Aleksander Busłowski
Katedra Metod Ilościowych i Informatyki WSE w Białymstoku

Współczynniki techniczne a stabilność rozwiązania optymalnego zadania programowania liniowego

Wprowadzenie

Brak prostych reguł (wzorów) rządzących zmianami wartości współczynników technicznych znajdujących się przy bazowych zmiennych decyzyjnych w warunkach napiętych przy decyzji optymalnej stanowi istotną przeszkodę w kompleksowej analizie zmian wartości parametrów wejściowych zadania programowania liniowego. Daje się to szczególnie zauważyć w podręcznikach do ekonometrii (badań operacyjnych), gdzie pomijana jest analiza zmian wartości współczynników technicznych [11, s. 278–293; 12; 13, s. 190–194]. Również programy komputerowe służące rozwiązywaniu zagadnień programowania liniowego nie oferują opcji analizy zmienności współczynników technicznych. Natomiast praktyka konstruowania modeli programowania liniowego wskazuje, że często faktyczne wartości współczynników funkcji celu i wyrazów wolnych są włączane do grupy współczynników przy zmiennych w warunkach ograniczających. Dodać również należy, iż współczynniki techniczne stanowią najliczniejszą grupę parametrów wejściowych każdego zadania programowania liniowego.

Dotychczas nie stawiano pytań, czy istnieje praktyczny sens badania zmian wartości wszystkich współczynników przy zmiennych w warunkach ograniczających[1]. Wiele przesłanek wskazuje na to, że istnieją parametry, których wartości – niezależnie od zmian w sytuacji decyzyjnej – są zawsze stałe (niezmienne).

Przedstawiane w literaturze pojęcie stabilności rozwiązania optymalnego [9, s. 169; 14, s. 225] wydaje się także zbyt ogólnikowe. W tej kwestii również zaproponowano pewne uściślenia i uszczegółowienia.

---

[1]Dotyczy to także pozostałych parametrów zadania programowania liniowego.

Celem niniejszego opracowania jest rekonstrukcja koncepcji analizy stabilności rozwiązania optymalnego w odniesieniu do reguł zmian wartości współczynników technicznych przy bazowych zmiennych decyzyjnych w warunkach napiętych przy decyzji optymalnej. W opracowaniu postawiono hipotezę, iż nieliniowe formuły zmienności tych współczynników można wyprowadzić z liniowych reguł zmian wartości współczynników funkcji celu i wyrazów wolnych. Sformułowanie tej hipotezy oparto na ścisłych związkach współczynników technicznych z wyrazami wolnymi i współczynnikami funkcji celu w każdym modelu programowania liniowego oraz na wynikających stąd analogicznych skutkach zmian wartości tych parametrów wejściowych dla uzyskanego rozwiązania optymalnego. Weryfikacja powyższej hipotezy wymagała dostosowania metodyki analizy dobrze opracowanych formuł zmienności współczynników funkcji celu i wyrazów wolnych w celu ich wykorzystania w analizie zmian wartości współczynników technicznych przy bazowych zmiennych decyzyjnych.

Pojęcie współczynnika przy zmiennej w warunku ograniczającym

W literaturze ekonomiczno-rolniczej spotyka się mnogość określeń i definicji pojęcia współczynnika [4, s. 382–383 i 853; 5, s. 24; 10, s. 112; 12, s. 24––25; 20, s. 236]. Wynika to z jego usytuowania w modelu, a w szczególności z charakteru warunku ograniczającego, w którym on występuje. Większość definicji współczynnika podkreśla jednostkowe zużycie (normy) środków ograniczających przez poszczególne działalności.

Jednakże nawet pobieżna analiza większości modeli wejściowych programowania liniowego wskazuje, że znajduje się tam wiele współczynników, które nie mają nic wspólnego ze zużyciem, z produkcją czy proporcjami. Przedstawiają one natomiast pewne zależności logiczne w modelu i przyjmują tylko trzy wartości: –1, 0 i +1. Nie należy wykluczać, że zużycie jakiegoś środka może przyjąć którąś z tych wartości, jednakże analiza modelu zawsze da nam odpowiedź, czy jest to zależność techniczna, czy logiczna. Przykładowo: jeżeli współczynnik +1 znajduje się przy zmiennej decyzyjnej „liczba krów" i w warunku ograniczającym „bilans pasz treściwych", to będzie współczynnikiem technicznym[2]. Ale jeśli w tym samym warunku ograniczającym, przy zmiennej decyzyjnej „ilość mieszanki KBW z zakupu" znajdzie się współczynnik –1, to

[2]Jego wartość jest potencjalnie zmienna w zależności od stosowanej technologii żywienia krów.

będzie on współczynnikiem logicznym, ponieważ niezależnie od zapotrzebowania na mieszankę KBW, ta wartość parametru (–1) będzie zawsze je równoważyć. Należy przy tym dodać, że występujące w modelu wejściowym – w sposób jawny lub też w postaci ukrytej – zmienne swobodne i sztuczne mają współczynniki wyłącznie logiczne.

