*Ewa Marta Syczewska*
Instytut Ekonometrii SGH W Warszawie

# Testy kointegracji dla szeregów I(2), I(1) – Testy Hansena

## Testy Hansena

Przedmiotem niniejszych rozważań jest zastosowanie testów Hansena do badania stabilności modelu, w którym zmienna objaśniana Y jest zintegrowana stopnia 1, natomiast dwie zmienne objaśniające X1 i X2 są zintegrowane stopnia I(2), zarazem są skointegrowane do stopnia I(1). Ponadto, zmienne Y, X1 i X2 są skointegrowane, więc składnik losowy takiego równania jest stacjonarny (por. np. Engle i Granger [1987] lub Charemza i Deadman [1997]).

Testy Hansena – Lc, MeanF oraz SupF – związane są z semiparametryczną metodą estymacji relacji kointegrujących, opracowaną przez Phillipsa i Hansena (por. Phillips i Hansen [1990]) i uogólnioną następnie przez Hansena [1992a] na przypadek modelu o zmiennych parametrach. Omówienie tej metody oraz własności testów Hansena, w tym tablice wartości krytycznych, dla przypadku zmiennych objaśniających zintegrowanych stopnia 1, oraz argumenty za stosowaniem tych metod podałam w mojej pracy (Syczewska [1999]).

Hansen [1992] pisze, że wszystkie trzy testy, tzn. SupF, MeanF oraz Lc, są testami tej samej hipotezy zerowej, zakładającej stabilność (brak zmian) parametrów strukturalnych szacowanego modelu. Testy te różnią się natomiast postacią hipotezy alternatywnej, zakłada ona bowiem albo jednorazową zmianę strukturalną w nieznanym momencie, albo stopniową zmianę parametrów (parametry generowane są jako martyngały). Najłatwiejsza do obliczenia jest statystyka Lc. Nie jest ona obarczona ograniczeniem, jakiemu podlegają dwie pozostałe statystyki, dla których z przyczyn analitycznych (co wykazał Andrews [1990]) trzeba zakładać, że ewentualna zmiana mogła wystąpić tylko w części próby odpowiadającej proporcji z przedziału ⟨0,15 0,85⟩, a nie w dowolnym momencie (tzn. nie dla przedziału ⟨0 1⟩). Testy Hansena mogą być wykorzystywane jako testy hipotezy zerowej, oznaczającej występowanie relacji kointegrującej.

Statystyki testów Hansena mają złożoną postać. Rozkłady asymptotyczne dla tych statystyk, podane przez Hansena [1991], [1992] dla zmiennych I(1), są skomplikowanymi funkcjami procesów Wienera. Zadanie zbadania metodami analitycznymi własności testów dla przypadku, gdy zmienne objaśniające są zintegrowane stopnia wyższego niż 1, jest znacznie bardziej skomplikowane. Tymczasem przypadek, stanowiącego potencjalną relację kointegrującą, modelu o zmiennych objaśniających zintegrowanych stopnia 2 nie jest rzadki. Przy badaniu relacji parytetu siły nabywczej zmienne odpowiadające poziomowi cen w kraju i za granicą lub oznaczające nominalny kurs wymiany bywają zmiennymi I(2) (por. np. Haldrup [1994]). Potrzebne są więc odpowiednie tablice wartości krytycznych testów Hansena. Otrzymałam je wykorzystując metody Monte Carlo. Obliczenia wykonane są przy użyciu pakietu COINT w programie GAUSS wersja 3.2.14 dla systemu DOS oraz – w przeważającej części – w programie GAUSS wersja 3.2.52 dla Linuxa, ze względu na stabilność tego systemu operacyjnego.

Procedura FM(y,x,d,l), oprogramowana w GAUSSIE w pakiecie COINT, służy do obliczania estymatora FM (Fully Modified) Phillipsa-Hansena oraz statystyk testów Hansena dla regresji skointegrowanej, wykorzystuje metodę najmniejszych kwadratów dla regresji na pierwszym etapie obliczeń. Składnia polecenia jest następująca (por. Ouliaris i Phillips [1994]):

{beta, vc, stderr, sigma, tstats, rss, resid, tests} = fm(y,x,d,k),

gdzie argumentami wejściowymi są:
y – wektor kolumnowy obserwacji zmiennej objaśnianej,
x – macierz obserwacji zmiennych objaśniających,
d – określa część deterministyczną równania regresji,
k – określa liczbę składników autokowariancji wykorzystywanych do obliczania spektrum przy częstotliwości zero.
Wynikiem obliczeń są następujące wielkości:
beta – wektor kolumnowy zawierający oceny parametrów badanej relacji,
vc – macierz wariancji ocen parametrów,
stderr – wektor odchyleń standardowych ocen parametrów,
sigma – błąd standardowy reszt,
tstats – statystyki $t$ dla ocen parametrów,
rss – suma kwadratów reszt,
resid – wektor kolumnowy reszt,
stests – wektor kolumnowy wymiaru $3 \times 1$, którego kolejnymi elementami są wartości statystyk testów Hansena, służących testowaniu hipotezy zerowej,

oznaczającej, że wektor kointegrujący jest stabilny w badanym okresie. Kolejność testów jest następująca: Lc, Mean F i SupF. Metoda estymacji jest opracowana w pakiecie COINT według pracy Phillipsa i Hansena [1990], natomiast testy – według pracy Hansena [1991].

