

Arkadiusz Orłowski
Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW
Mariusz Bęben
Szkoła Nauk Ścisłych w Warszawie

Metody chaosu deterministycznego w badaniach ekonomicznych

Wstęp

Chaos deterministyczny jest teorią usiłującą wyjaśnić nieregularne, podobne do stochastycznych, własności i zachowanie się części nieliniowych układów deterministycznych. Teoria ta przyciąga uwagę coraz większej liczby naukowców z różnych dziedzin wiedzy, w tym ekonomistów i finansistów. O układzie powiemy, że jest czysto deterministyczny, jeśli jego opis nie wymaga wprowadzenia zmiennych losowych. W przypadku, gdy obserwowany system umiemy opisać jedynie przez podanie prawdopodobieństw przejść pomiędzy możliwymi stanami układu, mówimy, że system jest stochastyczny.

Ważną cechą zachowania układu chaotycznego jest ograniczona możliwość tworzenia prognoz długoterminowych, co wiąże się z dużą wrażliwością układu na warunki początkowe. Dowolne trajektorie startujące z podobnych warunków początkowych będą się szybko oddalać od siebie: odległość między nimi będzie rosła wykładniczo z czasem.

Zanim przejdziemy do omówienia szczegółów natury technicznej, warto jeszcze wspomnieć o uzasadnieniu zastosowania tych technik do danych pochodzących z obserwacji systemu, o którym nie wiadomo dokładnie, czy jest całkowicie deterministyczny. Odpowiedź na tak postawione pytanie brzmi: zastosowanie teorii chaosu w takim przypadku może być kontrowersyjne. Teoria chaosu deterministycznego tłumaczy zachowania systemów o znanej deterministycznej dynamice nieliniowej, opisaną przez zależności funkcyjne typu: $x_{n+1} = f(x_n)$, gdzie x_n jest wektorem opisującym stan układu w skończonej wymiarowej przestrzeni fazowej w chwili n , a f jest funkcją opisującą ewolucję czasową układu. W przypadku danych eksperymentalnych mamy zazwyczaj do dyspozycji jedynie skalarny szereg czasowy obserwacji będących pewną nieznaną funkcją wektorów x : $s_n = s(x_n)$. Chcemy więc wierzyć, że te obserwa-

cje pozwolą nam zrekonstruować przestrzeń fazową oraz że własności pewnych wielkości w przestrzeni zrekonstruowanej będą takie same jak w pierwotnej, do czego daje podstawy omówiona później technika zanurzeń.

W tej sytuacji możliwych jest kilka podejść. Pierwsze z nich, rygorystyczne, nakazywałoby najpierw zweryfikować tezę o determinizmie i nieliniowości systemu. Jednak trudno jest o prosty dowód niskowymiarowej chaotyczności danego systemu. Jego skonstruowanie wymagałoby zaobserwowania samopodobieństwa w danych pomiarowych – czyli, inaczej mówiąc, ich skalowania się (taka próba została przez nas podjęta dla rozkładów dziennych stóp zwrotu). Poza tym, należałoby pokazać wrażliwość naszego układu na warunki początkowe, co również usiłujemy przeprowadzić, obliczając maksymalny wykładnik Lyapunova. W przypadku idealnym powinniśmy umieć wyekstrahować z danych postać funkcji f opisującej dynamikę układu, za jej pomocą obliczyć wartości przyszłe obserwacji i sprawdzić, czy mają one własności statystyczne analogiczne z pierwotnymi danymi. Takie podejście jest, z wielu powodów, bardzo trudne do zrealizowania i jego rygorystyczne przestrzeganie z pewnością doprowadziłoby do zarzucenia stosowania metod nieliniowych w dziedzinach, w których okazały się one przydatne. Wielu autorów przyjmuje więc bardziej pragmatyczny paradygmat i nie zakładając nic na temat dynamiki opisującej układ, koncentruje się na pytaniu nie o obecność w nim chaosu deterministycznego, ale o to, czy metody wypracowane przy badaniu nieliniowych modeli teoretycznych o znanej dynamice są przydatnym językiem do opisu posiadanych danych. Czysty determinizm w systemach rzeczywistych jest bardzo trudny do zaobserwowania, ponieważ wszystkie te systemy oddziałują z otoczeniem. Tak więc obraz deterministyczny jest raczej przypadkiem granicznym. Na domiar złego, nawet systemy, o których wiemy z pewnością, że są nieliniowe mogą wykazywać zachowania stochastyczne wskutek uśrednienia do rozkładu gaussowskiego wielu słabo ze sobą oddziałujących stopni swobody.