Pewne wątpliwości mogą się pojawić w przypadku zera. Czy należy to odczytywać jako zerowy nakład (zużycie) – zależność techniczna, czy też jako brak nakładu (zużycia) – zależność logiczna? Mimo tożsamości zapisu w modelu obu określeń – należy opowiedzieć się za drugim, ze względu na częstość występowania.

Celem uniknięcia wymienionych wątpliwości należałoby w przypadku współczynników o charakterze zależności technicznej używać wartości nieznacznie różniących się od 0 i ±1. Nie zmieniłoby to późniejszych wyników, a dawałoby – bez wnikania w opis warunków ograniczających – jednoznaczną i wizualną charakterystykę zależności. I chyba najistotniejszy aspekt sprawy – współczynniki te byłyby rozróżnialne przez komputer.

Reasumując – współczynniki przy zmiennych w warunkach ograniczających należałoby podzielić na dwie grupy:

a) techniczne, tzn. zmienne w sensie ilościowym;
b) logiczne, tzn. niezmienne (stałe), które przyjmują tylko wartości 0 i ±1.

Podział ten wynika stąd, iż analiza stabilności powinna dotyczyć jedynie współczynników zaliczonych do grupy a), ponieważ znajdujące się w tych miejscach modelu parametry wejściowe – w zależności od sytuacji decyzyjnej – mogą przyjmować różne wartości, czego nie można powiedzieć o współczynnikach zaliczonych do grupy b). Należy również stwierdzić, że z rachunkowego punktu widzenia można badać także zmienność współczynników z grupy b), czyli pełną ich zbiorowość, jednakże nie miałoby to żadnego znaczenia praktycznego. Wynika to stąd, że ta grupa parametrów ze swej istoty jest niezmienna i przedstawia uwarunkowania wewnętrzne modelu, nie zaś zależności zmienne w sensie ilościowym.

Pojęcie stabilności

Przedmiotem analizy stabilności rozwiązania optymalnego zadania programowania liniowego jest badanie wpływu zmian wartości parametrów wejściowych zadania na uzyskane bazowe rozwiązanie optymalne. Analiza stabilności jest częścią tzw. analizy pooptymalizacyjnej (postoptymalizacyjnej) [1, s. 332; 14, s. 225; 16, s. 222; 17; 18].

Stabilność rozwiązania jest warunkiem dostatecznym jego optymalności. Oznacza to, iż zmiany wartości parametrów zadania nie mogą naruszyć stanu optymalności. Naruszenie stabilności rozwiązania jest jednoznaczne z utratą jego optymalności. Przywracanie naruszonej stabilności może być również przedmiotem analizy pooptymalizacyjnej, o ile do tego nie wykorzystuje się dodatkowego postępowania iteracyjnego algorytmem simpleksowym.

Z warunków stabilności wynika, że analizie tej nie podlega kształtowanie się wartości funkcji celu, ponieważ jest ona kategorią wyłącznie wynikową, a poziom jej wartości musi być zawsze optymalny (warunek konieczny). Natomiast warunki dodatkowe (wahania wartości zmiennych bazowych) dają możliwość ustalenia kilku rodzajów (poziomów) stabilności. Proponuje się następujące:

1) stabilność wartości zmiennych;
2) stabilność wartości zmiennych decyzyjnych;
3) stabilność bazy (struktury zmiennych bazowych, zmiennych niebazowych).

W pierwszym przypadku zmiany wartości parametrów wejściowych nie mogą mieć wpływu na wartości zmiennych bazowych. Dotyczy to wszystkich zmiennych, które mogą stanowić skład bazy rozwiązania optymalnego, a więc zmiennych decyzyjnych i swobodnych.

Drugi przypadek ogranicza niezmienność wartości wyłącznie do zmiennych decyzyjnych. Jak wiadomo, są one zasadniczymi elementami rozwiązania. Oznacza to, że zmienne, które są związane z warunkami luźnymi przy decyzji optymalnej, czyli bazowe zmienne swobodne, mogą zmieniać swoje wartości, a wystarcza jedynie fakt ich obecności w bazie rozwiązania.

