

**ZESZYTY NAUKOWE**

Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego  
w Warszawie

**EKONOMIKA  
I ORGANIZACJA  
GOSPODARKI  
ŻYWNOŚCIOWEJ**

**NR 60 (2006)**

**Wydawnictwo SGGW  
Warszawa 2006**

KOMITET REDAKCYJNY

Bolesław Borkowski, Robert Pietrzykowski, Dorota Witkowska, Maria  
Zajączkowska – redaktor naczelna

Recenzenci

Zbigniew Binderman, Bolesław Borkowski, Ewa Drabik, Arkadiusz Orłowski,  
Aleksander Strasburger, Wiesław Szczesny, Dorota Witkowska,  
Jacek Wojciechowski, Wojciech Zieliński

Publikacja dofinansowana przez Fundusz Współpracy  
ze środków Unii Europejskiej

Redakcja techniczna - Robert Pietrzykowski

ISBN 88-7244-762-4

Wydawnictwo SGGW

ul. Nowoursynowska 166,02-787 Warszawa  
tel. (0 22) 593 55 20 (-22 – sprzedaż), fax (0 22) 593 55 21  
e-mail: [jmw\\_wyd@alpha.sggw.waw.pl](mailto:jmw_wyd@alpha.sggw.waw.pl)  
[www.wydawnictwosggw.pl](http://www.wydawnictwosggw.pl)

Druk Agencja Reklamowo-Wydawnicza A. Grzegorzcyk, [www.grzeg.com.pl](http://www.grzeg.com.pl)

## SPIS TREŚCI:

### **Bolesław Borkowski**

Życie i twórczość Prof. dr hab. Teresy Marszałkiewicz (1924-1998).....7

### **Jacek Bednarz, Stanisław Gędek**

Analiza współzależności kursów na polskim rynku walutowym .....15

### **Agata Binderman**

Klasyfikacja obiektów oparta na dwóch wzorcach .....25

### **Lucyna Błażejczyk, Radosław Kala**

Estymacja udziałów metodą regresji grzbietowej .....35

### **Ryszarda Bolonek**

Modelowanie konkurencyjności regionu w oparciu o adaptację techniki  
analizy nieuszkodzalności systemów.....45

### **Bolesław Borkowski, Wiesław Szczesny**

Zmiany w zasobach i rozmiarach produkcji gospodarstw rolniczych w  
latach 1993 - 2003 .....57

### **Katarzyna Brzozowska-Rup, Wiesław Dziubdziela**

Estymacja „indeksu ogona” wybranych szeregów finansowych za  
pomocą entropii Renyi'ego .....69

### **Hanna Dudek, Monika Dybciak**

Zastosowanie modelu logitowego do analizy wyników egzaminu .....81

### **Monika Gładysz**

Zastosowanie modelu panelowego do badania nadwyżek kapitałowych  
w bankach komercyjnych w Polsce .....93

<b>Henryk Gurgul, Paweł Majdosz</b>	
Identyfikacja klastrów w oparciu o strukturę nakładów i wyników .....	103
<b>Ewa Jałowiecka, Piotr Jałowiecki</b>	
Prognoza produkcji i spożycia papierosów w Polsce do 2008 roku .....	113
<b>Andrzej Karpio, Krzysztof Karpio</b>	
Analiza trendów na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie .....	123
<b>Krzysztof Karpio, Piotr Łukasiewicz, Arkadiusz Orłowski</b>	
Zmiany w spożyciu w krajach europejskich - analiza taksonomiczna .....	131
<b>Andrzej Karpio, Dorota Żebrowska-Suchodolska</b>	
Ryzyko systematyczne spółek z indeksu WIG20, a koniunktura giełdowa .....	139
<b>Agnieszka Kieres</b>	
Narzędzia informatyczne w działaniach wspierających rozwój obszarów wiejskich prowadzonych przez Biuro Programów Wiejskich, Funduszu Współpracy.....	151
<b>Joanna Kisielińska, Urszula Skórnik – Pokrowska</b>	
Wykorzystanie liniowej funkcji dyskryminacyjnej oraz metody głównych składowych w procesie doboru spółek do portfela inwestycyjnego.....	159
<b>Paweł Kobus, Robert Pietrzykowski</b>	
Efekt dźwigni na GPW w Warszawie .....	169
<b>Jolanta Kondratowicz-Pozorska</b>	
Ocena zmian postaw konsumentów zdrowej żywności (na podstawie analizy macierzy przepływów).....	179
<b>Joanna Landmesser</b>	
Efekt dnia tygodnia na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie .....	187
<b>Agnieszka Lewczuk</b>	
Próba analizy aukcji z różnymi rozkładami wycen .....	197

**Piotr Łukasiewicz, Grzegorz Koszela, Arkadiusz Orłowski**

Wpływ wyboru skali ekwiwalentności na wyniki w zakresie pomiaru ubóstwa i koncentracji dochodów .....207

**Justyna Majewska**

Estymatory odporne zmienności w modelu wyceny Blacka-Scholesa .....219

**Edyta Marcinkiewicz**

Badanie zależności pomiędzy wartością wykładnika Hursta, a skutecznością strategii inwestycyjnych opartych na analizie technicznej .....231

**Aleksandra Matuszewska, Dorota Witkowska**

Analiza zmian kursu euro/dolara: model VAR i perceptron wielowarstwowy .....241

**Agnieszka Mazur, Dorota Witkowska**

Zastosowanie wybranych mierników taksonomicznych do oceny nieruchomości.....251

**Justyna Miklewska**

Modelowanie obszarów Peri-Urban Zastosowanie automatów komórkowych i podejścia agentowego .....259

**Joanna Olbryś**

Własności estymatorów miar ryzyka Expected ShortFall (ES) oraz Value-at-RISK (VaR) .....269

**Agnieszka Orwat**

Przykład zastosowania metody odpornej w modelowaniu finansowych szeregów czasowych .....279

**Maria Parlińska, Marcin Adamczyk**

Prognoza liczby emitowanych kart płatniczych .....289

**Robert Pietrzykowski, Paweł Kobus**

Zastosowanie modyfikacji metody k-średnich w analizie portfelowej .....301

**Jacek Strojny**

Przewagi komparatywne a wymiana handlowa produktami rolnymi krajów UE .....309

**Wiesław Szczesny, Teresa Kowalczyk, Marek Wiech**

Koncepcja pomiaru nierówności dla wielu zmiennych .....319

**Śliwicki Dominik**

Ekonometryczne modelowanie wybranych wskaźników makroekonomicznych w Polsce .....331

**Grażyna Trzpiot, Dominik Kręzolek**

Statystyczna weryfikacja modelu CAMP na przykładzie polskiego rynku kapitałowego .....341

**Krzysztof Wiśniński**

Zastosowanie modelu MOTAD do tworzenia portfela akcji.....353

**Dorota Witkowska, Anna Gasek**

Zastosowanie testu Perrona do badania punktów zwrotnych indeksów giełdowych: WIG, WIG20, MIDWIG i TechWig.....359

**Tomasz Ząbkowski**

Porównanie metod Tramo-Seats i Sieci Neuronowych wykorzystywanych do prognozowania krótkookresowego szeregów czasowych .....369

## **Życie i twórczość Prof. dr hab. Teresy Marszałkiewicz**

**(1924 – 1998)**

Katedra Ekonometrii i Informatyki, organizator tegorocznej VII konferencji naukowej pt. „Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych” poświęca ją pamięci profesora zwyczajnego Wydziału Ekonomiczno – Rolniczego

### **Pani prof. dr hab. Teresy Marszałkiewicz**

twórcy i wieloletniego dyrektora Instytutu Zastosowań Matematyki i Statystyki w SGGW, a po reorganizacji - kierownika Katedry Ekonometrii i Informatyki Wydziału Ekonomiczno – Rolniczego, wybitnej uczoney, prawego, życzliwego człowieka, przyjaciela i wychowawcy pokoleń.