Nieliniowa analiza szeregów czasowych ma swój początek w latach 80. dwudziestego wieku i opiera się na twierdzeniu o zanurzeniu (twierdzenie Takensa), które w dalszej części pracy przytaczamy w całości. Jej rozwój wywodzi się z odkrycia osobliwych chaotycznych atraktorów w nieliniowych systemach dysypatywnych. Systemy dysypatywne odznaczają się obecnością sił tarcia w przeciwieństwie do systemów zachowawczych, czy też inaczej hamiltonowskich, które najczęściej są przedmiotem analizy w fizyce teoretycznej. W systemach dysypatywnych nie funkcjonują proste zasady zachowania energii, pędu, momentu pędu. Poglądowo mówiąc, objętości zajmowane przez trajektorie w przestrzeni fazowej kurczą się, a same trajektorie zbiegają do pewnych atraktorów. W systemach nieliniowych mogą występować niestabilne

punkty stałe, czyli, inaczej mówiąc, kierunki lokalnej ekspansji, ale pomimo tego system jako całość pozostaje dysypatywny, czyli nie opuszcza ustalonego obszaru w przestrzeni fazowej. Powyższe cechy powodują występowanie tzw. dziwnych atraktorów, które często bywają fraktalami.

W dalszej części przedstawimy teoretyczne podstawy techniki zanurzenia, która bazuje na wspomnianym już wcześniej twierdzeniu Takensa, jak również zaprezentujemy metodę surogatów, za pomocą której można wygenerować szereg czasowy o takich samych własnościach charakteryzujących procesy liniowe, jak wyjściowe, aby następnie sprawdzić, czy tak wyprodukowany surogat różni się pod względem charakterystyk nieliniowości od oryginału, co by było sygnałem, że dane wyjściowe nie są realizacją liniowego procesu.

Technika zanurzeniowa

Jak wcześniej wspomnieliśmy, większość obserwacji dokonywanych na systemach jest skalarna, podczas gdy stan systemu opisywany jest wektorem w d -wymiarowej przestrzeni fazowej. Niech $\mathbf{x}(t)$ będzie d -wymiarowym wektorem w przestrzeni fazowej, a $s(\mathbf{x}(t))$ skalarną obserwacją wykonaną na systemie w chwili t . Metoda zanurzeniowa opiera się na założeniu, że wartości przeszłe i przyszłe skalarnej obserwacji zawierają informację na temat bieżących wartości nie obserwowanych stopni swobody. Wektorem w przestrzeni zanurzeniowej (embedding space) o wymiarze E i przesunięciu czasowym (time delay) τ nazwiemy wektor o współrzędnych $(s(t-(E-1)\tau), s(t-(E-2)\tau), \dots, s(t))$. Według przedstawionego poniżej twierdzenia Takensa, przestrzeń zanurzeniowa skonstruowana według pewnych zasad rekonstruuje pierwotną przestrzeń fazową.

Twierdzenie o zanurzeniu Takensa (1981). *Niech d -wymiarowy system dynamiczny $\dot{\bar{x}} = F(\bar{x})$, bądź alternatywnie $\bar{x}_{n+1} = f(\bar{x}_n)$, posiada atraktor o wymiarze fraktalnym $D < d$. Na atraktorze dokonuje się pomiarów skalaranych $s(t) = s(\bar{x}(t))$, a następnie konstruuje się przestrzeń zanurzeniową $(s(t-(E-1)\tau), s(t-(E-2)\tau), \dots, s(t))$ o wymiarze E i przesunięciu czasowym τ . Wówczas topologia atraktora w przestrzeni zanurzeniowej o wymiarze $E \geq 2D + 1$ jest identyczna z topologią atraktora w przestrzeni fazowej $\bar{x}(t)$ teoretycznie dla wszystkich τ przy nieskończenie długim i dokładnym pomiarze $s(t)$. W szczególności niezmienniki topologiczne takie jak wykładniki Lyapunova czy wymiary fraktalne mają te same wartości liczbowe w przestrzeni zanurzeniowej, co w oryginalnej przestrzeni fazowej.*