W celu wykorzystania metody estymacji i testów Hansena do badania stabilności relacji kointegrującej o zmiennych objaśniających I(2), typu modelu opisującego kursy walutowe, należało zbadać i opracować tablice wartości krytycznych testów Hansena przy następujących założeniach:

- w równaniu regresji występują dwie zmienne objaśniające;
- obie są zmiennymi zintegrowanymi stopnia 2;
- są skointegrowane do wartości I(1);
- natomiast zmienna objaśniana jest zintegrowana stopnia I(1).

Taką wersję modelu w dalszych rozważaniach nazywam wariantem 2, natomiast wariant 1 jest to model również jednorównaniowy z dwiema zmiennymi objaśniającymi zintegrowanymi stopnia 1. Oba stanowią relacje kointegrujące o stałych parametrach (czyli prawdziwa jest hipoteza zerowa o stałości parametrów modelu).

## Porównanie rozkładów testów dla zmiennych I(1) i dla zmiennych I(2)

Interesujące jest sprawdzenie, czy wartości krytyczne rozkładu statystyk testów Hansena są zbliżone, czy też znacznie się różnią w przypadku, gdy wszystkie zmienne objaśniające są zmiennymi I(1) i w przypadku, gdy dwie zmienne objaśniające są I(2) skointegrowane do I(1). Porównałam w tym celu wyznaczone na podstawie 100 000 replikacji empiryczne rozkłady wygenerowane przy tej samej wartości parametrów regresji (czyli takich samych współczynnikach przy X1 i X2) dla wariantów 1 i 2, a zatem dla modeli różniących się jedynie założeniami co do zintegrowania zmiennych objaśniających. Do sprawdzenia wniosku o zróżnicowaniu rozkładów wykorzystałam nieparametryczny test rang w wersji omówionej przez Pawłowskiego [1980, str. 240–243]. Wektory kolumnowe obliczonych wartości testów łączymy w macierz A, konstruujemy macierz rang R o tym samym wymiarze, przy czym rangi są równe 1 lub 2 w zależności od tego, czy pierwszy element macierzy A jest większy od drugiego, czy przeciwnie; dla jednakowych wartości elementów przyjmuje się rangę równą średniej arytmetycznej odpowiednich wartości.

W ogólnym przypadku rangi przyjmują wartości od 1 do r. Średnia elementów macierzy rang jest równa:

$$\bar{t} = \frac{(1+r)n}{2},$$

gdzie $r$ jest najwyższą rangą, zaś $n$ odpowiada liczebności próby. W naszym przypadku $r = 2$, $n = 100\,000$, zatem $\bar{t} = 150\,000$. Jako sprawdzian hipotezy zerowej przyjmuje się statystykę:

$$Q_T^2 = \sum_i \frac{(t_i - \bar{t})^2}{\bar{t}},$$

gdzie $t_i$ oznacza w tym przypadku sumę rang w kolumnie. Pawłowski [1980, str. 241] podaje, że przy dużych $n$ i gdy hipoteza zerowa o tym, że rozkłady są identyczne, jest prawdziwa, statystyka ta ma w przybliżeniu rozkład chi-kwadrat o $r - 1$ stopniach swobody.

Statystyka ta została obliczona dla każdego z testów Lc, MeanF i SupF, na podstawie wszystkich wartości wygenerowanych dla modelu ze zmiennymi I(1) oraz dla modelu ze zmiennymi I(2). Obliczenia powtórzono zarówno dla wartości pierwotnych, jak i dla posortowanych według wielkości. Dodatkowo zliczono liczbę dodatnich różnic pomiędzy wartościami testów otrzymanych dla tych dwu wariantów. Statystyki i współczynniki asymetrii i spłaszczenia dla testów Lc, MeanF i SupF przy pierwszym i drugim wariancie zintegrowania zmiennych objaśniających podane są w tabeli 1.