Trzeci rodzaj stabilności zachowuje jedynie wartości zmiennych niebazowych, które w bazowym rozwiązaniu optymalnym są zawsze równe zeru. Natomiast zmienne bazowe mogą przyjmować dowolne wartości nieujemne.

Oceniając poszczególne przypadki stabilności rozwiązania, należy stwierdzić, że najbardziej pożądanym jest przypadek 1). Sytuacja 2) gwarantuje również dotrzymanie najistotniejszych wartości rozwiązania, tj. zmiennych decyzyjnych, więc z praktycznego punktu widzenia niewiele różni się od sytuacji 1). Przypadek 3) – ze względu na możliwości zmiany wartości wszystkich zmiennych bazowych – może mieć znaczną przydatność praktyczną w dostosowywaniu rozwiązania problemu decyzyjnego do wymogów rzeczywistości.

Z powyższego wynika, że rodzaje stabilności rozwiązania optymalnego mają układ hierarchiczny. Mimo tego, przekroczenie zakresu możliwej zmiany wartości parametru wejściowego nie da możliwości przejścia na niższy poziom stabilności, lecz zawsze pociągnie za sobą zmiany w strukturze bazy. Oznacza to, iż w bazie rozwiązania pojawi się co najmniej jedna nowa zmienna[3]. Oznacza to również, że określony parametr wejściowy – zależnie od jego usytuowania względem rozwiązania optymalnego – może być związany tylko z jednym poziomem stabilności i może mieć tylko jeden zakres możliwych zmian wartości.

Miarą stabilności rozwiązania są zmiany wartości parametrów wejściowych, które zachowują przedstawione wcześniej warunki, tj. optymalność rozwiązania pierwotnego i odpowiedni (zawsze określony) rodzaj stabilności. Zmiany wartości parametrów określa się za pomocą długości zakresów i/lub granic zmienności. Długość zakresu zmienności określa, o ile może się zmniejszyć (długość dolnego zakresu) lub zwiększyć (długość górnego zakresu) przyjęta w zadaniu wartość parametru, aby stabilność rozwiązania była jeszcze zachowana. Wynika z tego, że długości zakresów zmienności nie mogą przyjmować wartości ujemnych. Granica zmienności określa, do jakiej wartości można zmniejszyć (granica dolna) lub zwiększyć (granica górna) dany parametr, aby stabilność rozwiązania była jeszcze zachowana. Możliwe jest również posługiwanie się pojęciem przedziału zmienności, określonym jako zbiór wartości nie mniejszych od granicy dolnej i jednocześnie nie większych od granicy górnej.

W ogólnym zapisie algebraicznym miary stabilności rozwiązania optymalnego można przedstawić w sposób następujący:

(1) $$GDp = p - ZDp,$$

(2) $$GGp = p + ZGp,$$

(3) $$PZp \in \langle GDp; GGp \rangle,$$

gdzie:
p – wartość parametru wejściowego;
GDp – dolna granica zmienności parametru wejściowego;
GGp – górna granica zmienności parametru wejściowego;
ZDp – długość dolnego zakresu zmian wartości parametru wejściowego;
ZGp – długość górnego zakresu zmian wartości parametru wejściowego;
PZp – przedział zmienności parametru wejściowego.

Cechą charakterystyczną ustalania miar stabilności jest to, że zakresy zmian wartości parametrów wejściowych są możliwe do obliczenia bez dodatkowego postępowania optymalizacyjnego opartego na algorytmie simpleksowym, a jedynie na podstawie analizy numerycznej pewnych fragmentów tablicy simpleksowej rozwiązania optymalnego.

---

[3]Niekiedy może to również doprowadzić do sprzeczności zadania.

