kenarda [1970] regresji grzbietowej. Estymator grzbietowy przyjmuje wtedy postać:

$$\hat{\beta}(k) = (X'X + kI)^{-1}X'y, \quad (4)$$

gdzie k jest odpowiednio dobraną stałą dodatnią.

Estymator (4) dla $k=0$ pokrywa się z estymatorem najmniejszych kwadratów (3), tj. $\hat{\beta}(0) = \hat{\beta}$. O estymatorze tym wiadomo ponadto [patrz np. Mardia, Kent i Bibby 1979], że suma kwadratów obciążeń $\hat{\beta}_i(k)$, składowych wektora $\hat{\beta}(k)$, rośnie wraz ze wzrostem wartości stałej k oraz że równocześnie suma ich wariancji maleje. Wynika stąd istnienie takiej wartości $k > 0$, że tzw. średni błąd kwadratowy estymatora grzbietowego jest mniejszy niż estymatora najmniejszych kwadratów. Warto tu nadmienić, że średni błąd kwadratowy jest standardową miarą jakości estymatorów obciążonych.

Ustalenie stałej k jest jednak uzależnione od znajomości nieznanych parametrów modelu. Stąd powstaje problem wyboru właściwej wartości k . Szereg takich propozycji wraz z obszernymi badaniami symulacyjnymi przedstawił ostatnio Kibria [2003]. W badaniach tych, opartych na metodzie Monte Carlo, analizowano zachowanie siedmiu estymatorów grzbietowych, z których trzy wykorzystują stałe k wyliczone według następujących formuł:

$$k_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}, \quad k_{AM} = \frac{1}{p} \sum_i^p \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}_i^2}, \quad k_{GM} = \hat{\sigma}^2 \left(\prod_i^p \hat{\beta}_i^2 \right)^{-1/p}, \quad (5)$$

gdzie p jest liczbą zmiennych objaśniających, a oceny parametrów są uzyskane metodą najmniejszych kwadratów.

Stała k_{LW} była zaproponowana przez Lawlessa i Wanga [1976], natomiast dwie pozostałe stałe, z których pierwsza wykorzystuje średnią harmoniczną, a druga średnią geometryczną, są propozycjami Kibria [2003]. W przeprowadzonych badaniach stałe te prowadziły częściej niż inne wartości do redukcji średniego błędu kwadratowego. Nie oznacza to, że tak jest zawsze lub że oceny parametrów spełnią postulowane założenia, co w rozważanym tu problemie estymacji udziałów ma znaczenie zasadnicze. Z tego względu również inne wartości stałej k muszą być brane pod uwagę.

WSKAŹNIKI EKONOMICZNE

Dla ilustracji praktycznej przydatności regresji grzbietowej w estymacji wielkości udziałów poszczególnych nakładów w produkcji całkowitej poddamy analizie dane ekonomiczno-statystyczne z lat 1973-2003 dotyczące produkcji rolniczej Francji i Wielkiej Brytanii.

Za miarę osiągniętego poziomu produkcji (Q) przyjęto indeksy agregatowe wielkości produkcji z całego rolnictwa (*volume index of agricultural output*), publikowane przez EUROSTAT. Są one skonstruowane wg formuły Laspeyresa, przy czym za bazę przyjęto rok 2000. Produkcja rolnicza wg metodyki EUROSTAT (*Manual on the economic accounts for Agriculture and Forestry*, 2000) obejmuje obok podstawowych kategorii, jakimi są produkcja roślinna i zwierzęca, także usługi rolnicze.

Do opisu kapitału trwałego i obrotowego wykorzystano również zmienne typu agregatowego, publikowane przez tą samą agendę i skonstruowane według tej samej formuły. I tak za miarę kapitału (K) przyjęto indeksy ilości zużytego kapitału trwałego brutto w danym roku w procesie produkcji rolniczej (*volume index of fixed capital consumption*), w których skład wchodzi między innymi: plantacje wieloletnie, stado podstawowe, maszyny i urządzenia, budynki, wyposażenie przeznaczone do transportu, deszczownie. Natomiast kapitał obrotowy (N) opisano za pomocą ilościowych indeksów zużycia pośredniego w poszczególnych latach (*volume index of total intermediate consumption*). W ich skład wchodzi takie wielkości jak: nasiona i materiał reprodukcyjny, pasze dla zwierząt, nawozy i ulepszcze, środki ochrony roślin, środki farmaceutyczne dla zwierząt, paliwa i smary, naprawy, materiały konserwujące maszyny i budynki.

Natomiast siłę roboczą (L) zaangażowaną w procesie produkcji wyrażono liczbą aktywnych zawodowo w rolnictwie (*economically active population in agriculture*), a ziemię (Z) powierzchnią użytków rolniczych (*agriculture area*). Obie te zmienne są udostępniane przez FAOSTAT.