**Tabela 1**

Porównanie testów Hansena dla dwu wariantów zintegrowania zmiennych objaśniających

| Test i wariant | Lc, 1 | Lc, 2 | MeanF, 1 | MeanF, 2 | SupF, 1 | SupF, 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Średnie | 0,6037 | 4,7642 | 9,0420 | 0,2959 | 3,4237 | 9,4535 |
| Minima | 0,0830 | 0,6980 | 2,0120 | 0,0629 | 0,7138 | 2,2916 |
| Maksima | 2,5840 | 15,2134 | 155,9002 | 2,7575 | 23,4246 | 277,0623 |
| Odchylenie standardowe | 0,3144 | 1,8045 | 2,8953 | 0,1650 | 1,3925 | 4,1746 |
| Współczynnik asymetrii | 1,0735 | 1,9889 | 0,6088 | 1,4268 | 0,6088 | 1,4268 |
| Współczynnik spłaszczenia | 1,1811 | 6,4681 | 0,0590 | 4,1076 | 0,0590 | 4,1076 |

| Test | Wartość statystyki $Q^2$ | Liczba dodatnich różnic |
|---|---|---|
| Lc | 157638,9 | 83859 |
| MeanF | 153593,1 | 73222 |
| SupF | 149998,0 | 50000 |

Źródło: Obliczenia własne.

Otrzymane wyniki wskazują jednoznacznie na to, że hipotezę zerową (oznaczającą jednakowy rozkład niezależnie od stopnia zintegrowania zmiennych) należy odrzucić dla wszystkich trzech testów Hansena.Wniosek ten jest zgodny ze stwierdzeniem Hansena [1992], odnoszącym się wprawdzie do modeli, w których zmienne objaśniające były bądź I(1), bądź zmiennymi deterministycznymi. Hansen podkreśla, że rozkłady statystyk zależą od stopnia zintegrowania i od kowariancji zmiennych objaśniających.

## Tabele wartości krytycznych dla zmiennych objaśniających I(2)

Założenia przyjęte przy generowaniu podanych tabel wartości krytycznych są następujące:
- przyjęte wartości liczebności próby są równe {25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, 300, 325, 350, 375, 400, 425, 450, 475, 500};
- dla każdej z tych liczebności, przy założeniu stabilności parametrów modelu, zostało wygenerowane po 20 000 replikacji procesu generującego dane;
- dla każdej replikacji oszacowano model oraz obliczono wartości statystyk testów Hansena;
- na tej podstawie obliczono empiryczne percentyle rozkładów statystyk przedstawione w tabeli 2.

**Tabela 2**
Wartości krytyczne testów Lc, MeanF i SupF dla zmiennych I(2), na podstawie 20 000 replikacji

***Test Lc***

| L. obs. | 99% | 97,5% | 95% | 90% | 10% | 5% | 2,5% | 1% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 1,2416 | 1,0032 | 0,8309 | 0,6776 | 0,2050 | 0,1807 | 0,1621 | 0,1441 |
| 50 | 0,8714 | 0,7268 | 0,6137 | 0,5051 | 0,1441 | 0,1277 | 0,1159 | 0,1039 |
| 75 | 0,8572 | 0,7011 | 0,5902 | 0,4764 | 0,1250 | 0,1090 | 0,0978 | 0,08698 |
| 100 | 0,8233 | 0,6742 | 0,5695 | 0,4599 | 0,1168 | 0,1010 | 0,09001 | 0,07937 |
| 125 | 0,8671 | 0,7023 | 0,5826 | 0,4616 | 0,1108 | 0,0952 | 0,08361 | 0,07414 |
| 150 | 0,8445 | 0,6844 | 0,5726 | 0,4580 | 0,1082 | 0,09218 | 0,08113 | 0,07117 |
| 175 | 0,8473 | 0,6933 | 0,5644 | 0,4526 | 0,1067 | 0,09031 | 0,07895 | 0,06877 |
| 200 | 0,8356 | 0,6815 | 0,5679 | 0,4483 | 0,1052 | 0,08947 | 0,07872 | 0,06845 |
| 225 | 0,8348 | 0,6860 | 0,5703 | 0,4579 | 0,1047 | 0,08861 | 0,07678 | 0,06644 |

***Test Lc***

| L. obs. | 99% | 97,5% | 95% | 90% | 10% | 5% | 2,5% | 1% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 275 | 0,8468 | 0,6755 | 0,5605 | 0,4459 | 0,1026 | 0,08674 | 0,07583 | 0,06558 |
| 250 | 0,8515 | 0,6930 | 0,5665 | 0,4507 | 0,1037 | 0,08760 | 0,07675 | 0,06590 |
| 300 | 0,8460 | 0,6935 | 0,5720 | 0,4482 | 0,1014 | 0,08557 | 0,07425 | 0,06398 |
| 325 | 0,8414 | 0,6772 | 0,5577 | 0,4459 | 0,1007 | 0,08591 | 0,07398 | 0,06282 |
| 350 | 0,8630 | 0,6800 | 0,5566 | 0,4450 | 0,1011 | 0,08436 | 0,07345 | 0,06346 |
| 375 | 0,8596 | 0,6806 | 0,5657 | 0,4425 | 0,09916 | 0,08345 | 0,07194 | 0,06179 |
| 400 | 0,8399 | 0,6752 | 0,5495 | 0,4413 | 0,09936 | 0,08412 | 0,07296 | 0,06316 |
| 425 | 0,8506 | 0,6847 | 0,5602 | 0,4434 | 0,09913 | 0,08371 | 0,07183 | 0,06165 |
| 450 | 0,8399 | 0,6906 | 0,5595 | 0,4436 | 0,09934 | 0,08308 | 0,07058 | 0,06027 |
| 475 | 0,8542 | 0,6860 | 0,5651 | 0,4473 | 0,09862 | 0,08305 | 0,07212 | 0,06188 |
| 500 | 0,8327 | 0,6718 | 0,5558 | 0,4436 | 0,09800 | 0,08153 | 0,07034 | 0,05967 |