**Teresa Helena Maria Marszałkiewicz** urodziła się 27 października 1924 roku we Lwowie, w rodzinie Adama i Zofii z Turnauów Marszałkiewiczów. Była najstarszym z siedmiorga rodzeństwa. Jej Ojciec, Adam (Jan Maksymilian z Brzezia) Marszałkiewicz (herbu Zadora), pochodził ze starej rodziny szlacheckiej z okolic Nowego Sącza. Stąd wraz z rodziną przesiedlił się do Lwowa. Żarliwy patriota, brał udział w walkach o niepodległość Polski (1914-1918) i wojnie polsko-bolszewickiej (1919-1921) - odznaczony Krzyżem Legionowym i Krzyżem Niepodległości. Urlopowany z wojska kontynuował naukę i w roku 1923 ukończył Wyższe Kursy Ziemiańskie we Lwowie (mniej więcej odpowiednik dzisiejszej Akademii Rolniczej). Po odbyciu praktyk podjął pracę jako asystent na Wydziale Hodowli

Bydła w Towarzystwie Gospodarskim Wschodniej Małopolski we Lwowie. Był członkiem Rady Wojewódzkiej w Krakowie. Zarządzał Tarnowem jako komisarz rządowy i prezydent miasta. W czasie drugiej wojny światowej brał czynny udział w konspiracji jako członek ZWZ-AK. Matka, Prof. Marszałkiewicz Zofia, pochodziła z wybitnej, wszechstronnie utalentowanej rodziny ziemiańskiej Turnau z Mikulic, po pierwszej wojnie światowej organizatorów we Lwowie Wyższych Kursów Ziemiańskich, oraz szkoleń rolniczych nowoczesnego gospodarowania w majątkach rodzinnych - bardzo znanych i cenionych tzw. „kursów Turnaua”.

Historyczne okoliczności przerwały tradycję światłego gospodarowania na własnej ziemi, złączonego zawsze z troską o innych - dekret o reformie rolnej z roku 1945 „przesiedlił” Marszałkowiczów z dziećmi do Wrocławia.

Ziemiańskie domy, z których wywodzili się Rodzice przyszłej Pani Profesor, ceniły patriotyzm, pracę organiczną, konsekwencję w dążeniu do celu, bezkompromisowość poglądów oraz odwagę formułowania i głoszenia własnych sądów. Ceniły wiedzę, wszechstronną edukację i erudycję oraz znajomość języków. Te wartości pielęgnowano i wzmacniano w Jej domu rodzinnym - we Wrocławiu, zarabiając na życie, siódemka Marszałkowiczów skończyła studia.

Teresa Marszałkowicz, po ukończeniu liceum ogólnokształcącego w tajnym nauczaniu (świadectwo dojrzałości wydane zostało przez Państwową Komisję Weryfikacyjną w Tarnowie, w dniu 9 czerwca 1945 roku), rozpoczęła studia początkowo na Politechnice Wrocławskiej, Wydział Chemii Technicznej, skąd w trakcie II roku, ze względu na stan zdrowia, przeniosła się do Wyższej Szkoły Handlowej (obecnie Akademia Ekonomiczna). Od 1949 r. studiowała w Szkole Głównej Planowania i Statystyki w Warszawie (obecnie SGH), gdzie w 1952 r. uzyskała stopień magistra nauk ekonomicznych.

W czasie nauki pracowała w Państwowej Fabryce Związków Azotowych w Tarnowie (1942-1944), a po przeniesieniu z Wrocławia w Wojewódzkiej Komisji Planowania Gospodarczego (1949-1952). W latach 1950-1954 pracowała w Wyższej Szkole Ekonomicznej we Wrocławiu, w Katedrze Statystyki kierowanej przez prof. Jana Falewicza, jako asystent, starszy asystent i adiunkt.

W roku 1954 przenosi się na stałe do Warszawy i podejmuje pracę w Szkole Głównej Gospodarstwa Wiejskiego, początkowo - w Katedrze Statystyki Rolniczej na Wydziale Ekonomiczno-Rolniczym, a od 1970 r. w Instytucie Zastosowań Matematyki i Statystyki, który współtworzyła i którego była wieloletnim dyrektorem. Prof. T. Marszałkowicz od 1971 do 1976 roku była wicedyrektorem, a następnie dyrektorem Instytutu Zastosowań Matematyki i Statystyki (od 1976 do 1979 oraz od 1982 do 1986 roku). Po rozwiązaniu Instytutu w 1987 r. kierowała od tego roku Katedrą Ekonometrii i Informatyki aż do przejścia na emeryturę w roku 1993. Pod Jej kierunkiem nastąpił dynamiczny rozwój młodej kadry naukowej. Duża liczba pracowników Katedry uzyskała w tym czasie stopnie doktora (15) oraz tytuły doktora habilitowanego (6). Część z nich uzyskała stopnie doktora lub tytuły doktora habilitowanego na Uniwersytecie lub na Politechnice. Ponad połowa obronionych prac doktorskich uzyskała wyróżnienia. Duża część młodych pracowników Katedry odbywała studia doktoranckie w renomowanych uczelniach zagranicznych. Katedra liczyła 44 pracowników.

#### **Cała jej kariera naukowa jest związana z SGGW.**

W 1962 r. zdobywa stopień doktora nauk rolniczych, broniąc rozprawę „Zastosowanie metody korelacyjnej do badania efektywności niektórych nakładów na produkcję roślinną na przykładzie spółdzielni produkcyjnych”. W 1964 r. uzyskuje stopień doktora habilitowanego w zakresie statystyki na podstawie dysertacji „Wybrane zagadnienia teoretyczne związane ze stosowaniem metody



korelacyjnej w badaniach ekonomiczno-rolniczych”. Profesorem nadzwyczajnym zostaje w 1973 r., a profesorem zwyczajnym – w roku 1985.

Jej awanse naukowe uzyskane w SGGW są wynikiem tytanicznej pracy – wśród bogatego dorobku naukowego jest ponad sto dziesięć pozycji, w tym 23 podręczniki i skrypty, 66 oryginalnych (w dużej części opublikowanych za granicą) rozpraw naukowych, monografii, studiów, artykułów i komunikatów. Ponadto szereg prac w ramach współpracy międzynarodowej oraz prac dla gospodarki zostało przekazanych w formie maszynopisów. Była promotorem 8 rozpraw doktorskich oraz opiekunem kilkudziesięciu prac magisterskich.