Ponieważ liczba stopni swobody w oryginalnym systemie nie jest znana, nie potrafimy podać wymiaru przestrzeni, którego powinniśmy użyć do zanurzenia. Oczywiście, zgodnie z twierdzeniem Takensa, jeśli weźmiemy dostatecznie wysoki wymiar zanurzenia, jesteśmy pewni, że uzyskamy rekonstrukcję atraktora o tych samych własnościach topologicznych, co oryginał. Przy obliczeniach zainteresowani jesteśmy jednak znalezieniem najmniejszego możliwego wymiaru zanurzenia E ze względu na skończoność naszego szeregu pomiarów $s(t)$ oraz rosnącą wraz ze wzrostem wymiaru złożonością obliczeń. Jedną z metod oszacowania najmniejszego koniecznego wymiaru zanurzenia E_{\min} jest metoda fałszywych najbliższych sąsiadów (false nearest neighbours; Kennel, Brown, Abandel 1992). Metoda ta oparta jest na własności istnienia dyfeomorfizmu pomiędzy atraktorem w przestrzeni fazowej i jego rekonstrukcją poprzez zanurzenie. Zapewnia ono odwzorowywanie punktów z otoczenia x w punkty z otoczenia u , jeśli u jest odwzorowaniem x . W przypadku jednak, kiedy użyjemy zbyt niskiego wymiaru zanurzenia, czyli $E < E_{\min}$, w otoczeniu punktu u znajdują się punkty, które nie należą do otoczenia punktu x na oryginalnym atraktorze w przestrzeni fazowej. Są to fałszywi sąsiedzi. Ich liczba zmniejsza się wraz ze zwiększaniem wymiaru zanurzenia, aż przy pewnej wartości $E = E_{\min}$ osiąga wartość zero. Wymiar przestrzeni zanurzeniowej, przy którym liczba fałszywych sąsiadów wynosi zero po raz pierwszy, przyjmujemy jako minimalny wymiar zanurzenia.

Następnym problemem, na który natrafiamy przy rekonstrukcji atraktora w przestrzeni zanurzeniowej, jest określenie przesunięcia czasowego τ (time delay). Do określenia właściwego przesunięcia czasowego posłużymy się metodą zaprezentowaną po raz pierwszy przez Fräsera i Swinneya (Fraser, Swinney 1986). Metoda ta posługuje się pojęciem informacji wzajemnej (mutual information), która jest pewnym uogólnieniem funkcji autokorelacji szeregu czasowego. Nasze zrozumienie tej metody jest następujące: badamy uogólnioną autokorelację dla różnych przesunięć czasowych τ . W miarę jak τ rośnie autokorelacja ta powinna się zmniejszać, aż osiągnie pewne minimum. Osiągnięcie minimum przy danym τ oznacza, że wartość szeregu czasowego τ jednostek czasowych do tyłu w najmniejszym jak do tej pory stopniu wpływa na wartość obecną. Przyjmujemy więc, że w tym minimum wartość jest najsilniej zależna od pozostałych stopni swobody – czyli jest jakąś funkcją nieznaną stopni swobody, która mówi nam w sposób pośredni o ich zachowaniu. Zatem obie ramy za wartość przesunięcia czasowego takie τ , dla którego wartość informacji wzajemnej osiąga pierwsze minimum.

Wykładniki Lyapunova i metoda surogatów

Cechą charakterystyczną systemów posiadających dynamikę nieliniową jest ich wrażliwość na warunki początkowe. Należy to rozumieć w ten sposób, że początkowo bliskie sobie trajektorie w przestrzeni fazowej oddalają się od siebie wraz z upływem czasu, a ich odległość rośnie wykładniczo z czasem. Miarą szybkości oddalania się tych trajektorii są właśnie wykładniki Lyapunova. W naszej pracy posługujemy się następującą definicją maksymalnego wykładnika Lyapunova (Hegger, Kantz 1999). Niech \vec{s}_n oznacza punkt na zrekonstruowanej trajektorii układu w przestrzeni fazowej. Weźmy pod uwagę punkt z pewnego otoczenia \vec{s}_n i oznaczmy go $\vec{s}_{n'}$. Dalej niech $\Delta_0 = s_n - s_{n'}$ będzie odległością pomiędzy rozpatrywanymi punktami. Po l iteracjach odległość ta wyniesie $\Delta_l = s_{n+l} - s_{n'+l}$. Jeśli pomiędzy nimi zachodzi relacja $\Delta_l \approx \Delta_0 e^{\lambda l}$, to wtedy λ jest maksymalnym wykładnikiem Lyapunova dla systemu dynamicznego. Obliczanie estymatora nieobciążonego największego wykładnika przebiega następująco. Najpierw obliczamy:

$$S(\varepsilon, m, t) = \left\langle \ln \left(\frac{1}{|U_n|} \sum_{s_n \in U_n} |s_{n+t} - s_{n'+t}| \right) \right\rangle_n,$$

gdzie, U_n oznacza ε -otoczenie punktu \vec{s}_n , a m jest wymiarem zanurzenia. Jeśli $S(\varepsilon, m, t)$ wykazuje liniowy wzrost z czasem t z tym samym nachyleniem dla m większych niż pewna krytyczna jego wartość i dla pewnego zakresu ε , to nachylenie to może być wzięte za estymator szukanej wielkości.