Publikowane dane statystyczne, ze względu na ich złożoność, różnią się formą i postacią ich prezentacji. Ziemia i siła robocza jest przedstawiona w wartościach bezwzględnych, a produkcja, kapitał i nakłady w formie indeksów agregatowych dynamiki. W związku z tym wartości danych opisujących ziemię

i siłę roboczą przedstawiono również w formie indeksów dynamiki, a dodatkowo wartości wszystkich zmiennych przeliczono w stosunku do roku 1973.

ESTYMACJA UDZIAŁÓW

Analizę regresji zwykle poprzedza wyznaczenie współczynników korelacji liniowej. Dla rolnictwa francuskiego i brytyjskiego współczynniki takie dla wielkości produkcji i badanych czterech nakładów, po ich logarytmicznej transformacji, przedstawiono w tabeli 1, przy czym nad przekątną podano korelacje wyznaczone dla Francji, a poniżej przekątnej dla Wielkiej Brytanii.

Tabela 1. Współczynniki korelacji liniowej

	Francja Wielka Brytania	Produkcja Q	Ziemia Z	Kap. obrotowy N	Praca L	Kap. trwałe K
Produkcja		*	-0.9203	0.9743	-0.9410	0.7578
Ziemia		-0.7838	*	-0.9247	0.9864	-0.6828
Kap. obrotowy		0.9059	-0.7713	*	-0.9478	0.8302
Praca		-0.8657	0.9502	-0.8674	*	-0.7478
Kapitał trwałe		0.0959	0.3843	0.1772	0.2815	*

Źródło: obliczenia własne

Łatwo spostrzec, że w przypadku rolnictwa francuskiego wszystkie zmienne są silnie skorelowane, podczas gdy dla rolnictwa brytyjskiego silnie skorelowane są wszystkie zmienne z wyjątkiem kapitału trwałego, który również nie wykazuje korelacji liniowej z wielkością produkcji. W konsekwencji standardowa analiza regresji może nie dawać zadowalających rezultatów. To przypuszczenie potwierdzają wyniki przedstawione w tabeli 2.

Tabela 2. Wyniki estymacji udziałów metodą najmniejszych kwadratów

Kraj	Udziały nakładów (S.D.)				Postęp		
	β_Z	β_N	β_L	β_K	γ	R^2	σ
Francja	2.0677 (1.0858)	1.4104 (0.1676)	1.5357 (0.5056)	-0.2868 (0.1299)	0.0699 (0.0204)	0.9733	0.0253
Wielka Brytania	0.9762 (0.5553)	0.4496 (0.2871)	2.0298 (0.5009)	-0.2777 (0.2126)	0.0367 (0.0057)	0.9531	0.0263

Źródło: obliczenia własne

W obu przypadkach wśród uzyskanych ocen parametrów β_i , $i = Z, N, L, K$, otrzymano wartości ujemne lub większe od jedności, co jest sprzeczne z przyjętymi

założeniami o funkcji produkcji. W związku z powyższym pozostaje poszukiwanie trafniejszych oszacowań. Temu celowi służy regresja grzbietowa. Dobór stałej k można oprzeć na jednym ze wzorów (5), ale można też skorzystać z informacji dodatkowej wynikającej z faktu, że parametry β_i , $i = Z, N, L, K$, są udziałami sumującymi się do jedności, czyli ich średnia wynosi 0,25. Za stałą k można zatem również przyjąć wartość

$$k_s = \frac{\hat{\sigma}^2}{(1/4)^2} = 16\hat{\sigma}^2. \quad (6)$$

Wynikające z regresji grzbietowej oszacowania udziałów wraz z odchyleniami standardowymi i pozostałymi charakterystykami modelu uzyskane dla różnych wartości stałej k , w tym również dla wartości wynikających ze wzorów (5) i (6), zestawiono w tabeli 3 (rolnictwo francuskie) i w tabeli 4 (rolnictwo brytyjskie).

Analizując uzyskane wyniki przede wszystkim należy zauważyć, że wszystkie rozpatrywane tu modele charakteryzuje podobna determinacja, porównywalna z determinacją modelu estymowanego metodą najmniejszych kwadratów. Dla danych rolnictwa francuskiego współczynnik determinacji jest w granicach od 93% do 97%, a dla danych rolnictwa brytyjskiego w granicach 92% do 95%. Warto tu też odnotować, że stopień determinacji maleje wraz ze wzrostem wartości stałej k . Ponadto, dla $k > 0.02$, oszacowania udziałów są dodatnie, a ich suma jest bliska jedności, przy czym wraz z dalszym wzrostem wartości stałej k oszacowania udziałów rosną, a oszacowania ich błędów standardowych maleją. Wreszcie należy zauważyć, że stałe k wyliczone zgodnie ze wzorami (5) różnią się znacznie, co nie pozwala na wskazanie jednej uniwersalnej formuły, a raczej przemawia za prowadzeniem analizy wielokrotnie dla różnych wartości k .