cd. tabeli 2

### *Test MeanF*

| L. obs. | 99% | 97,5% | 95% | 90% | 10% | 5% | 2,5% | 1% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 28,8366 | 17,0771 | 12,8377 | 9,7703 | 2,9106 | 2,5706 | 2,3052 | 2,0563 |
| 50 | 7,9097 | 6,8085 | 6,0259 | 5,0259 | 1,9682 | 1,7554 | 1,5785 | 1,3816 |
| 75 | 7,4140 | 6,3784 | 5,6235 | 4,8645 | 1,6791 | 1,4543 | 1,3013 | 1,1313 |
| 100 | 7,2748 | 6,2772 | 5,4978 | 4,7055 | 1,5518 | 1,3208 | 1,1763 | 1,0181 |
| 150 | 7,4452 | 6,3809 | 5,5397 | 4,6960 | 1,4306 | 1,2223 | 1,0750 | 0,9135 |
| 175 | 7,4950 | 6,3730 | 5,5994 | 4,7174 | 1,4141 | 1,1981 | 1,0476 | 0,8954 |
| 200 | 7,4586 | 6,3961 | 5,5776 | 4,7008 | 1,3962 | 1,1876 | 1,0318 | 0,8817 |
| 225 | 7,5736 | 6,4415 | 5,6089 | 4,7664 | 1,3763 | 1,1731 | 1,0106 | 0,8590 |
| 250 | 7,4936 | 6,4205 | 5,5582 | 4,6872 | 1,3688 | 1,1571 | 0,9969 | 0,8585 |
| 275 | 7,6474 | 6,4702 | 5,5671 | 4,6727 | 1,3625 | 1,1553 | 1,0064 | 0,8553 |
| 300 | 7,7001 | 6,5301 | 5,6297 | 4,6903 | 1,3315 | 1,1173 | 0,9592 | 0,8176 |
| 325 | 7,6190 | 6,4564 | 5,5737 | 4,7125 | 1,3375 | 1,1361 | 0,9777 | 0,8302 |
| 350 | 7,7820 | 6,5203 | 5,6130 | 4,7579 | 1,3215 | 1,1050 | 0,9553 | 0,8096 |
| 375 | 7,6684 | 6,4901 | 5,5783 | 4,6658 | 1,3163 | 1,1018 | 0,9604 | 0,8142 |
| 400 | 7,5855 | 6,5262 | 5,5985 | 4,7009 | 1,3212 | 1,1069 | 0,9557 | 0,8198 |
| 425 | 7,6518 | 6,5839 | 5,6839 | 4,7291 | 1,3111 | 1,1034 | 0,9535 | 0,8017 |
| 450 | 7,7317 | 6,5210 | 5,6449 | 4,6765 | 1,3226 | 1,1081 | 0,9499 | 0,8027 |
| 475 | 7,7648 | 6,6240 | 5,6839 | 4,7542 | 1,3174 | 1,1050 | 0,9512 | 0,8092 |
| 500 | 7,6462 | 6,4417 | 5,5720 | 4,6736 | 1,2860 | 1,0778 | 0,9328 | 0,7858 |

### *Test SupF*

| L. obs. | 99% | 97,5% | 95% | 90% | 10% | 5% | 2,5% | 1% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 257,2601 | 105,7813 | 59,6513 | 34,3281 | 7,1206 | 6,2576 | 5,6100 | 4,9485 |
| 50 | 22,2578 | 18,3481 | 15,7444 | 13,6039 | 5,8947 | 5,2943 | 4,8131 | 4,3315 |
| 75 | 16,6868 | 14,7788 | 13,3525 | 12,0141 | 5,4795 | 4,8758 | 4,3782 | 3,8685 |
| 100 | 15,6458 | 14,2601 | 12,9666 | 11,6702 | 5,2244 | 4,6426 | 4,2026 | 3,7417 |
| 150 | 15,7594 | 14,3406 | 13,1925 | 11,8229 | 5,1497 | 4,5510 | 4,0997 | 3,6359 |
| 175 | 16,4408 | 14,6162 | 13,2397 | 11,8731 | 5,1309 | 4,4999 | 4,0331 | 3,5482 |
| 200 | 16,1397 | 14,5891 | 13,3466 | 11,9194 | 5,1251 | 4,4773 | 4,0296 | 3,5507 |
| 225 | 16,5227 | 14,8858 | 13,5171 | 12,1025 | 5,0967 | 4,4950 | 4,0026 | 3,5381 |
| 250 | 16,6707 | 14,9057 | 13,5556 | 12,1127 | 5,0951 | 4,5189 | 4,0381 | 3,5579 |
| 275 | 16,5939 | 14,8997 | 13,5918 | 12,1269 | 5,0761 | 4,4953 | 4,0288 | 3,5367 |
| 300 | 16,7930 | 15,0340 | 13,6698 | 12,1992 | 5,0705 | 4,4453 | 3,9803 | 3,4351 |