Do tej pory podaliśmy opis metody analizy szeregów czasowych przy założeniu, że pochodzą one z układów charakteryzujących się dynamiką nieliniową i wykazują zachowania chaotyczne. Zazwyczaj jednak mając szereg danych pomiarowych nie potrafimy powiedzieć, z jakiego rodzaju układu one pochodzą, jaka dynamika nimi rządzi: stochastyczna czy deterministyczna. W szczególności pytanie to dotyczy układów, którymi się zajmujemy – ekonomicznych. Potrzebne jest więc narzędzie statystyczne, które pozwoli porównać dane z danymi wygenerowanymi przez proces stochastyczny, ale nie dowolny, lecz taki, który ma takie same lub bardzo podobne charakterystyki (momenty,

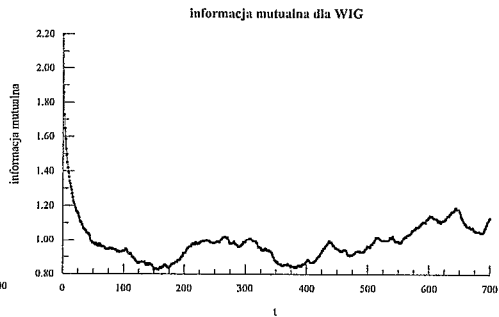
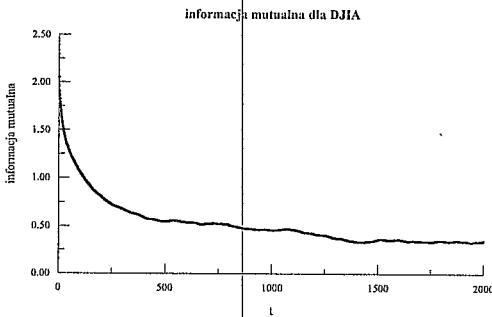
rozkład itd.) Do stworzenia takich szeregów czasowych przydatna jest metoda surogatów (Theiler, Eubank, Longtin, Galdrikian, Farmer 1992)

Surogat danego szeregu czasowego jest realizacją pewnego liniowego procesu stochastycznego, który ma niektóre cechy wspólne z pierwotnymi danymi. Cechami tymi są charakterystyki liniowe oraz rozkład prawdopodobieństwa wartości osiąganych przez szereg czasowy. Taki stan rzeczy jest osiągnięty poprzez zastosowanie dwóch twierdzeń. Pierwsze z nich mówi o relacji pomiędzy współczynnikami liniowego procesu stochastycznego a macierzą kowariancji (czy też funkcją autokorelacji), a mianowicie, że pierwsze jednoznacznie wyznaczają drugie i na odwrót. Relacja pomiędzy tymi dwoma charakterystykami jest znana pod nazwą równań Yule-Walkera. Krótko mówiąc, znając współczynniki procesu stochastycznego, potrafimy wyliczyć macierz kowariancji i na odwrót.

Drugie twierdzenie mówi o relacji pomiędzy widmem fourierowskim szeregu czasowego a funkcją autokorelacji tego szeregu (czy też macierzą kowariancji). Jest ono znane pod nazwą twierdzenia Wienera-Khinchina i mówi, że transformata Fouriera funkcji autokorelacji jest równa widmu fourierowskiemu szeregu czasowego. Pamiętamy przy tym, że obliczając widmo fourierowskie szeregu, tracimy informację o fazie transformaty Fouriera szeregu czasowego, której potrzebujemy, jeśli chcemy za pomocą odwrotnej transformaty odzyskać pierwotny szereg czasowy z widma. Fazę tę możemy więc dobrać dowolnie i nadal być pewnym, że odtworzony w ten sposób szereg czasowy będzie miał tę samą funkcję autokorelacji – gwarantuje to twierdzenie Wienera-Khinchina. Oczywiście, jeśli chcemy odtworzyć pierwotny szereg czasowy, musimy znać też pierwotne fazy – opisany wyżej sposób generowania szeregów czasowych (zwany randomizacją faz) pozwala uzyskać inny szereg czasowy o tej samej funkcji autokorelacji, a więc i o tych samych współczynnikach liniowego procesu stochastycznego, jeśli pierwotny szereg czasowy pochodzi z takiego procesu.