Przyczyny trudności w analizie

Spośród trzech rodzajów parametrów występujących w wejściowym modelu programowania liniowego, tj. współczynników funkcji celu, wyrazów wolnych i współczynników technicznych, te ostatnie mają najskromniejszą literaturę dotyczącą ich zmienności. W literaturze poświęconej zastosowaniom analizy stabilności spotkać można jedynie próbę analizy współczynników technicznych przy niebazowych zmiennych decyzyjnych w ograniczeniach związanych z niebazowymi zmiennymi uzupełniającymi[4] (warunek napięty przy decyzji optymalnej) [6, s. 47–49]. Także literatura programowania liniowego wskazuje na trudności związane z analizą zmienności współczynników technicznych, a w szczególności znajdujących się przy bazowych zmiennych decyzyjnych w warunkach napiętych przy decyzji optymalnej. Trudności te wynikają stąd, że zmiana wartości jednego współczynnika technicznego może spowodować zmiany wartości wszystkich elementów tablicy simpleksowej rozwiązania optymalnego. Dodatkowym utrudnieniem analizy jest to, że skutki zmian wartości współczynników technicznych – w odróżnieniu od pozostałych parametrów – mają charakter nieliniowy [14, s. 260].

W literaturze programowania liniowego z lat 60. i 70. współczynniki techniczne przy bazowych zmiennych decyzyjnych w warunkach napiętych przy decyzji optymalnej były pomijane w analizie stabilności [3, s. 76; 15, s. 56]. W latach późniejszych spotkać się można z analizą zmian wartości więcej niż jednego współczynnika technicznego (kolumny lub wiersza) [14, s. 260–268; 19, s. 113–119], chociaż nie podaje się tam reguł dotyczących zmienności pojedynczego współczynnika technicznego, w odróżnieniu od pozostałych parametrów, czyli współczynników funkcji celu i wyrazów wolnych [14, s. 240; 19, s. 104-112]. Podobnie została potraktowana ta kwestia w monografii dotyczącej analizy pooptymalizacyjnej [7, s. 79 i 176 w porównaniu ze s. 258–272]. Ukazało się również opracowanie [8, s. 136–139], gdzie przedstawiono teoretyczne reguły zmian wartości współczynników technicznych dla zadań z minimalizowaną funkcją celu. Uzyskane wzory były na tyle skomplikowane (trójczłonowa formuła dla współczynników technicznych przy bazowych zmiennych decyzyjnych), że nie zilustrowano ich przykładem, który wykorzystano przy analizie zmian wartości współczynników funkcji celu i wyrazów wolnych [8, s. 134–135].

[4]Niebazowa zmienna uzupełniająca (dodatkowa) jest zawsze związana z warunkiem ograniczającym i służy do przekształcenia klasycznej lub mieszanej postaci zadania wejściowego do postaci standardowej. Zmienną uzupełniającą może być zmienna: swobodna niedoboru (znak relacji „≤"), swobodna nadmiaru (znak relacji „≥") lub sztuczna (znak relacji „=").

Założenia proponowanej metody analizy

Nie opracowano dotychczas prostych reguł rządzących zmianami wartości współczynników technicznych usytuowanych w zadaniu wejściowym przy bazowej zmiennej decyzyjnej w warunku napiętym przy decyzji optymalnej[5]. Modyfikacja wartości takiego współczynnika technicznego może spowodować zmiany wartości wszystkich danych znajdujących się w tablicy simpleksowej rozwiązania optymalnego[6]. Mimo iż znana jest w literaturze formuła Bodewiga dotycząca skutków zmian w macierzy odwrotnej bazy spowodowanych określoną zmianą elementów jednej linii (wiersza lub kolumny) w macierzy odwracanej [7, s. 257 i dalsze] oraz trójczłonowa formuła zmian wartości współczynnika technicznego dla zadań z minimalizowaną funkcją celu [8, s. 136–139], to jednak nie wyprowadzono dotychczas podobnie prostych formuł – umożliwiających na wzór pozostałych parametrów zadania wejściowego – określania długości zakresów/granic zmienności pojedynczych tego rodzaju współczynników technicznych.

Konfrontacja powyższych uwag z zakresem stabilności rozwiązania optymalnego prowadzi do wniosku, iż w przypadku współczynników technicznych znajdujących się w tablicy wejściowej przy bazowej zmiennej decyzyjnej w warunku napiętym przy decyzji optymalnej można mówić jedynie o najniższym poziomie stabilności, tj. stabilności bazy. Znaczy to, iż będzie należało poszukiwać takich zmian wartości współczynników technicznych, które nie naruszą zestawu zmiennych bazowych, natomiast mogą powodować zmiany ich wartości (nawet wszystkich zmiennych bazowych).