cd. tabeli 2

| L. obs. | 99% | 97,5% | 95% | 90% | 10% | 5% | 2,5% | 1% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 325 | 17,0318 | 15,2575 | 13,7833 | 12,2435 | 5,0828 | 4,4783 | 4,0070 | 3,4968 |
| 350 | 17,2450 | 15,3597 | 13,8872 | 12,2620 | 5,0477 | 4,4512 | 3,9766 | 3,4625 |
| 375 | 17,1593 | 15,1172 | 13,7321 | 12,2097 | 5,0777 | 4,4603 | 3,9841 | 3,4598 |
| 400 | 17,0030 | 15,3130 | 13,9101 | 12,4088 | 5,0903 | 4,4384 | 3,9796 | 3,4899 |
| 425 | 17,3257 | 15,4488 | 14,0210 | 12,4322 | 5,0857 | 4,4847 | 3,9899 | 3,4928 |
| 450 | 17,4829 | 15,4346 | 13,9120 | 12,3753 | 5,0874 | 4,4580 | 3,9619 | 3,4627 |
| 475 | 17,4141 | 15,7087 | 14,2167 | 12,5632 | 5,1012 | 4,4753 | 4,0123 | 3,5505 |
| 500 | 17,3406 | 15,5068 | 14,0420 | 12,4431 | 5,0509 | 4,4490 | 3,9855 | 3,4918 |

Źródło: Obliczenia własne.

## Powierzchnie odpowiedzi

MacKinnon [1991], analizując własności testów integracji i kointegracji Dickeya-Fullera oraz Engle'a-Grangera, prócz wyznaczania wartości krytycznych metodą Monte Carlo stosuje następującą metodę wyznaczania powierzchni odpowiedzi. Dla każdego wariantu liczebności próby otrzymuje po 40 egzemplarzy wyników (tzn. powtarza obliczenia percentyli po 40 razy, generując za każdym razem odpowiednią liczbę replikacji). Uzyskuje w ten sposób zmienne odpowiadające liczebności próby oraz wektory wartości percentyli, oznaczone symbolem $C_k$ $(p)$. W celu wyznaczenia asymptotycznych wartości krytycznych testu szacuje regresję liniową zmiennej $C_k$ $(p)$ względem dwu zmiennych: $T_k^{-1}$ oraz $T_k^{-2}$, postaci:

$$C_k(p) = \alpha_0 + \alpha_1 T_k^{-1} + \alpha_2 T_k^{-2} + \varepsilon_k,$$

gdzie $T_k$ oznacza wektor kolumnowy, którego kolejne elementy odpowiadają liczebnościom próby w kolejnych powtórzeniach eksperymentu. Niech $a_0$, $a_1$ i $a_2$ oznaczają oceny odpowiednich parametrów (tutaj – otrzymane metodą najmniejszych kwadratów). Ocena wyrazu wolnego tej regresji, czyli $a_0$, stanowi przybliżenie asymptotycznej wartości krytycznej testu, jest bowiem równa granicy wyrażenia $a_0 + a_1T^{-1} + a_2T^{-1}$ przy $T \rightarrow \infty$. MacKinnon [1994], [1996] wprowadza w późniejszych pracach bardziej rozbudowane warianty analizy powierzchni odpowiedzi, jednakże, jak podkreśla, są one znacznie bardziej pracochłonne (obliczenia przeprowadzone przez MacKinnona na wielu komputerach łącznie zajęły około 2 lat).

Dla przedstawionych tu rozważań przyjęłam mniejszą liczbę powtórzeń eksperymentów i mniejszą – replikacji. Mianowicie każdy eksperyment dla liczebności zbioru obserwacji równej 25, 50, 75, 100, 125, 150, 200 i 300 został powtórzony po 20 razy. (Przypomnijmy, że eksperyment polegał na obliczaniu percentyli rozkładu badanego testu na podstawie 20 000 replikacji.) Otrzymane wyniki przedstawione są w tabeli 3. Pierwsza liczba, wyróżniona pogrubioną czcionką, stanowi ocenę wyrazu wolnego w równaniu regresji dla danej wartości krytycznej, jest zarazem oceną asymptotycznej wartości krytycznej danego testu. W nawiasach przy wszystkich ocenach parametrów podane są błędy ocen. Dopasowanie równań należy ocenić jako dobre, na co wskazują wartości współczynników determinacji.