Badanie rzeczywistych szeregów czasowych

W pracy posługujemy się danymi pochodzącymi przede wszystkim z dwóch giełd papierów wartościowych: New York Stock Exchange (NYSE) i Warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych (WGPW). W przypadku NYSE bierzemy pod uwagę wskaźnik Dow Jones Industrial Average (DJIA) z okresu od 1930.03.04. do 2000.01.07 a dla giełdy warszawskiej posługujemy się Warszawskim Indeksie Giełdowym z okresu od 1991.04.16. do 2000.01.07.

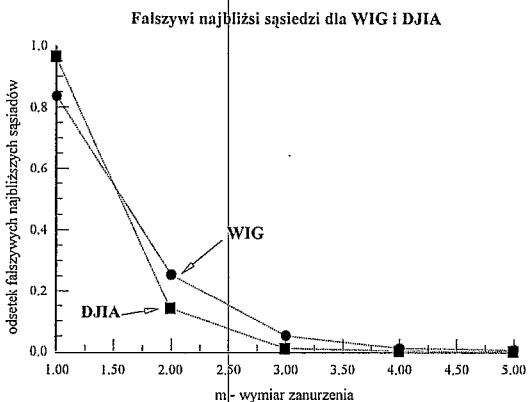


Aby zrekonstruować przestrzeń fazową, należy najpierw oszacować dwa parametry niezbędne do rekonstrukcji. Są nimi przesunięcie czasowe (time delay) τ oraz wymiar zanurzenia m . Pierwszą z tych wielkości określamy za pomocą informacji wzajemnej.

Na wykresach widać, że dla indeksu DJIA pierwsze ewentualne minimum pojawia się około $\tau = 1500$. Tę wartość przyjmujemy więc jako pierwszy parametr do rekonstrukcji przestrzeni fazowej DJIA. Jako przesunięcie czasowe dla WIG przyjmujemy wartość $\tau = 150$, ponieważ funkcja informacji wzajemnej dla tej wartości ma pierwsze wyraźne minimum.

Do ustalenia minimalnego wymiaru zanurzenia posłużymy się wspomnianą już metodą fałszywych najbliższych sąsiadów. Wykres obok pokazuje odsetek fałszywych sąsiadów dla obu badanych indeksów jako funkcję wymiaru zanurzenia. Widzimy, że odsetek fałszywych najbliższych sąsiadów osiąga wartość bliską zero już dla $m = 3$. Tego wymiaru zanurzenia używamy dalej do naszych celów.

Odrębną klasą stosowanych przez nas danych są kursy wymiany walut. W naszej pracy posługujemy się kursem dolara amerykańskiego USD do marki

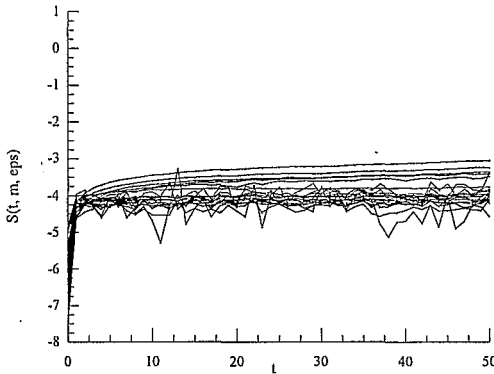


niemieckiej DEM z lat 1971 do 2000 jako reprezentantem tej klasy danych. Przyjęte na podstawie obliczeń podobnych do tych przeprowadzonych dla indeksów giełdowych parametry rekonstrukcji przestrzeni fazowej to wymiar zanurzenia $m = 3$ oraz opóźnienie czasowe (time delay) $\tau = 500$. Z notowań USD-DEM również usunęliśmy trend wykładniczy.

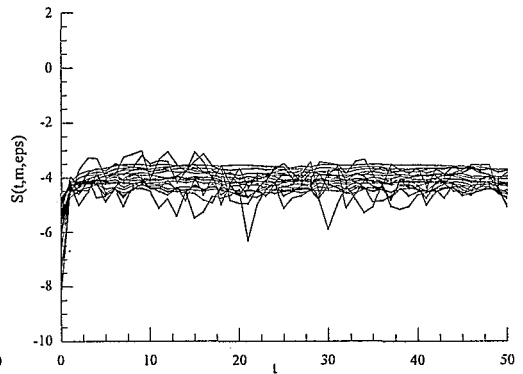
Maksymalny wykładnik Lyapunova

Rysunki zamieszczone w tym rozdziale pokazują zależność S od czasu. Przedstawiliśmy powyższą zależność dla czterech przypadków: indeksów DJIA, WIG, kursu wymiany USD-DEM oraz dla surogatu kursu wymiany USD-DEM. Parametry użyte przez nas w poszczególnych przypadkach to: wymiar zanurzenia m dla wszystkich obrazów od $m = 2$ do $m = 8$. Podobnie liczba kroków iteracji dla wszystkich przypadków jest wspólna i wynosi 50. Rozmiar sąsiedztwa ε branego pod uwagę jest z przedziału od wartości szerokości przedziału danych podzielonych przez 1000 do tejże wartości podzielonej przez 100 i w poszczególnych przypadkach wynosi: dla USD-DEM od $8,34E-4$ do $8,35E-3$, dla DJIA od $2,17E-3$ do $2,17E-2$ i dla WIG od $3,19E-3$ do $3,19E-2$, gdzie E oznacza podnoszenie 10 do potęgi x .