*Zainteresowania naukowe oraz dorobek prof. T. Marszałkiewicz dotyczą różnych problemów teoretycznych oraz zastosowań metod statystycznych, ekonometrii a w szczególności metod optymalizacyjnych i informatyki.*

Publikowała Ona oryginalne prace naukowe, popularno-naukowe oraz doniesienia o postępach w wybranych gałęziach wiedzy i kierunkach badawczych. Jej publikacje cechuje nowatorstwo ujęcia, jasność wykładu oraz dostosowanie do poziomu przygotowania odbiorcy.

Prof. T. Marszałkiewicz była twórcą szkoły naukowej z zakresu statystyki teoretycznej i ekonometrii oraz informatyki, które miały przełomowe znaczenie w zastosowaniu tych dyscyplin w badaniach ekonomiczno-rolniczych. Była prekursorem wprowadzania problematyki programowania optymalnego i informatyki do programów nauczania w uczelniach rolniczych, a w konsekwencji autorem ramowych, a także szczegółowych programów, takich przedmiotów jak: statystyka, ekonometria i informatyka na wszystkich wydziałach Uczelni Rolniczych. Jest także autorem podręczników oraz skryptów akademickich, a także pomocy dydaktycznych, które cechują się m.in. dostosowaniem do poziomu przygotowania odbiorcy. Dzięki Jej pracy autorskiej takie przedmioty jak: statystyka, ekonometria oraz metody programowania matematycznego i informatyki w rolnictwie zostały wzbogacone o 20 podręczników i skryptów. Na szczególną uwagę zasługują takie podręczniki jak:

- „Metody statystyki opisowej w badaniach ekonomiczno-rolniczych (2 wydania; pierwsze przez PWN w 1980 r., drugie w 1986 r. przez Wydawnictwo SGGW),
- „Metody programowania optymalnego w rolnictwie (3 wydania; pierwsze w 1976 r. , drugie poprawione i rozszerzone w 1979 r., trzecie zmienione w 1986 r. Wydane przez Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne).
- „Metody programowania optymalnego w leśnictwie (współautor - wydania; pierwsze – w 1979 r (PWN), drugie poprawione i rozszerzone w 1986 r., (PWRiL),
- Zastosowanie korelacji do badania efektywności nakładów na produkcję roślinną. PWE, 1963 r.,
- Funkcja produkcji rolniczej, PWE, 1965 r.
- Informatyka – wybrane zagadnienia i zastosowania (redakcja naukowa. Wyd. SGGW, 1990 r.).

**Prof. T. Marszałkiewicz głównie dzięki swojej działalności naukowo-badawczej była w naszym kraju powszechnie znanym i uznanym autorytetem naukowym w zakresie teorii metod statystycznych i ich wykorzystania w problematyce ekonomiczno-rolniczej, oraz w zakresie metod programowania optymalnego i ich zastosowania w planowaniu rozwoju rolnictwa. Nie często można o pracowniku naukowym powiedzieć, że jest w pewnej dziedzinie twórcą własnej szkoły, że jest autorem oryginalnych metod, które weszły na stałe do nauki. W stosunku do prof. Marszałkiewicz można tak właśnie powiedzieć.**

W Jej pracy naukowej z lat sześćdziesiątych zwracają uwagę następujące opracowania: wydania PWE z 1963 roku pt. „Zastosowanie korelacji do badania efektywności nakładów na produkcje roślinną” /jest to rozszerzona wersja rozprawy doktorskiej/. „Funkcje produkcji rolniczej” / 1965/. ”Różnicowy rachunek opłacalności w rolnictwie” /Roczniki Nauk Rolniczych 1964, wspólnie z R. Manteufflem/, „Problem przeliczania na hektar wartości zmiennych przy badaniu zależności między nimi” /RNR 1962/, „Zespołowe współczynniki korelacji cząstkowej” /Przegląd Statystyczny 1963/ oraz „Metody statystyki opisowej w badaniach ekonomiczno-rolniczych, PWN. 1980/.

W wymienionych pracach Prof. T. Marszałkiewicz zaproponowała nowe metody statystyczne i rozstrzygnęła pewną ilość niejasnych i spornych spraw. Jedną z ważniejszych był problem zależności między ilorazami o wspólnym mianowniku. W szczególności chodziło o badania zależności pomiędzy wartościami przeliczonymi na hektar. Zaslugą Prof. T. Marszałkiewicz było wykazanie w jakich przypadkach wolno i należy stosować wartości przeliczone, zupełnie inaczej niż sugerowali rozwiązanie tego problemu m.in. K. Pearson i J. Neyman.

Bardzo ważnym osiągnięciem naukowym w omawianym nurcie, to opracowanie i wprowadzenie do statystyki teoretycznej, zespołowego współczynnika korelacji cząstkowej oraz współczynnika determinacji krzywoliniowości regresji. W sposób nie budzący zastrzeżeń wykazała ich przydatność w badaniach ekonomiczno-rolniczych. Po wielu latach badań Prof. T. Marszałkiewicz opracowała i przedstawiła uogólnioną definicję współczynnika determinacji. Z jednego uogólnionego wzoru współczynnika determinacji można, jak wykazała, wyprowadzić wszystkie pozostałe współczynniki determinacji i to zarówno klasyczne, jak i zaproponowane wcześniej przez prof. Marszałkiewicz.

Innym twórczym wkładem prof. T. Marszałkiewicz jest wyjaśnienie doboru zmiennych objaśniających do modelu regresji. Problem jest nadal aktualny, pomimo opracowanych wielu metod doboru zmiennych objaśniających do modelu ekonometrycznego. Prof. T. Marszałkiewicz rozpatrywała jednoczesny wpływ nowej zmiennej wprowadzonej do modelu regresji na wartość współczynników regresji cząstkowej i na wartość współczynnika determinacji wielorakiej. Przez to wykazała jak należy dobierać zmienne objaśniające do modelu regresji, gdy chodzi o wielkość wpływu poszczególnych zmiennych niezależnych na zmienną zależną,

a jak gdy interesuje nas tylko współzależność pomiędzy zmiennymi. Po raz pierwszy zagadnieniem, jak dalece wprowadzenie nowej zmiennej pozwala zbliżyć się do określenia „rzeczywistej regresji – true regression” zajmował się Ragnar Frish. Opracował on metodę konfluencyjną, która następnie rozwinięta została przez Koopmansa i Reiersola. Metoda znana w literaturze jako „bunch of lines” została przez T. Marszałkowicz rozwinięta i wprowadzona do nauki jako jedna z bardziej przydatnych metod doboru zmiennych objaśniających do modeli ekonometrycznych. Za kolejny twórczy wkład T. Marszałkowicz uważam wyjaśnienie związku pomiędzy parametrami regresji brutto i netto oraz znaczenie i wpływ współzmienności pomiędzy zmiennymi objaśniającymi uwzględnionymi w równaniu regresji wielorakiej na wielkość zmiennej objaśnianej.