**Tabela 3**
Powierzchnie odpowiedzi na podstawie eksperymentów powtórzonych po 20 razy, dla 20 000 replikacji, przy liczebnościach próby T = {25, 50, 75, 100, 125, 150, 200, 300}

| Percentyl | 99% | 95% | 90% |
|---|---|---|---|
| | | *Test Lc* | |
| Stała | **2,5661** (0,0571) | **1,3925** (0,0251) | **1,0654** (0,01607) |
| $a_1$ | –16,7448 (0,4809) | –8,4335 (0,2112) | –6,3837 (0,1353) |
| $a_2$ | 40,3917 (0,9833) | 21,4335 (0,4319) | 16,5721 (0,2766) |
| $R^2$ | 0,977 | 0,989 | 0,994 |
| | | *Test MeanF* | |
| Stała | **107,656** (3,6444) | **37,574** (1,002) | **24,718** (0,583) |
| $a_1$ | –958,925 (30,682) | –309,372 (8,438) | –195,498 (4,907) |
| $a_2$ | 2265,286 (62,736) | 739,325 (17,253) | 473,372 (10,033) |
| $R^2$ | 0,964 | 0,977 | 0,983 |
| | | *Test SupF* | |
| Stała | **1129,53** (42,35) | **219,18** (6,573) | **111,62** (2,82) |
| $a_1$ | –10690,53 (356,55) | –1981,53 (55,34) | –961,58 (23,73) |
| $a_2$ | 25350,67 (729,03) | 4712,19 (113,15) | 2292,18 (48,52) |
| $R^2$ | 0,963 | 0,974 | 0,980 |

Źródło: Obliczenia własne.

## Wygładzone wartości krytyczne na podstawie 100 000 replikacji

Dokładność wyników można poprawić dzięki zwiększeniu liczby replikacji. (Wartości krytyczne wyznaczone na podstawie 100 000 replikacji są podane w tabeli 5.) Można jednak dodatkowo zastosować wygładzanie empirycznych percentyli statystyk testów, wykorzystane przez Charemzę i Deadmana (1997), a uwzględniające oceny wariancji obliczonej przez nich według wzoru Davida-Johnsona (por. David i Johnson [1954]).

W przeciwieństwie do wzoru zastosowanego przez Charemzę i Deadmana, czyli specyfikacji z odwrotnościami logarytmów liczebności próby, podane tu wyniki obliczone są dla regresji, w której zmienne objaśniające to odwrotność liczebności próby oraz odwrotność jej kwadratu. Specyfikacja ta jest podobna do tej, jaką zastosowałam do obliczania asymptotycznych wartości krytycznych według metody MacKinnona. Wygładzone wartości krytyczne podane są w tabeli 4.

## Podsumowanie i wnioski

Przedstawione tu tabele wartości krytycznych dla testów Hansena stanowią narzędzie potrzebne do przeprowadzenia testów relacji kointegrującej o zmiennych objaśniających zintegrowanych I(2) i skointegrowanych do poziomu I(1), takiej jak na przykład przy badaniu parytetu siły nabywczej. Jednocześnie wyniki te są ilustracją kilku sposobów wyznaczania wartości krytycznych, w tym również asymptotycznych, metodami obliczeniowymi zapewniającymi dobrą dokładność, umożliwiającą wnioskowanie z należytą pewnością. Kontynuacja badań będzie polegała na opracowaniu obszerniejszych tablic wartości krytycznych oraz na ich praktycznym zastosowaniu do modelowania makroekonomicznego.