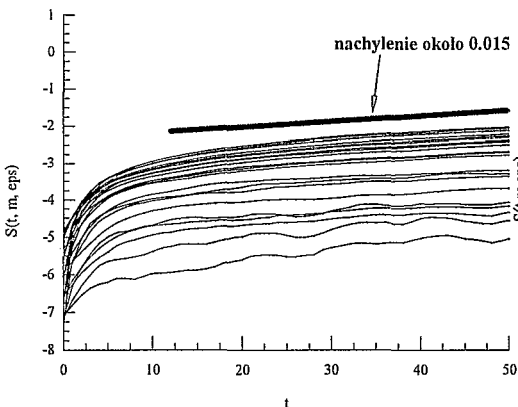
Wykładnik Lyapunova dla DJIA



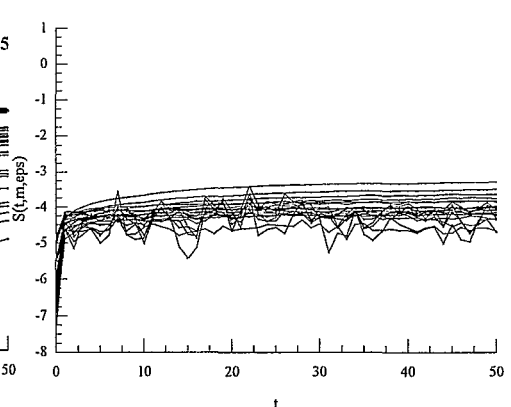
Wykładnik Lyapunova dla WIG



Wykładnik Lyapunova dla kursu USD-DM



Wykładnik Lyapunova dla surogatu 1. kursu wymiany USD-DM



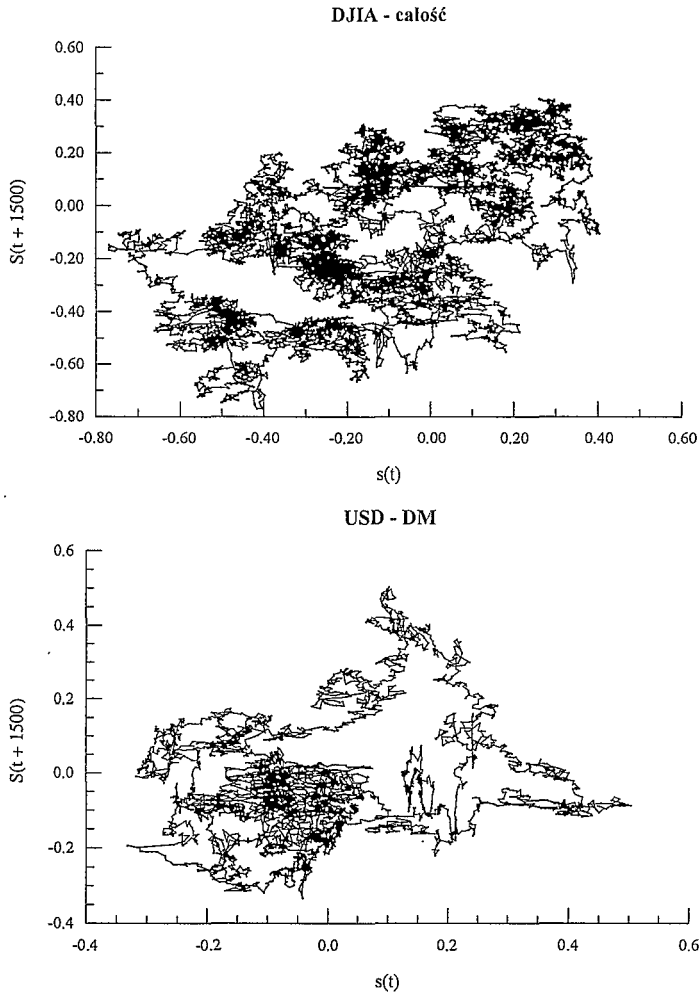
Dla obu indeksów giełdowych WIG oraz DJIA nie można dostrzec na rysunkach obszarów liniowości dla wystarczającej ilości wymiarów zanurzenia i rozmiarów sąsiedztwa (każda linia na rysunku oznacza jedną wartość m i ϵ). Oznacza to, że nie potrafimy oszacować wykładnika Lyapunova dla tych szeregów czasowych, bądź ze względu na duże zaszumienie danych, bądź wykładnik Lyapunova dla tych danych wynosi zero.