Z właściwości tablicy simpleksowej rozwiązania optymalnego [2, s. 40–41] wynika, iż zmiana wartości współczynnika technicznego wcale nie musi powodować utraty stabilności rozwiązania optymalnego, dla której na najniższym poziomie (stabilność bazy) wystarczy, aby żadna z wartości zmiennych bazowych, jak również żadna z wartości cen dualnych niebazowych zmiennych decyzyjnych/swobodnych nie zmieniła znaku. Ze względu na nieliniowe zmia-

[5]Oznacza to wykorzystanie ograniczenia przez decyzję optymalną na poziomie wartości wyrazu wolnego w tablicy wejściowej, a jednocześnie takie ograniczenie jest związane z którąś z niebazowych zmiennych uzupełniających (swobodną niedoboru, swobodną nadmiaru lub sztuczną).

[6]Jeżeli ulega zmianie wartość współczynnika technicznego (element macierzy odwracanej), wówczas może to spowodować w krańcowym przypadku zmianę (nieliniową) wartości wszystkich elementów (współczynników substytucji) macierzy odwrotnej bazy. Z kolei ta macierz jest źródłem zmian wartości w pozostałych elementach tablicy simpleksowej rozwiązania optymalnego.

ny wartości współczynników substytucji nie jest natomiast wiadome, gdzie najwcześniej nastąpi owa zmiana znaku (czy w kolumnie – cena dualna, czy w wierszu – zmienna bazowa).

W warunkach napiętych przy decyzji optymalnej (brak bazowych zmiennych swobodnych) istnieją zakresy możliwych zmian wartości wyrazów wolnych, które – podobnie jak w przypadku niniejszej analizy – powodują zmiany w wartościach zmiennych bazowych. Dlatego też patrząc przez pryzmat zmian wartości wyrazu wolnego w warunku napiętym przy decyzji optymalnej związanego z analizowanym współczynnikiem technicznym, należałoby się zastanowić, czy zmniejszanie/zwiększanie wartości wyrazu wolnego w ramach dozwolonego zakresu wpływa na wzrost/spadek wartości bazowej zmiennej decyzyjnej związanej z analizowanym współczynnikiem technicznym (poprzez analizę znaku wartości współczynnika substytucji umiejscowionego w wierszu bazowej zmiennej decyzyjnej i kolumnie niebazowej zmiennej uzupełniającej w tablicy simpleksowej rozwiązania optymalnego[7] i znaku relacji warunku ograniczającego, w którym znajduje się dany współczynnik techniczny, co jest tożsame z rodzajem niebazowej zmiennej uzupełniającej – swobodna niedoboru, swobodna nadmiaru, sztuczna). Przyczyną wzrostu/spadku wartości bazowej zmiennej decyzyjnej była oczywiście zmiana wartości wyrazu wolnego. Można stąd – przez analogię – domniemywać, że zamiast relacji:

zmiana wartości wyrazu wolnego & stała wartość współczynnika technicznego $\Rightarrow$ zmiana wartości bazowej zmiennej decyzyjnej,

będzie zachodziła również relacja:

zmiana wartości współczynnika technicznego & stała wartość wyrazu wolnego $\Rightarrow$ zmiana wartości bazowej zmiennej decyzyjnej.

W obu relacjach pozostaje niezmiennym zapisem „zmiana wartości bazowej zmiennej decyzyjnej". Stałość lub zmienność wartości współczynnika technicznego jest przyczyną stałości/zmienności wartości odpowiedniego współczynnika substytucji. Aby uzyskać rozmiar zmiany wartości współczynnika technicznego, należy poszukać wielkości, która mogłaby być wspólna dla

---

[7]Zmniejszanie wartości wyrazu wolnego będzie wpływało na wartość bazowej zmiennej decyzyjnej zgodnie z poniższym schematem (w – wzrost, s – spadek):

Znak relacji	Znak współczynnika substytucji	
	+	-
$\leq$/=	s	w
$\geq$	w	s

Natomiast zwiększanie wartości wyrazu wolnego będzie powodowało skutki przeciwne.

obu relacji, a jednocześnie byłaby wielkością znaną. Jedyną z nich jest długość zakresu zmienności wyrazu wolnego, z tym że zależność jest tu następująca:

zmiana wartości bazowej zmiennej decyzyjnej & stała wartość współczynnika substytucji $\Rightarrow$ długość zakresu zmienności wyrazu wolnego.