**Tabela 4**
Wygładzone wartości krytyczne dla testu Lc

| L. obs. | Lc, 99% dolna; górna | Lc, 97,5% dolna; górna | Lc, 95% dolna; górna | Lc, 90% dolna; górna | Lc,10%; dolna; górna | Lc, 5% dolna; górna |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 1,235; 1,322 | 0,987; 1,048 | 0,824; 0,862 | 0,672; 0,700 | 0,193; 0,215 | 0,165; 0,193 |
| 50 | 0,856; 0,944 | 0,711; 0,772 | 0,604; 0,642 | 0,496; 0,524 | 0,132; 0,154 | 0,111; 0,139 |
| 75 | 0,808; 0,896 | 0,669; 0,731 | 0,567; 0,605 | 0,462; 0,490 | 0,114; 0,137 | 0,094; 0,123 |
| 100 | 0,799; 0,886 | 0,658; 0,720 | 0,555; 0,593 | 0,449; 0,478 | 0,106; 0,128 | 0,087; 0,115 |
| 125 | 0,798; 0,885 | 0,655; 0,716 | 0,550; 0,588 | 0,443; 0,472 | 0,101; 0,123 | 0,082; 0,110 |
| 150 | 0,799; 0,887 | 0,653; 0,715 | 0,548; 0,586 | 0,440; 0,469 | 0,097; 0,120 | 0,079; 0,107 |
| 200 | 0,803; 0,890 | 0,653; 0,715 | 0,546; 0,584 | 0,437; 0,465 | 0,094; 0,116 | 0,075; 0,103 |
| 300 | 0,809; 0,897 | 0,655; 0,717 | 0,545; 0,583 | 0,434; 0,463 | 0,090; 0,112 | 0,071; 0,099 |
| 400 | 0,813; 0,901 | 0,656; 0,718 | 0,545; 0,583 | 0,433; 0,461 | 0,088; 0,111 | 0,069; 0,098 |
| 500 | 0,816; 0,904 | 0,657; 0,719 | 0,545; 0,583 | 0,432; 0,461 | 0,087; 0,109 | 0,068; 0,097 |
| 600 | 0,818; 0,905 | 0,658; 0,720 | 0,545; 0,583 | 0,432; 0,460 | 0,087; 0,109 | 0,068; 0,096 |

Źródło: Obliczenia własne.

**Tabela 5**
Wartości krytyczne obliczone na podstawie 100 000 replikacji

***Test Lc***

| L. obs. | 99% | 97,5% | 95% | 90% | 10% | 5% | 2,5% | 1% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 1,2813 | 1,0195 | 0,8443 | 0,6866 | 0,2044 | 0,1793 | 0,1611 | 0,1439 |
| 50 | 0,8840 | 0,7278 | 0,6187 | 0,5075 | 0,1433 | 0,1264 | 0,1147 | 0,1026 |
| 75 | 0,8651 | 0,7101 | 0,5893 | 0,4771 | 0,1251 | 0,1084 | 0,0973 | 0,0867 |
| 100 | 0,8471 | 0,6954 | 0,5775 | 0,4648 | 0,1171 | 0,1008 | 0,0896 | 0,0789 |
| 125 | 0,8448 | 0,6832 | 0,5675 | 0,4568 | 0,1120 | 0,0962 | 0,0849 | 0,0744 |
| 150 | 0,8482 | 0,6893 | 0,5699 | 0,4565 | 0,1091 | 0,0930 | 0,0818 | 0,0713 |
| 200 | 0,8653 | 0,6845 | 0,5654 | 0,4523 | 0,1056 | 0,0894 | 0,0784 | 0,0677 |
| 300 | 0,8511 | 0,6957 | 0,5626 | 0,4464 | 0,1015 | 0,0854 | 0,0741 | 0,0641 |
| 400 | 0,8507 | 0,6826 | 0,5614 | 0,4473 | 0,0995 | 0,08385 | 0,07278 | 0,0622 |
| 500 | 0,8539 | 0,6863 | 0,5634 | 0,4449 | 0,0986 | 0,08271 | 0,07161 | 0,06141 |
| 600 | 0,8543 | 0,6875 | 0,5652 | 0,4471 | 0,0982 | 0,08223 | 0,0718 | 0,06137 |

**cd. tabeli 5**

*Test MeanF*

| L. obs. | 99% | 97,5% | 95% | 90% | 10% | 5% | 2,5% | 1% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 28,8062 | 17,7096 | 13,0172 | 9,8124 | 2,9130 | 2,5703 | 2,3101 | 2,0528 |
| 50 | 7,9134 | 6,8359 | 6,0328 | 5,2380 | 1,9493 | 1,7215 | 1,5482 | 1,3721 |
| 75 | 7,3116 | 6,3715 | 5,6400 | 4,8527 | 1,6695 | 1,4535 | 1,2939 | 1,1277 |
| 100 | 7,3263 | 6,3443 | 5,5669 | 4,7681 | 1,5429 | 1,3276 | 1,1665 | 1,0126 |
| 125 | 7,3515 | 6,3458 | 5,5485 | 4,7043 | 1,4756 | 1,2670 | 1,1093 | 0,9547 |
| 150 | 7,4098 | 6,3804 | 5,5672 | 4,7154 | 1,4430 | 1,2325 | 1,0711 | 0,9232 |
| 200 | 7,5623 | 6,4429 | 5,6063 | 4,7295 | 1,3897 | 1,1787 | 1,0223 | 0,8789 |
| 300 | 7,5982 | 6,4591 | 5,5945 | 4,6932 | 1,3429 | 1,1299 | 0,9734 | 0,8299 |
| 400 | 7,6798 | 6,5179 | 5,6223 | 4,7233 | 1,3131 | 1,1064 | 0,9569 | 0,8152 |
| 500 | 7,7796 | 6,5900 | 5,6525 | 4,7297 | 1,3111 | 1,1030 | 0,9488 | 0,8022 |
| 600 | 7,8144 | 6,5931 | 5,6794 | 4,7496 | 1,2995 | 1,0923 | 0,9437 | 0,7960 |