***Wszystkie te twórcze osiągnięcia z omawianego nurtu badań weszły na stałe do nauki i są powszechnie używane w badaniach ekonomiczno – rolniczych.***

Do badań z lat siedemdziesiątych należą prace, w których prof. Marszałkowicz zajmowała się teorią i metodami programowania optymalnego, informatyką oraz ich zastosowaniami w planowaniu rozwoju rolnictwa i produkcji rolniczej. Również i w tej dziedzinie nauki prof. Marszałkowicz ma ogromne zasługi. Jest tu bezspornie czołową postacią w polskiej nauce. Stworzyła własne oryginalne metody i wyjaśniła wiele trudnych spraw w sferze zastosowań metod ekonomiczno-matematycznych w rolnictwie. Wymienię kilka wątków tematycznych związanych z twórczym wkładem do teorii a także do praktycznych zastosowań.

Do głównych osiągnięć prof. Marszałkowicz w tej grupie prac należy:

- 1) opracowanie metody Marginalnej Optymalizacji Wielowariantowej powszechnie znanej szerokim kręgiem pracowników naukowych jako metoda MOW. Prof. Marszałkowicz opracowała tu zarówno teoretyczne podstawy metody, jak i algorytm, perspektywy i możliwości praktycznych zastosowań. Dzięki tej metodzie można w optymalny sposób podzielić środki będące do dyspozycji na inwestycje pomiędzy wiele jednostek przy założonej z góry marginalnej efektywności nakładów.
- 2) Opracowanie Metody Przybliżonego Programowania Wielomianowego. Ta metoda weszła na stałe do nauki i upowszechniła się jako metoda PPW. Dzięki tej metodzie stało się możliwe to, co uprzednio nie było możliwe, a mianowicie rozwiązywanie dużych modeli optymalizacyjnych przy wielomianowej funkcji celu stopnia drugiego, lub wyższego.
- 3) Wprowadzenie uwzględniania ryzyka w modelach optymalizacyjnych. Najczęściej uwzględnianie ryzyka następuje w postaci zastosowania teorii gier. Prof. T. Marszałkowicz opracowała własną metodę umożliwiającą wprowadzanie ubezpieczenia od niektórych rodzajów ryzyka w modelach optymalizacyjnych. Zaproponowana metoda ograniczania ryzyka (popularnie zwaną metodą powielania warunków bilansowych) w modelach optymalizacyjnych (statycznych i dynamicznych) daje lepsze wyniki niż popularne metody ograniczania ryzyka oparte na teorii gier.

Dalsze osiągnięcia prof. Marszałkowicz odnoszą się do teorii konstrukcji modeli optymalizacyjnych. Do tych osiągnięć zaliczam:

- rozwinięcie koncepcji budowy modelu optymalizującego z bloków standardowych,
- opracowanie metody organicznej do ujęcia warunków bilansowych siły roboczej w modelach optymalizacyjnych,
- opracowanie metody dzięki której można uwzględnić i ograniczyć ryzyko przy planowaniu posługując się metodami optymalizacyjnymi,
- naświetlanie problematyki wykorzystania modeli optymalizacyjnych do planowania wieloszczeblowego.

Do osiągnięć prof. T. Marszałkowicz zaliczam też sposób przedstawienia problemów systemu informatycznego agrokompleksu w Polsce, oraz w ogóle nowoczesnych metod rachunku ekonomicznego w rolnictwie.

Szereg wyników badań z omawianego zakresu zawartych jest w wydanym przez PWE w 1986 r. podręczniku pt. „Metody programowania optymalnego w rolnictwie”, „Metody programowania optymalnego w leśnictwie” PWE, Warszawa 1979 (współautor B. Kłapeć), „Uwzględnianie w planie optymalnym przedsiębiorstwa ryzyka związanego z nieznanym a priori przebiegiem pogody w okresie realizacji planu” ZER nr 6/1983 r., „Metoda marginalnej optymalizacji wielowariantowej”, Wydawnictwa SGGW, 1973 r., „Metoda analizy sieci czynności oraz model transportowy i jego zastosowanie w rolnictwie” Dział Wydawnictw Akademii Rolniczej w Warszawie, 1974 r., i inne.

*Na zakończenie oceny dorobku naukowego prof. T. Marszałkowicz chciałbym zwrócić uwagę na następujący fakt. Opracowania Profesora, choć mają charakter wybitnie naukowy i obejmują bardzo trudne i złożone problemy, to są napisane w sposób zrozumiały dla dość szerokich kręgów pracowników naukowych, a nawet dla odpowiednio przygotowanych praktyków. Na uwagę zasługuje tu sposób ilustrowania zastosowań opracowanych wyników na wielu praktycznych przykładach.*

Prof. T. Marszałkowicz była aktywnym członkiem wielu stowarzyszeń, instytucji i komisji naukowych, a mianowicie: Komitetu Ekonomiki Rolnictwa PAN, Naukowej Rady Statystycznej GUS, Komisji Matematycznej GUS, Rady Naukowej IER, Zespołu koordynacyjno – wdrożeniowego stosowania metod matematycznych w ekonomice rolnictwa przy Komitecie Ekonomiki Rolnictwa PAN, Zespołu do spraw elektronicznej techniki obliczeniowej w Instytucie Mechanizacji i Elektryfikacji Rolnictwa, różnych zespołów Rady Naukowo – Technicznej przy Ministrze Rolnictwa, kolegów redakcyjnych kilku czasopism naukowych, m.in: Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego, SITR i Płockiego Towarzystwa Naukowego. Była międzynarodowym koordynatorem tematu realizowanego w ramach RWPG „Podsystemy przetwarzania danych w nasiennictwie i selekcji”, koordynatorem krajowym prac RWPG nt.: „Opracowanie i wdrożenie metod matematycznych i ETO w rolnictwie”, wykonawcą tematu RWPG „Badania nad zastosowaniem programowania

nieliniowego w rolnictwie” oraz koordynatorem i kierownikiem wielu innych tematów resortowych i naukowo - badawczych. Prof. T. Marszałkiewicz otrzymała nagrodę naukową Wydziału V PAN, czterokrotnie nagrodę Ministra Nauki, Szkolnictwa Wyższego i Techniki. Odznaczona była krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski oraz wyróżniona odznaką „Zasłużony pracownik rolnictwa”.

Prof. T. Marszałkiewicz była pracownikiem o wybitnych walorach dydaktycznych i badawczych. Wniosła duży wkład w rozwój metod programowania matematycznego i ich zastosowania w rolnictwie polskim. Prowadziła Ona wykłady ze statystyki teoretycznej i programowania matematycznego na kilku wydziałach SGGW oraz dla doktorantów. a także wykłady na kursach doszkalających dla kadr kierowniczych Ministerstwa Rolnictwa.

Prowadziła ogólnokrajową działalność koordynacyjną w zakresie stosowania metod matematyczno – statystycznych w rolnictwie. Przede wszystkim dużo uwagi poświęciła wprowadzaniu do dydaktyki i badań naukowych nowoczesnej techniki obliczeniowej i metod matematyczno – statystycznych. W 1971 roku zorganizowała w naszej Uczelni Ośrodek Obliczeniowy (obecne Centrum Informatyczne), który na początku działalności był w strukturze Instytutu Zastosowań Matematyki i Statystyki. Oprócz normalnych zajęć dydaktycznych zawsze chętnie udzielała konsultacji młodszym pracownikom nauki z naszej i z innych uczelni i instytutów z zakresu metod badawczych stosowanych w badaniach ekonomiczno – rolniczych. Większość programów ramowych lub szczegółowych dla przedmiotów z zakresu ekonometrii, metod programowania optymalnego i informatyki została przygotowana przez Prof. T. Marszałkiewicz bądź przy Jej współudziale.