Decydując się na wybór konkretnych oszacowań udziałów należy pamiętać, że im większa wartość k tym większe obciążenie ocen, ale i mniejszy błąd standardowy. Zatem powinniśmy wybierać zestaw ocen odpowiadający możliwie małej wartości k i najlepiej tak, aby wartość każdego oszacowania przewyższała oszacowanie jego błędu standardowego. Nie zapewnia to statystycznej istotności parametrów modelu, ale jej wymuszanie jest wbrew dobrej praktyce.

Tabela 3. Wyniki estymacji udziałów nakładów w produkcji rolniczej Francji w latach 1973-2003 metodą regresji grzbietowej

Stała k	Udziały nakładów (S.D.)				Suma udziałów	Postęp γ	R^2
	β_Z	β_N	β_L	β_K			
0.00001 ^{LW}	1.4558 (1.1177)	1.3778 (0.2015)	1.3819 (0.5910)	-0.2646 (0.1565)	3.9509	0.0618 (0.0231)	0.9728
0.00055 ^{GM}	-0.5025 (0.5257)	1.2210 (0.2192)	0.6169 (0.4571)	-0.1977 (0.1656)	1.1377	0.0256 (0.0169)	0.9635
0.01000	0.0115 (0.1148)	0.8807 (0.1624)	0.1988 (0.1196)	-0.0928 (0.1332)	0.9983	0.0135 (0.0060)	0.9556
0.01026 ^S	0.0150 (0.1131)	0.8750 (0.1613)	0.1980 (0.1183)	-0.0901 (0.1327)	0.9980	0.0135 (0.0059)	0.9554
0.02000	0.0947 (0.0777)	0.7151 (0.1294)	0.1926 (0.0907)	-0.0118 (0.1173)	0.9905	0.0149 (0.0049)	0.9493
0.02331 ^{AM}	0.1098 (0.0718)	0.6778 (0.1214)	0.1944 (0.0857)	0.0071 (0.1130)	0.9892	0.0153 (0.0047)	0.9475
0.03000	0.1324 (0.0632)	0.6179 (0.1080)	0.1988 (0.0780)	0.0380 (0.1053)	0.9871	0.0160 (0.0043)	0.1354
0.04000	0.1546 (0.0545)	0.5539 (0.0928)	0.2050 (0.0695)	0.0717 (0.0955)	0.9852	0.0168 (0.0039)	0.9409
0.05000	0.1693 (0.0485)	0.5085 (0.0813)	0.2101 (0.0631)	0.0960 (0.0874)	0.9838	0.0175 (0.0036)	0.9382
0.06000	0.1798 (0.0438)	0.4747 (0.0724)	0.2141 (0.0578)	0.1143 (0.0806)	0.9829	0.0179 (0.0033)	0.9360

Źródło: obliczenia własne

Kierując się tymi wskazaniem można uznać, że w rolnictwie francuskim udział kapitału obrotowego jest największy i wynosi 51% (stała $k = 0.05$). Udziały pozostałych nakładów są w kolejności: praca – 21%, ziemia – 17% i kapitał trwały – 10%. W rolnictwie brytyjskim rozkład udziałów jest inny. Uzyskane oszacowania dla $k = 0.03$ wynoszą odpowiednio: praca – 37%, ziemia – 24% i kapitał trwały – 26% oraz nakłady – 12%. Natomiast oszacowana roczna stopa postępu technicznego dla rolnictwa obu krajów jest podobna i waha się 1.6 – 1.7%. Wyniki te zdają się potwierdzać różnice w strukturze produkcji rolniczej obu badanych tu krajów. Rolnictwo francuskie nastawione bardziej na produkcję roślinną, wymagającą większego kapitału obrotowego na nawozy i środki ochrony roślin, oraz rolnictwo brytyjskie raczej skoncentrowane na produkcji zwierzęcej wymagającej większych nakładów pracy.