Inaczej rzeczy się mają w przypadku kursu wzajemnego walut USD-DEM. Na odpowiadającym mu wykresie można zaobserwować liniowy region wzrostu S z t . Prosta umieszczona nad krzywymi będącymi wykresami S została dopasowana do liniowego obszaru wzrostu, a jej współczynnik nachylenia wynosi około 0,015, co przyjmujemy również za szacowaną wartość wykładnika Lyapunova dla USD-DEM. Dla weryfikacji tezy o dodatniości wykładnika Lyapunova dla USD-DEM obliczyliśmy tę wielkość również dla surogatu kursu wymiany omawianych walut. Wynik obliczeń dla jednego z surogatów przedstawiony jest na rysunku po lewej stronie rysunku dla USD-DEM. Świadczy on dobitnie o tym, że kurs wymiany USD-DEM nie może być realizacją liniowego procesu stochastycznego, gdyż gdyby tak było, jego charakterystyka nieliniowa, którą w tym przypadku jest wykładnik Lyapunova, byłaby taka sama, jak dla jego surogatu. Identyczne wyniki daje porównanie omawianego kursu z kilkoma dalszymi swoimi surogatami. Znaleźliśmy zatem bardzo ważki dowód na to, że za notowaniami kursu walut USD-DEM kryje się nieliniowa dynamika deterministyczna, gdyż dodatni wykładnik Lyapunova jest jedną z zasadniczych cech chaosu deterministycznego.

Podsumowując: udało nam się dowieść istnienia dodatniego wykładnika Lyapunova dla kursu USD-DEM. Wynik ten skonfrontowaliśmy z obliczeniami przeprowadzonymi dla surogatów. Nie wykryliśmy natomiast dodatnich wykładników dla obu badanych przez nas indeksów giełdowych. O ile w pierwszym przypadku znaleźliśmy silny argument za obecnością chaosu deterministycznego w badanych danych, o tyle pozostałe przypadki zdają się świadczyć o czymś przeciwnym.

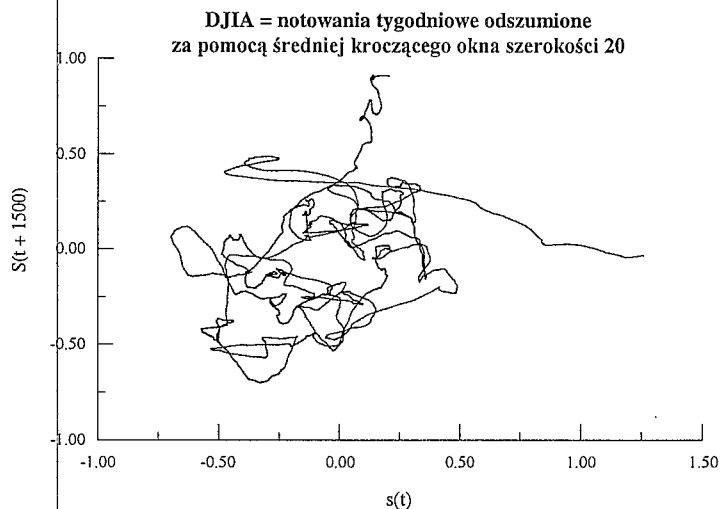
Rekonstrukcja przestrzeni fazowej

Rekonstrukcja przestrzeni fazowej, dla której podstawą jest cytowane przez nas we wstępie twierdzenie Takensa o zanurzeniu, umożliwia wizualizację dynamiki, której podlega badany system. W tym rozdziale przedstawimy portrety fazowe kilku systemów: indeksu giełdowego DJIA, jak też kursu wymiany dolara amerykańskiego USD wobec marki niemieckiej DEM.