Prof. T. Marszałkiewicz posiadała wysokie umiejętności organizacyjne. Jej zasługą był duży wkład w rozwój Instytutu Zastosowań Matematyki i Statystyki oraz utrzymanie go na liczącym się w kraju poziomie dydaktycznym i naukowym. Na szczególne podkreślenie zasługuje stosunek Profesor do podwładnych i współpracowników, cechujący się dużą życzliwością i koleżeńskością. Ilustracją tego była dobra atmosfera w kierowanym przez nią Instytucie a później po reorganizacji w Katedrze Ekonometrii i Informatyki. Była człowiekiem dużej wrażliwości na problemy zawodowe i życiowe pracowników.

*Aktywność zawodowa i naukowa Teresy Marszałkiewicz oparta na głębokiej wiedzy, pracowitość i skromność zjednały Jej uznanie i sympatię wśród szerokiego grona pracowników naukowych tak w kraju, jak i zagranicą. Osobiste cechy, wyrażające się prawością charakteru, życzliwością dla ludzi i chęcią pomocy każdemu, kto jej potrzebował, łatwością współżycia i współpracy były i pozostaną wzorem dla studentów i dla współpracowników, do których i ja miałem szczęście się zaliczać.*

*Bolesław Borkowski*

Jacek Bednarz  
Katedra Rynków i Instytucji Finansowych KUL  
e-mail: bednarz@kul.lublin.pl  
Stanisław Gędek  
Katedra Ekonomiki i Organizacji Agrobiznesu AR Lublin  
e-mail: gedek@op.pl

## **ANALIZA WSPÓLZALEŻNOŚCI KURSÓW NA POLSKIM RYNKU WALUTOWYM**

**Streszczenie:** Wprowadzenie nowej jednostki monetarnej euro na znacznym obszarze Unii Europejskiej może powodować, że kursy walut tych krajów europejskich, których waluty narodowe nie zostały zastąpione przez euro, mogą być uzależnione kursu EUR/USD. Analiza przeprowadzona w niniejszej pracy, przy pomocy modelu VAR, wykazała, iż taka sytuacja w znacznym stopniu dotyczy złotego.

**Słowa kluczowe:** kursy walutowe, euro, dolar amerykański, złoty, model VAR.

### **WPROWADZENIE**

Wprowadzenie w roku 1999 euro jako nowej europejskiej jednostki monetarnej w znacznym stopniu zmieniło strukturę rynku walutowego zarówno w aspekcie globalnym, jak również regionalnym. Powstał rynek eurodolara. Polska, przystępując do Unii Europejskiej w 2004 roku, deklaruje zamiar przystąpienia w przyszłości również do Europejskiej Unii Monetarnej i tym samym zastąpienia swojej waluty przez euro. Oznaczałoby to, że do tego czasu kurs złotego (PLN) podlegałby procesowi konwergencji względem euro (EUR). Należy domniemywać, że jednocześnie kursy tych walut wobec dolara (USD) podążałyby za zmianami wyznaczanymi przez rynek eurodolara.

Celem niniejszego opracowania jest próba zbadania, w jakim zakresie kurs złotego (PLN) reaguje na zmiany na rynku EUR/USD oraz jakie są zależności pomiędzy kursami złotego do dolara i euro.

### **MODELOWANIE KURSÓW WALUTOWYCH**

W literaturze przedmiotu aż do połowy lat 80-tych ubiegłego stulecia rozpowszechniony był pogląd, w myśl którego zmiany kursów walutowych następują w wyniku zmiany wartości fundamentalnych zmiennych makroekonomicznych [Dornbusch 1976]. Zgodnie z modelem racjonalnych oczekiwań makroekonomicznych, w obserwowanych w poszczególnych gospodarkach wzrostach (spadkach) inflacji, poziomu produkcji oraz popytu

konsumpcyjnego, poziomu stóp procentowych i bezrobocia, upatrywano bezpośrednich przyczyn dostosowania kursów ich walut. Model ten zakłada równocześnie, że związek między tymi zmiennymi ma charakter stabilny, pomimo możliwej heterogeniczności oczekiwań poszczególnych uczestników rynku. Pomimo wielokrotnie podejmowanych prób empirycznej weryfikacji modelu racjonalnych oczekiwań makroekonomicznych nie udało się jednoznacznie potwierdzić jego słuszności w odniesieniu do kształtowania się kursów walutowych.

W prowadzonej dyskusji naukowej kolejne głosy kwestionowały stabilność i zakotwiczenie relacji pomiędzy kursami walutowymi a wartościami, uznawanych za fundamentalne, zmiennych makroekonomicznych. Wykazano, że obserwowane w czasie dyskretnym gwałtowne zmiany wartości fundamentalnych zmiennych skutkują zwiększoną chwiejnością kursu walutowego w krótkim okresie [Flood i Rose 1995]. Kolejną obserwacją poddającą w wątpliwość racjonalność oczekiwań zmian kursów walutowych przyniosły badania rozkładu stóp zwrotu. Wykazano, że niezależnie od globalnego czy regionalnego charakteru badanych walut – ich obserwowane rozkłady stóp zwrotu nie mają cech rozkładu normalnego. Uwzględnienie dodatkowo niekiedy znacznych kosztów transakcyjnych ponoszonych przy zamianie walutowej nakazuje zakwestionować hipotezę silnej efektywności informacyjnej rynku walutowego w krótkim horyzoncie czasowym [Kilian i Taylor 2003]. Powyższe ustalenia stanowią bezpośredni przyczynek do badań nad lepszymi jakościowo modelami prognozowania kursów walutowych. W niektórych opracowaniach można spotkać opinie uzasadniające stosowanie analizy technicznej (technik wykresu) przy prognozowaniu kursów walutowych [James 2003]. De Grauwe i Grimaldi konkludują, że wykorzystywanie analizy technicznej (techniki wykresu) w operacjach prowadzonych na rynkach walutowych może być bardziej skuteczne niż kierowanie się zmianami wartości zmiennych fundamentalnych. Cechą charakterystyczną zwolenników analizy technicznej (czartystów) jest „tworzenie zasłony dymnej” wokół wielkości fundamentalnych, co prowadzi do osłabienia efektywności fundamentalistów. Im więcej czartystów na rynku, tym więcej powstaje „szumu informacyjnego” w warunkach rynku. Czynnikiem powstrzymującym czartystów przed opanowaniem rynku i pozbawieniem go związków z fundamentalną sytuacją makroekonomiczną jest ryzyko rosnące w krótkim okresie wraz z chwiejnością kursów [De Grauwe i Grimaldi 2006].