Tabela 4. Wyniki estymacji udziałów nakładów w produkcji rolniczej Wielkiej Brytanii w latach 1973-2003 metodą regresji grzbietowej

Stała k	Udziały nakładów (S.D.)				Suma udziałów	Postęp γ	R^2
	β_Z	β_N	β_L	β_K			
0.00001 ^{LW}	0.8705 (0.6432)	0.4031 (0.3375)	1.9334 (0.5809)	-0.2305 (0.2426)	2.9764	0.0355 (0.0065)	0.9530
0.00153 ^{GM}	0.0436 (0.3416)	-0.0540 (0.2660)	0.8212 (0.3266)	0.2445 (0.1466)	1.0554	0.0226 (0.0043)	0.9372
0.01000	0.2018 (0.1268)	0.0160 (0.1628)	0.5078 (0.1400)	0.2672 (0.1164)	0.9928	0.0186 (0.0027)	0.9326
0.01106 ^S	0.2073 (0.1191)	0.0248 (0.1558)	0.4933 (0.1323)	0.2665 (0.1144)	0.9919	0.0184 (0.0026)	0.9322
0.02000	0.2308 (0.0830)	0.0802 (0.1145)	0.4168 (0.0932)	0.2608 (0.1012)	0.9886	0.0171 (0.0020)	0.9300
0.03000	0.2397 (0.0656)	0.1169 (0.0885)	0.3745 (0.0720)	0.2565 (0.0903)	0.9876	0.0163 (0.0016)	0.9284
0.04000	0.2434 (0.0557)	0.1403 (0.0722)	0.3495 (0.0594)	0.2539 (0.0817)	0.9872	0.0158 (0.0014)	0.9274
0.05000	0.2453 (0.0489)	0.1564 (0.0610)	0.3330 (0.0510)	0.2523 (0.0746)	0.9870	0.0155 (0.0013)	0.9266
0.06000	0.2463 (0.0439)	0.1682 (0.0529)	0.3211 (0.0448)	0.2513 (0.0687)	0.9869	0.0153 (0.0012)	0.9261
0.08764 ^{AM}	0.2474 (0.0346)	0.1887 (0.0386)	0.3008 (0.0339)	0.2499 (0.0564)	0.9868	0.0149 (0.0010)	0.9250

Źródło: obliczenia własne

LITERATURA:

- Antle J. (1986) Aggregation, Expectation, and the Explanation of Technical Change. *Journal of Econometrics*, 33, str. 213-36
- Cobb C. W., Douglas, P. H. (1928) A Theory of Production. *American Economic Review*, 8, str. 139-65
- Doll J. P. (1974) On Exact Multicollinearity and the Estimation of the Cobb-Douglas Production Function, *American Journal of Agriculture Economics*, 3, str. 556-563
- Halava A. M., El Bassiouni M. Y. (2000) Tests of Regression Coefficients under Ridge Regression Models. *Journal of Statistical Computation and Simulations*, 65, str. 341-356
- Henrichesmeyer W., Witzke H. P. (1991) *Agropolitik Band 1. Agrarökonomische Grundlagen* Verlag Eugen Umber, Stugart, str. 252
- Hoerl A. E., Kennard R. W. (1970) Ridge regression. *Technometrics*, 12, str. 55-82

- Intriligator M. D. (1957) Embodied Technical Change and Productivity in the United States 1929 –1958. *Review of Economics and Statistics*, 39, str. 65-70
- Kibria B. M. G. (2003) Performance of Some New Ridge Regression Estimators. *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, 32, str.419-435
- Lawless J. F., Wang P. (1976) A Simulation Study of Ridge and Other Regression Estimators, *Communications in Statistics*, 5, str. 307-323
- Mardia K. V., Kent J. T., Bibby J. M. (1979) *Multivariate analysis*. Academic Press, London, str. 254
- Nasiłowski M. (2004) *System rynkowy. Podstawy mikro- i makroekonomii*, Wydawnictwo Key Text, Warszawa, str. 435
- Pawłowski Z. (1976) *Ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego*, PWN, Warszawa, str. 102-103
- Stańko S. (1987) Postęp naukowo techniczny w rolnictwie, w: *Czynniki kształtujące poziom produkcji i dochodów w rolnictwie*, PWR i L, Warszawa, str. 139-183
- Swanson E. R. (1987) Substytucyjne związki między nakładami w doświadczeniach i gospodarstwach rolnych, *Roczniki Nauk Rolniczych, Seria G*, 84, str. 293-98
- Manual on the economic accounts for Agriculture and Forestry EAA/AAF 97 (Rev. 1.1), Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2000
- FAOSTAT: <http://apps.fao.org/>
- EUROSTAT: <http://epp.eurostat.cec.eu.int/>

Estimation of factor shares by ridge estimator

Summary: In the papers the method of estimation factor shares based on the ridge estimator is presented. This technique can be used then multicollinearity among the explanatory variables is presence and reduction of model is impossible. This situation takes often places then you calculate share of factor in production.

Its practical application concerning the estimation of share of four elementary factors: land, labour, working capital and fixed capital in the agricultural production of France and Great Britain in period 1973-2003, is also investigated.

Key words: factor share, Cobb-Douglas production function, ridge regression