Na podstawie tej relacji można ustalić graniczne (minimalny lub maksymalny) poziomy wartości bazowej zmiennej decyzyjnej. Po tym ustaleniu można powrócić do wcześniejszej relacji:

zmiana wartości współczynnika technicznego & stała wartość wyrazu wolnego $\Rightarrow$ zmiana wartości bazowej zmiennej decyzyjnej,

i określić wartość zmiany współczynnika technicznego poprzez ustaloną wcześniej długość zakresu zmienności wyrazu wolnego. Następuje tutaj „przeniesienie" zmiany wartości wyrazu wolnego na zmianę wartości współczynnika technicznego przy tożsamych skutkach dla wartości zmiennych bazowych. Pamiętać przy tym należy, iż alternatywą do zwiększania wartości wyrazu wolnego jest zmniejszanie wartości współczynnika technicznego i na odwrót.

Wszystko to – co stwierdzono wyżej – będzie uzasadnione, jeśli w wyniku tych zmian (przede wszystkim wartości współczynników substytucji) któraś z wartości cen dualnych niebazowych zmiennych decyzyjnych/swobodnych nie zmieni znaku na przeciwny, czego przecież wykluczyć nie sposób. Dlatego też należałoby równocześnie analizować analogiczne relacje (oparte na tym samym współczynniku substytucji) dla zadania dualnego, co jest równoważne analizie długości zakresu zmienności współczynnika funkcji celu i wartości ceny dualnej niebazowej zmiennej uzupełniającej w zadaniu prymalnym. Znając relacje między wartościami cen dualnych (wskaźnikami optymalności) a wartościami zmiennych bazowych zadania prymalnego i dualnego można wyciągnąć wniosek, że jednocześnie trzeba badać w zadaniu prymalnym długość zakresu zmienności wyrazu wolnego i długość zakresu zmienności współczynnika funkcji celu oraz odpowiadającą im wartość bazowej zmiennej decyzyjnej i wartość ceny dualnej niebazowej zmiennej uzupełniającej. Mniejszy moduł z tych dwóch relacji wyznaczy długość zakresu zmienności analizowanego współczynnika technicznego.

Wyniki

Dolną granicę zmienności współczynnika technicznego znajdującego się przy bazowej zmiennej decyzyjnej „k" ($k = 1, 2, ..., n$) w warunku ograniczającym „w" ($w = 1, 2, ..., m$) – zgodnie ze wzorem (1) – oblicza się jako

(4) $$GDa_{wk} = a_{wk} - ZDa_{wk},$$

gdzie:
a_{wk} – wartość współczynnika technicznego w warunku ograniczającym „w" przy zmiennej decyzyjnej „k";
ZDa_{wk} – długość dolnego zakresu zmian wartości współczynnika technicznego przy zmiennej decyzyjnej „k" w warunku ograniczającym „w".

Górną granicę zmienności współczynnika technicznego znajdującego się przy bazowej zmiennej decyzyjnej „k" (k = 1, 2, ..., n) w warunku ograniczającym „w" (w = 1, 2, ..., m) – zgodnie ze wzorem (2) – oblicza się jako

(5) $$GGa_{wk} = a_{wk} + ZGa_{wk},$$

gdzie:
ZGa_{wk} – długość górnego zakresu zmian wartości współczynnika technicznego przy zmiennej decyzyjnej „k" w warunku ograniczającym „w".

Długość dolnego zakresu zmian wartości współczynnika technicznego przy bazowej zmiennej decyzyjnej w warunku napiętym przy decyzji optymalnej oblicza się ze wzorów:

1) gdy warunek jest o g r a n i c z o n y z g ó r y lub s z t y w n y

(6) $$ZDa_{wk} = min\left[\left(\frac{x_k}{ZGb_w} + r_{hv}\right)^{-1}; \left(\frac{|p_w|}{ZGc_k} + r_{hv}\right)^{-1}\right],$$

gdzie:
x_k – wartość zmiennej decyzyjnej „k";
h – numer wiersza w tablicy simpleksowej rozwiązania optymalnego, w którym znajduje się bazowa zmienna decyzyjna „k";
v – numer kolumny w tablicy simpleksowej rozwiązania optymalnego, w której znajduje się niebazowa zmienna uzupełniająca związana z warunkiem ograniczającym „w";
r_{hv} – wartość współczynnika substytucji znajdującego się na przecięciu wiersza „h" i kolumny „v" w tablicy simpleksowej rozwiązania optymalnego;
p_w – wartość ceny dualnej niebazowej zmiennej uzupełniającej związanej z warunkiem ograniczającym „w";
ZGb_w – długość górnego zakresu zmian wartości wyrazu wolnego w warunku ograniczającym „w"

$$ZGb_w = \begin{cases} min\left(\dfrac{-x_i}{r_{iv}}\right) : r_{iv} < 0, & dla\ i = 1, 2, ..., m, \\ \infty,\ gdy\ nie\ ma\ r_{iv} < 0, & dla\ i = 1, 2, ..., m; \end{cases}$$