## POWSTANIE RYNKU EURODOLARA I PERSPEKTYWY ODDZIAŁYWANIA EURO NA KURSY WALUT KRAJÓW ŚRODKOWOEUROPEJSKICH

Wprowadzenie do obiegu w 1999 roku *euro* jako nowej europejskiej jednostki monetarnej w znacznym stopniu zmieniło strukturę rynku walutowego

zarówno w aspekcie globalnym, jak również regionalnym. Jak zauważa Mundell, powstanie jednolitej europejskiej jednostki monetarnej, może z punktu widzenia gospodarki amerykańskiej doprowadzić do konkurencji ze strefą wpływów dolara na polu skuteczności prowadzonej polityki monetarnej oraz na polu związania ze sobą i podporządkowania kursów innych walut [Mundell 2000].

Niezależnie od konkurencji globalnej, na gruncie sformułowanej przez Mundella teorii optymalnego obszaru walutowego, wspólna waluta europejska może być poniekąd utożsamiana z „dobrem o charakterze publicznym” jako niezbędny element stabilizujący sytuację ekonomiczną w regionalnej perspektywie ponadnarodowej [Moshirian 2004]. Przykładem takiego oddziaływania jest powiązanie, a niekiedy również związanie walut reprezentujących mniejsze i słabsze ekonomicznie gospodarki z walutą silniejszą oddziałującą stabilizująco.<sup>1</sup> Zgodnie z teorią optymalnych obszarów walutowych siły stabilizujące daną walutę działają odwrotnie proporcjonalnie do wielkości kraju stabilizowanego. Mussa przewiduje, iż kursy walut większości państw członkowskich Unii Europejskiej, niezależnie od tego czy zastąpiły już swoje waluty narodowe, będą podlegały procesowi konwergencji względem euro.<sup>2</sup> Procesom konwergencji względem euro mogą podlegać również waluty państw środkowoeuropejskich. Utworzenie strefy euro pozwala na „zakotwiczenie” ich walut w walucie europejskiej, a przez to zapewnienie stabilności monetarnej w takim stopniu, jakiego samodzielnie nie byłyby w stanie osiągnąć [Ravenna 2005]. Zachowanie kursu walutowego wykazuje wtedy cechy procesu idiosynkratycznego.

Nacisk na konsolidację kursów walutowych i powiązanie ich przebiegu z kursem waluty dominującej w danym regionie prowadzi do powstania nieformalnej unii monetarnej na danym obszarze. Waluty mniejszych krajów mogą znaleźć się w takiej nieformalnej unii monetarnej, jeżeli kursy ich walut upodabniają się do kursu waluty dominującej [von Furstenberg 2001].

## WYNIKI BADAŃ EMPIRYCZNYCH

Jednym z najbardziej bardziej nurtujących pytań z punktu widzenia prowadzenia codziennych operacji walutowych jest pytanie o możliwość stawiania trafnej prognozy co do kształtowania się kursów walutowych. Prognozowanie przyszłych wartości (kursów) instrumentów finansowych wyłącznie w oparciu o ich wartości historyczne wymaga, wobec nieustannego napływu nowych informacji rynkowych, skoncentrowania się na analizie procesów kształtowania się cen instrumentów finansowych oraz siły ich wzajemnego oddziaływania [Campbell i in. 1997].

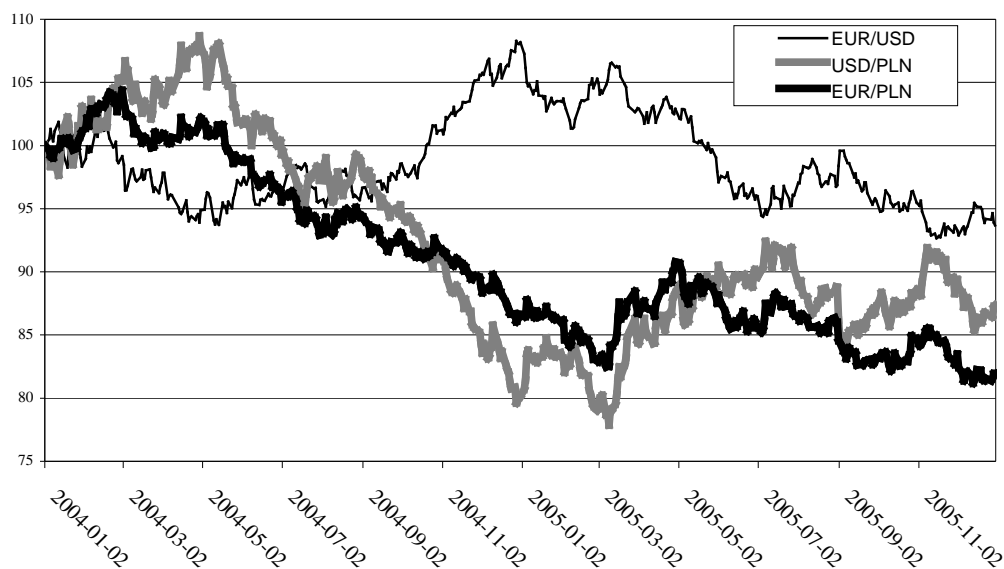
---

<sup>1</sup> Przykładem takiego działania było tolerowane przez Bundesbank w latach 90-tych jednostronne związanie walut niektórych krajów bałkańskich z niemiecką marką.

<sup>2</sup> Jednocześnie Mussa wskazuje na procesy dywergencji względem euro, jakim podlega brytyjski funt [Mussa 2002].



Do analizy współzależności kursów na polskim rynku walutowym posłużyły dzienne notowania NBP kursów EUR/PLN, USD/PLN oraz kursu EUR/USD za okres 01.01.2004-31.12.2005, obejmujący 516 obserwacji. Pojedyncze luki wynikające z braku notowań w danym dniu (np. brak notowań kursów PLN w dniu 11 listopada) uzupełnione zostały metodą średnich z sąsiednich okresów. Na rysunku 1 przedstawiony został przebieg tych kursów przeskalowany tak, aby wartość początkowa każdego z nich była w pierwszym dniu notowań równa 100. Zabieg ten pozwala na lepsze porównanie przebiegu tych kursów.



Rysunek 1. Przebieg przeskalowanych kursów EUR/PLN, USD/PLN oraz kursu EUR/USD w okresie 01.01.2004 - 31.12.2005

W tabeli 1 zamieszczone zostały wyniki testu ADF. Wskazują one na to, że szeregi czasowe analizowanych kursów walut są niestacjonarne, zintegrowane rzędu pierwszego.

Tabela 1. Wyniki testu ADF dla szeregów czasowych kursów walutowych.

Kurs	Wartości		Pierwsze różnice	
	t	p	t	p
EUR/USD	-1,4071	0,5805	-11,8685	0,0000
EUR/PLN	-0,6781	0,8504	-12,3390	0,0000
USD/PLN	-1,0297	0,7448	-12,7648	0,0000

Źródło: Opracowanie własne

Narzędziem analizy współzależności kursów był model VAR (por. dla przykładu: Charemza i Deadman 1997; Kusideł, 2000; Mills 1993) o postaci:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_0 \mathbf{d}_t + \sum_{i=1}^4 \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{t-i} + \mathbf{e}_t, \quad (4.1)$$

gdzie:

$\mathbf{x}_t = [ZE\_d_t \quad ZD\_d_t]^T$  jest wektorem obserwacji na bieżących wartościach pierwszych różnic kursów odpowiednio: EUR/PLN i USD/PLN,

$\mathbf{d}_t = [d_0 \quad ED\_d_t \quad ED\_d_{t-1} \quad ED\_d_{t-2} \quad ED\_d_{t-3} \quad ED\_d_{t-4}]^T$  jest wektorem egzogenicznych składników równań, którego składowymi są odpowiednio: stała równania oraz bieżące i opóźnione wartości pierwszych różnic kursu EUR/USD,

$\mathbf{A}_0$  – macierz parametrów przy zmiennych wektora  $\mathbf{d}_t$ ,

$\mathbf{A}_i$  – macierz parametrów przy opóźnionych zmiennych wektora  $\mathbf{x}_t$ ,

$\mathbf{e}_t = [\mathbf{e}_{1t} \quad \mathbf{e}_{2t}]^T$  zawiera wektory reszt równań modelu.