*Test SupF*

| L. obs. | 99% | 97,5% | 95% | 90% | 10% | 5% | 2,5% | 1% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 264,669 | 109,521 | 59,051 | 34,391 | 7,108 | 6,262 | 5,628 | 4,986 |
| 50 | 22,932 | 18,356 | 15,700 | 13,491 | 5,878 | 5,271 | 4,787 | 4,272 |
| 75 | 16,514 | 14,693 | 13,312 | 11,945 | 5,426 | 4,850 | 4,374 | 3,878 |
| 100 | 15,818 | 14,244 | 13,016 | 11,727 | 5,243 | 4,645 | 4,173 | 3,704 |
| 125 | 15,866 | 14,278 | 13,027 | 11,707 | 5,140 | 4,542 | 4,100 | 3,631 |
| 150 | 15,914 | 14,423 | 13,196 | 11,868 | 5,153 | 4,555 | 4,095 | 3,607 |
| 200 | 16,320 | 14,697 | 13,370 | 11,953 | 5,080 | 4,475 | 3,998 | 3,534 |
| 300 | 16,698 | 15,059 | 13,663 | 12,155 | 5,057 | 4,454 | 3,983 | 3,498 |
| 400 | 17,226 | 15,360 | 13,887 | 12,360 | 5,063 | 4,445 | 3,973 | 3,504 |
| 500 | 17,623 | 15,736 | 14,155 | 12,506 | 5,109 | 4,487 | 4,014 | 3,520 |
| 600 | 17,665 | 15,759 | 14,155 | 12,575 | 5 117 | 4,493 | 4,027 | 3,530 |

Źródło: Obliczenia własne.

# Literatura

ANDREWS D.W.K. (1990), Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point, *Discussion Paper* 943, Yale University, Cowles Foundation for Research in Economics.

CHAREMZA W.W. i D.F. DEADMAN (1997), *New Directions in Econometric Practice, General to Specific Modelling, Cointegration and Vector Autoregression*, wyd. drugie, Edward Elgar, Cheltenham.

DAVID F.N. i N.L. JOHNSON (1954), Statistical treatment of censored data, part 1, fundamental formulae, *Biometrika* 41, str. 228–240.

DICKEY D.A. i W.A. FULLER (1979), Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of the American Statistical Association*, 84, str. 427–431.

ENGLE R.F. i C. W. J. GRANGER (1987), Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing, *Econometrica* 55, str. 251–276.

HALDRUP N. (1994), Semiparametric tests for double unit roots, *Journal of Business & Economic Statistics* 12(1), str. 109–122.

HANSEN B.E. (1991), *Tests for Parameter Instability in Regressions with I(1) Processes*, Working Paper, University of Rochester.

HANSEN B.E. (1992a), Efficient estimation and testing of cointegrating vectors in the presence of deterministic trends, *Journal of Econometrics*, 53, str. 87–121.

HANSEN B.E. (1992), Tests for Parameter Instability in Regressions with I(1) Processes, *Journal of Business & Economic Statistics*, 10(3), str. 321–335.

MACKINNON (1991), *Critical Values for Cointegration Tests*, rozdział 13 pracy: *Long-Run Economic Relationships, Readings in Cointegration*, red. R.F. Engle i C.W.J. Granger, Oxford University Press, Oxford 1991, str. 267–276.

MACKINNON J. (1994), Approximate asymptotic distribution functions for Unit-root and Cointegration tests, *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, str. 167–176.

MACKINNON J. (1996), Numerical distribution functions for unit root and cointegration tests, *Journal of Applied Econometrics*, 11(6), str. 601–618.

OULIARIS S. i P.C.B. PHILLIPS (1994), *COINT: GAUSS Procedures for Cointegrated Regressions*.

PAWŁOWSKI Z. (1980), *Statystyka matematyczna*, wyd. drugie, PWN, Warszawa.

PHILLIPS P.C.B. i B.E. HANSEN (1990), Statistical Inference in Instrumental Variables Regression with I(1) Processes, *Review of Economic Studies*, 57, 99–125.

SYCZEWSKA E.M. (1999), *Analiza relacji długookresowych: estymacja i weryfikacja*, nr 462 serii Monografie i Opracowania, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa.

# Hansen Tests as Cointegration Tests for I(2), I(1) Series

## Abstract

Hansen tests, used for testing stability of cointegration relation, can be applied to cointegration regression in which dependent variable is I(1) and both explanatory variables are I(2) cointegrated to I(1). This kind of model describes e.g. real exchange rates. As a result of Monte Carlo experiment properties of test statistics are compared and tables of critical values are presented.