ZGc_k – długość górnego zakresu zmian wartości współczynnika funkcji celu przy zmiennej decyzyjnej „k"

a) maksymalizacja funkcji celu

$$ZGc_k = \begin{cases} min\left|\dfrac{p_j}{r_{hj}}\right| : r_{hj} < 0, & dla\ j = 1, 2, ..., n - s, \\ \infty,\ gdy\ nie\ ma\ r_{hj} < 0, & dla\ j = 1, 2, ..., n - s; \end{cases}$$

b) minimalizacja funkcji celu

$$ZGc_k = \begin{cases} min\left|\dfrac{p_j}{r_{hj}}\right| : r_{hj} > 0, & dla\ j = 1, 2, ..., n - s, \\ \infty,\ gdy\ nie\ ma\ r_{hj} > 0, & dla\ j = 1, 2, ..., n - s; \end{cases}$$

s – liczba warunków sztywnych (znak relacji „=");

2) gdy warunek jest ograniczony z dołu

(7)
$$ZDa_{wk} = min\left[\left(\frac{x_k}{ZGb_w} - r_{hv}\right)^{-1};\ \left(\frac{|p_w|}{ZGc_k} - r_{hv}\right)^{-1}\right],$$

gdzie:

$$ZGb_w = \begin{cases} min\left(\dfrac{x_i}{r_{iv}}\right) : r_{iv} > 0, & dla\ i = 1, 2, ..., m, \\ \infty,\ gdy\ nie\ ma\ r_{iv} > 0, & dla\ i = 1, 2, ..., m. \end{cases}$$

Długość górnego zakresu zmian wartości współczynnika technicznego przy bazowej zmiennej decyzyjnej w warunku napiętym przy decyzji optymalnej oblicza się ze wzorów:

1) gdy warunek jest o g r a n i c z o n y z g ó r y lub s z t y w n y

$$ZGa_{wk} = min\left[\left(\frac{x_k}{ZDb_w} - r_{hv}\right)^{-1};\ \left(\frac{|p_w|}{ZDc_k} - r_{hv}\right)^{-1}\right], \tag{8}$$

gdzie:
ZDb_w – długość dolnego zakresu zmian wartości wyrazu wolnego w warunku ograniczającym „w"

$$ZDb_w = \begin{cases} min\left(\dfrac{x_i}{r_{iv}}\right) : r_{iv} > 0, \quad dla\ \ i = 1, 2, ..., m, \\ \infty,\ gdy\ nie\ ma\ \ r_{iv} > 0, \quad dla\ \ i = 1, 2, ..., m; \end{cases}$$

ZDc_k – długość dolnego zakresu zmian wartości współczynnika funkcji celu przy zmiennej decyzyjnej „k"

a) m a k s y m a l i z a c j a f u n k c j i c e l u

$$ZDc_k = \begin{cases} min\left|\dfrac{p_j}{r_{hj}}\right| : r_{hj} > 0, \quad dla\ \ j = 1, 2, ..., n - s, \\ \infty,\ gdy\ nie\ ma\ r_{hj} > 0, \quad dla\ \ j = 1, 2, ..., n - s; \end{cases}$$

b) m i n i m a l i z a c j a f u n k c j i c e l u

$$ZDc_k = \begin{cases} min\left|\dfrac{p_j}{r_{hj}}\right| : r_{hj} < 0, \quad dla\ \ j = 1, 2, ..., n - s, \\ \infty,\ gdy\ nie\ ma\ r_{hj} < 0, \quad dla\ \ j = 1, 2, ..., n - s; \end{cases}$$

2) gdy warunek jest ograniczony z dołu

$$ZGa_{wk} = min\left[\left(\frac{x_k}{ZDb_w} + r_{hv}\right)^{-1}; \left(\frac{|p_w|}{ZDc_k} + r_{hv}\right)^{-1}\right], \tag{9}$$

gdzie:

$$ZDb_w = \begin{cases} min\left(\frac{-x_i}{r_{iv}}\right) : r_{iv} < 0, & dla\ i = 1, 2, ..., m, \\ \infty,\ gdy\ nie\ ma\ r_{iv} < 0, & dla\ i = 1, 2, ..., m. \end{cases}$$

Jeśli dzielnikiem w którejś z podstaw potęgowania wzorów (6)–(9) jest nieskończoność (∞), to przyjmuje się, iż wynikiem danego ilorazu jest zero (0), a jeśli któraś z podstaw potęgowania nie jest dodatnia, to przyjmuje się, iż wynikiem danego potęgowania jest nieskończoność (∞).