Rząd opóźnień modelu, równy 4, został zgodnie wskazany przez kryteria informacyjne Akaike'a (AIC), Schwarz'a (BIC) i Hannana-Quinna (HQC). Wyniki estymacji parametrów modelu (4.1), uzyskane przy pomocy programu GRETL, zamieszczone zostały w tabeli 2.

Tabela 2 Wyniki estymacji modelu 4.1

Zmienna	Równanie $ZE\_d_t$				Równanie $ZD\_d_t$			
	Wpółczynnik	Błąd standardowy	t	P	Wpółczynnik	Błąd standardowy	t	P
Stała	-0,00181	0,00098	-1,849	0,0651	-0,001713	0,000864	-1,982	0,0480
$ZE\_d(-1)$	-0,07530	0,09726	-0,774	0,4392	0,400078	0,085950	4,655	0,0000
$ZE\_d(-2)$	-0,00336	0,10619	-0,032	0,9748	0,444062	0,093839	4,732	0,0000
$ZE\_d(-3)$	-0,05416	0,10567	-0,513	0,6085	0,187713	0,093384	2,010	0,0450
$ZE\_d(-4)$	0,03005	0,09300	0,323	0,7467	0,168256	0,082185	2,047	0,0412
$ZD\_d(-1)$	0,08803	0,10921	0,806	0,4206	-0,550172	0,096507	-5,701	0,0000
$ZD\_d(-2)$	-0,01381	0,12360	-0,112	0,9111	-0,592687	0,109228	-5,426	0,0000
$ZD\_d(-3)$	-0,02740	0,12335	-0,222	0,8243	-0,352746	0,109010	-3,236	0,0013
$ZD\_d(-4)$	-0,06533	0,10637	-0,614	0,5394	-0,263404	0,094003	-2,802	0,0053
$ED\_d$	0,20684	0,13673	1,513	0,1310	-2,372780	0,120828	-19,638	0,0000
$ED\_d(-1)$	-0,06058	0,31100	-0,195	0,8456	-1,954040	0,274835	-7,110	0,0000
$ED\_d(-2)$	-0,22167	0,36018	-0,615	0,5385	-1,785410	0,318297	-5,609	0,0000
$ED\_d(-3)$	0,03475	0,36415	0,095	0,9240	-0,910935	0,321809	-2,831	0,0048
$ED\_d(-4)$	-0,01839	0,32223	-0,057	0,9545	-0,607676	0,284763	-2,134	0,0333
$R^2$	<b>0,022</b>				<b>0,494</b>			
Statystyka testu D-W	1,98626				1,98349			

Źródło: Opracowanie własne

Wyniki estymacji (por. Tabela 1) wskazują niewielki stopień wyjaśnienia zmienności przyrostów kursu EUR/PLN przez model (4.1) – współczynnik determinacji równania zmiennej  $ZE_{d_t}$  ma wartość zaledwie 0,022. Z kolei zmienność przyrostów kursu USD/PLN jest przez model (4.1) objaśniana dosyć dobrze. Współczynnik determinacji równania zmiennej  $Zd_{d_t}$  ma wartość bez mała 0,5. Należy też zwrócić uwagę na to, że żaden ze współczynników regresji równania objaśniającego zmienność przyrostów kursu EUR/PLN nie jest istotny, wszystkie zaś współczynniki regresji równania objaśniającego zmienność przyrostów kursu USD/PLN są istotne na poziomie 0,05.

Dla zbadania zależności przyczynowych pomiędzy kursami walut wykorzystany został test Grangera. Zastosowany został wariant Walda tego testu (por. Osińska, 2006, str.212). Wyniki zamieszczone zostały w tabeli 3.

Tabela 3. Wyniki testu przyczynowości Grangera

Przyczyna	Zmienna zależna					
	Kurs EUR/PLN			Kurs USD/PLN		
	$\chi^2$	stopnie swobody	P	$\chi^2$	stopnie swobody	P
Kurs EUR/USD	2,17175	4	0,7042	244,1555	4	0,0000
Kurs EUR/PLN	-	-	-	245,9998	4	0,0000
Kurs USD/PLN	3,2345	4	0,5194	-	-	-

Ź r ó d ł o: Opracowanie własne

Analiza wyników testu Grangera wskazuje, że zmiany kursu EUR/PLN kształtowały się w badanym okresie niezależnie od zmian kursów EUR/USD i USD/PLN. Z kolei z kolei zmiany kursów EUR/USD i EUR/PLN były przyczyną dla zmian kursu USD/PLN, przy czym w przypadku kursu EUR/USD, można mówić o przyczynowości natychmiastowej.<sup>3</sup> Wyniki te pozwalają również stwierdzić, w powiązaniu z wynikami estymacji parametrów modelu (4.1), że przebieg zależności pomiędzy kursami złotego do dolara i euro był jednokierunkowy. Zmiany kursu EUR/PLN wpływały na zmiany kursu USD/PLN, natomiast zależność odwrotna nie występowała.

Wartości ocen parametrów strukturalnych równania opisującego zachowanie się zmian kursu USD/PLN (por. Tabela 2) wskazują na znacznie silniejszy wpływ kursu EUR/USD na tę wielkość niż zmian kursu EUR/PLN. Świadczy o tym

<sup>3</sup> Natychmiastowa przyczynowość istnieje, gdy bieżąca wartość zmiennej objaśnianej może być lepiej prognozowana przy użyciu bieżących i przeszłych wartości zmiennej objaśniającej (por. Charemza i Deadman, 1997, str. 158 i dalsze).

znacznie wyższa co do modułu wartość współczynników regresji w przypadku odpowiednich opóźnień zmiennej  $ED_d$ .<sup>4</sup>

W tabeli 4 zamieszczone zostały wyniki testów charakteryzujących reszty równania modelu (4.1), opisującego kształtowanie się zmian kursu USD/PLN. Reszty równania opisującego kształtowanie się zmian kursu EUR/PLN nie były analizowane, gdyż, co zostało stwierdzone powyżej, zmiany kursu EUR/PLN kształtują się niezależnie od zmiennych objaśniających tego równania.