Jak widać, na wykresach są obecne pewne struktury, które nie przypominają zamkniętych orbit. Bliższe przyjrzenie się tym wykresom pozwala jednak zauważyć pewną regularność: rekonstruowane trajektorie w przestrzeni fazowej poruszają się zgodnie ze wskazówkami zegara po nieregularnym okręgu (elipsie lub innym konturze owalnym). Efekt ten jest najlepiej widoczny dla rekonstrukcji trajektorii DJIA. Aby pokazać go wyraźniej, postanowiliśmy posłużyć się notowaniami tygodniowymi i odszumiliśmy te dane za pomocą średniej kroczącej o rozmiarze okna 20. Widać tam wyraźne orbity zakreślane mniej więcej wokół punktu (0,0) na układzie współrzędnych. Jest to pewna przesłanka do założenia istnienia chaosu deterministycznego w tym układzie. Nie jest to

jednak ostateczny dowód, podobnie jak nieregularne kształty trajektorii na pozostałych portretach fazowych nie są zaprzeczeniem tezy o chaosie na rynkach kapitałowych. Świadczą one jedynie o obecności dużej ilości szumu w tych układach. Być może jednak układy te są mimo wszystko sterowane jakimś wewnętrznym deterministycznym i nieliniowym mechanizmem, który jest odpowiedzialny za tworzenie się regularnych trajektorii, jak w najbardziej wyrazistym do tej pory przypadku indeksu DJIA. Trzeba jeszcze podkreślić, że pozo-



stałe badane szeregi czasowe również mają trajektorie obracające się zgodnie ze wskazówkami zegara, jednak bądź nie są one domknięte (WIG), bądź obserwujemy na nich tylko jedno okrążenie (kurs wymiany USD-DEM), oraz skupione na niewielkim obszarze zakłębienie trajektorii. Przyczyną tych efektów jest prawdopodobnie mała wielkość szeregów czasowych, jakich użyliśmy (dla WIG-u jedynie około 10 lat z oczywistych względów, dla kursów USD-DEM z trzydziestu lat, ponieważ notowania z wcześniejszego okresu były poniekąd sztuczne ze względu na utrzymywanie się systemu z Bretton Woods, zakładającego stały z dokładnością do niewielkich odchyłek kurs walut wobec dolara amerykańskiego). Zatem konkluzją z próby rekonstrukcji trajektorii w przestrzeni fazowej badanych szeregów czasowych jest to, że zaobserwowano pewne cechy świadczące o możliwości istnienia chaosu deterministycznego na rynkach kapitałowych.

Podsumowanie

W pracy przedstawiliśmy podstawowe idee nieliniowej analizy szeregów czasowych oraz ich zastosowanie w badaniach ekonomicznych. W części teoretycznej opisaliśmy kilka technik analizy użytych następnie do pracy z danymi pochodzącymi z rynków walutowych i giełd papierów wartościowych. Zaprezentowaliśmy odtworzone trajektorie badanych systemów w przestrzeni fazowej, uzyskując ciekawe obrazy mające pewne znamiona regularności (obracać się trajektorii zgodnie z ruchami wskazówek zegara). Oszacowaliśmy również maksymalny wykładnik Lyapunova metodą Kantza. Wyniki wykazały istnienie dodatniego wykładnika dla kursu wymiany USD-DEM, co jest bardzo silną przesłanką, popierającą tezę o istnieniu dynamiki nieliniowej w kursach wymiany walut. Dla porównania oszacowaliśmy również wykładnik Lyapunova dla surogatu szeregu czasowego USD-DEM otrzymując diametralnie różny obraz.

Literatura

1. P. CHEN, Empirical and theoretical evidence of economic chaos, *System Dynamics Review*, Vol. 4, str. 81 (1988).
2. A.M. FRASER, H.L. SWINNEY, Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Physical Review A*, Vol. 33, str. 1134 (1986).
3. R. HEGGER, H. KANTZ, TH. SCHREIBER, Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package, *Chaos*, Vol. 9, str. 413 (1999).
4. H. KANTZ, A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent from a time series, *Physics Letters A*, Vol. 185, str. 77 (1994).
5. H. KANTZ, TH. SCHREIBER, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
6. M.B. KENNEL, R. BROWN, H.D.I. ABANDEL, Determining embedding dimension for phase space reconstruction using a geometrical construction, *Physical Review A*, Vol. 45, str. 3403 (1992).
7. E.E. PETERS, *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997.

8. TH. SCHREIBER, Interdisciplinary application of nonlinear time series methods, *Physics Reports*, Vol. 308, str. 1 (1999).
9. J. THEILER, S. EUBANK, A. LONGTIN, B. GALDRIKIAN, J.D. FARMER, Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data, *Physica D*, Vol. 58, str. 77 (1992).

Methods of deterministic chaos in economical research

Abstract

An introduction to nonlinear analysis of economical time series is given. Methods developed for investigations of chaotic dynamics of physical systems are applied to various indexes and exchange rates. An attempt to distinguish between well-developed and emerging markets is undertaken. Phase-space reconstruction as well as estimation of the Lyapunov exponent are performed using available economical data.