Literatura

1. BUGA J., Wybrane problemy zastosowań metod programowania matematycznego, [w:] W. Sadowski (red.), *Elementy ekonometrii i programowania matematycznego*, PWN, Warszawa 1980.
2. BUSŁOWSKI A., *Stabilność rozwiązania optymalnego zadania programowania liniowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 2000.
3. CYBURA A., JUCHNOWSKI M., Problemy parametryzacji współczynników funkcji celu w optymalizacyjnych rolniczych modelach liniowych, *Zagadnienia Ekonomiki Rolnej*, 1979, nr 4.
4. *Encyklopedia ekonomiczno-rolnicza*, PWRiL, Warszawa 1984.
5. GAJEWSKI J., *Sposoby aktualizacji optymalnych planów w przedsiębiorstwach rolniczych*, IRWiR PAN, Warszawa 1974.
6. GAJEWSKI J., ANDRYCHOWICZ B., *Zmiany warunków gospodarowania a planowanie w przedsiębiorstwie rolniczym*, PWRiL, Warszawa 1979.
7. GAL T., *Postoptimal Analyses. Parametric Programming, and Related Topics*, McGraw-Hill International Book Company 1979.
8. GASS S.I., *Programowanie liniowe. Metody i zastosowania*, PWN, Warszawa 1973.

9. GRUDA M., Elementy analizy stabilności modeli programowania liniowego z przykładami zastosowań, [w:] J. Gajewski (red.), *Informacja a zarządzanie w PGR*, PWRiL, Warszawa 1983.
10. HEADY E.O., CANDLER W., Metody programowania liniowego, [w:] K. Rey i A. Woś (red.), *Metody matematyczne w ekonomice i planowaniu rolnictwa*, PWRiL, Warszawa 1965.
11. KOŁATKOWSKI D., Zagadnienia pooptymalizacyjne, [w:] S. Dorosiewicz, M. Gruszczyński, D. Kołatkowski, T. Kuszewski, M. Podgórska, E. Syczewska, *Ekonometria*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 1996.
12. MARSZAŁKOWICZ T., *Metody programowania optymalnego w rolnictwie*, PWE, Warszawa 1986.
13. NYKOWSKI I., Programowanie liniowe, [w:] W. Sadowski (red.), *Elementy ekonometrii i programowania matematycznego*, PWN, Warszawa 1980.
14. NYKOWSKI I., *Programowanie liniowe*, PWE, Warszawa 1984.
15. ORKISZ T., Analiza stabilności optymalnego rozwiązania zadania programowania liniowego (metodą simpleks), *Przegląd Statystyczny*, 1964, tom XI, zeszyt 1.
16. PIETRASZEWSKI A., WAGNER W., WYSOCKI F., *Podstawy agroekonometrii*, Wydawnictwo AR, Poznań 1989.
17. PODKAMINER L., Wpływ zmian parametrów techniczno-ekonomicznych na wielkość modelowego optimum gospodarstwa rolnego, *Zagadnienia Ekonomiki Rolnej*, 1973, nr 2.
18. RACZKOWSKA U., BUSŁOWSKI A., Analiza zmian wielkości zmiennych decyzyjnych w rozwiązaniu optymalnym zadania programowania liniowego, *Optimum – Studia Ekonomiczne*, 1998, nr 1.
19. ROGALSKA D. (red.), *Programowanie liniowe. Algorytmy i zadania*, Uniwersytet Łódzki, Łódź 1983.
20. WOŚ A., *Rachunek ekonomiczny w rolnictwie*, PWRiL, Warszawa 1966.

Technical coefficients and stability of optimal solution of linear programming problem

Abstract

Profile of coefficients in constrain conditions of linear programming problem described in farm example can conclude that there are significant number of fixed coefficients without possibility of changeability analysis. It is important that this group of coefficients is easy detected because their value is equal to 0 or ± 1. They were called logical coefficient as opposed from technical coefficients. In the paper formulas describing changeability of technical coefficients of real basic variables with co-called tight conditions in optimal decision are shown. These formulas was based on linear effects of changing cost and right-hand side coefficients in spite of nonlinear dependence between changing technical coefficients and basis variables. Thanks to such solution it is easy to obtain stability measure in case of changing technical coefficients.