Tabela 4. Charakterystyka reszt równania opisującego zmiany kursu USD/PLN

Test	Statystyka testu	p
White'a na heteroskedastyczność wariancji	$TR^2 = 114,247$	0,2314
Liczby serii	$Liczba\ serii = 266$ $u = 0,793175$	0,4277
ARCH dla rzędu opóźnienia 4	$TR^2 = 3,41494$	0,4909
Test RESET	$F(2, 496) = 0,313933$	0,7307
LM na autokorelację rzędu 4	$LMF = 0,83769$	0,5017
JB na normalność rozkładu reszt	$\chi^2 = 11,4142$	0,0033
CUSUM na stabilność parametrów modelu	$t = -0,262073$	0,7934

Źródło: Opracowanie własne

Wyniki analizy reszt zawarte w tabeli 4, jak również wartość statystyki testu Durбина-Watsona zawarta w tabeli 2, wskazują na to, iż model opisujący przebieg zmian kursu USD/PLN został sformułowany poprawnie. Pewne powody do niepokoju może dawać jedynie fakt, że rozkład reszt odbiega od normalnego. Jednakże bliższa analiza rozkładu reszt wykazała, iż jest to rozkład symetryczny i leptokurtyczny, co nie powinno wpływać na jakość wnioskowania o istotności parametrów strukturalnych modelu.

Przedstawione powyżej wyniki badań pozwalają na sformułowanie dwu podstawowych wniosków. Najważniejszy z nich mówi, że zmiany kursu USD/PLN były w badanym okresie w znacznym stopniu uzależnione od zmian na rynku eurodolara, nie miały zaś zmiany na tym rynku wpływu na kurs EUR/PLN. Drugi wniosek, który można sformułować w oparciu o przeprowadzone badania wskazuje na jednokierunkową zależność pomiędzy kursami złotego do dolara i euro, przy czym wpływ zmian kursu EUR/PLN na kurs złotego do dolara jest znacznie słabszy niż zmian kursu EUR/USD.

<sup>4</sup> Bardziej precyzyjnie zagadnienie wpływu opóźnionych zmiennych objaśniających na zmienną objaśnianą przedstawia analiza przebiegu funkcji odpowiedzi na impuls (por. Kusideł, 2000, str. 37 i dalsze).

## PODSUMOWANIE

Wyniki przeprowadzonej analizy potwierdzają w odniesieniu do złotego hipotezę Mussy o konwergencji walut narodowych wobec euro. Kurs złotego do dolara, drugiej ważnej waluty światowej był w badanym okresie znacznym stopniu uzależniony od kursu EUR/USD. Jednocześnie kurs złotego do euro kształtował się niezależnie od zmian na rynku erodolara, co może wskazywać na to, iż relacje wewnątrz zapowiadanej przez von Furstenberga [von Furstenberg 2001] nieformalnej unii walutowej są w dużym stopniu autonomiczne, wynikające przede wszystkim z relacji pomiędzy podmiotami owej unii. Tego rodzaju nieformalne pozostawanie w strefie euro niewątpliwie wiąże się z korzyściami wynikającymi z formalnej przynależności do takiej strefy i niekoniecznie musi oznaczać utratę z tego powodu jakichś istotnych korzyści. Należy bowiem zauważyć, iż w świetle najnowszych badań nie potwierdzono negatywnych skutków powstrzymania się przez Wielką Brytanię, Szwecję oraz Danię od zastąpienia walut narodowych przez euro i podjęcia bliższej współpracy w ramach Europejskiego Banku Centralnego [Bask i de Luna 2005].

Przyczynowość równoczesna, występująca pomiędzy kursem eurodolara i kursem złotego do dolara, wykazana w przeprowadzonych badaniach wskazuje, wobec dosyć powszechnego kwestionowania rzeczywistego występowania takiej zależności, na konieczność przeprowadzenia badań w oparciu dane o wyższej częstotliwości. Czas bowiem, jaki potrzebny jest na przepływ informacji pomiędzy poszczególnymi rynkami, jest obecnie bardzo krótki stąd wzajemne oddziaływanie poszczególnych kursów walutowych ujawnia się w czasie krótszym niż jeden dzień. Analizy wymaga również zachowanie innych walut europejskich wobec dolara i euro.

## LITERATURA

- Bask M., Luna de X. (2005): EMU and the stability and volatility of foreign exchange: Some empirical evidence. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 25.
- Campbell J., Lo A., Mackinlay A. (1997): *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton
- Charemza W.W., Deadman D.F. (1997): *Nowa ekonometria*. PWE, Warszawa.
- Dornbusch R. (1976): Expectations and exchange rate dynamics. *Journal of Political Economy*, vol. 84.
- Flood R., Rose A. (1995): Fixing the exchange rate regime: A virtual quest for fundamentals. *Journal of Monetary Economics*, vol. 36.
- Furstenberg von G. (2001): Pressures for currency consolidation in insurance and finance. Are the currencies of financially small countries on the endangered list? *Journal of Policy Modeling*, vol. 23.
- Grauwe de P., Grimaldi M. (2006): Exchange rate puzzles: A tale of switching attractors. *European Economic Review*, vol. 50.

- James J. (2003): Simple trend-following strategies in currency trading. *Quantitative Finance*, vol. 3.
- Kilian L., Taylor M. (2003): Why is it so difficult to beat the random walk forecast of exchange rates? *Journal of International Economics*, vol. 60.
- Kusiński E. (2000): *Modele wektorowo- autoregresyjne VAR. Metodologia i zastosowania*. ABSOLWENT, Łódź.
- Mills T.C. (1993): *The econometric modelling of financial time series*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Moshirian F. (2004): Elements of global financial stability. *Journal of Multinational Financial Management*, vol.14.
- Mundell R. (2000): Currency Areas, Volatility and Intervention. *Journal of Policy Modeling*, vol. 22.
- Mussa M. (2002): The euro versus the dollar: not a zero sum game. *Journal of Policy Modeling*, vol. 24.
- Osińska M. (2006): *Ekonometria finansowa*. PWE, Warszawa.
- Ravenna F. (2005): *The European Monetary Union as a commitment device for new EU member states*. Working Paper no. 516. European Central Bank, Frankfurt/Main.

### **The currency rates interdependence on the polish currency market**

**Summary:** In the era of increasing global economic interdependence, the transmission of movements in international financial markets constitutes a significant issue for economic policy, especially in transient periods when the markets are heavily agitated. The literature on the transmission of movements between financial markets has focused the possible impact of Euro as a new world currency. The VAR model with current and lagged currency data was employed to investigate the exchange rate dependence between the Polish Zloty and two of the world major currencies, i.e. US Dollar and Euro. The analysis has shown that the EURO/UESD exchange rate determines to a large extent the Polish Zloty exchange rate to USD. This suggests that Polish Zloty is in informal monetary union with euro.

**Key words:** currency exchange rates; Euro; US Dollar, Polish Zloty; VAR model

Agata Binderman  
Katedra Ekonometrii i Informatyki, SGGW  
e-mail: abinderman@mors.sggw.waw.pl

## KLASYFIKACJA OBIEKTÓW OPARTA NA DWÓCH WZORCACH

**Streszczenie:** W pracy, podano sposób porządkowania obiektów (wierszy) w macierzy danych na podstawie dwóch wzorców. Proponowana metoda, do budowy syntetycznego miernika generującego porządek w zbiorze obiektów, wykorzystuje zarówno pojęcie wzorca, jak i funkcji użyteczności. Podane w pracy postaci funkcji użyteczności mają tę własność, że dwa obiekty, które są jednakowo odległe względem metryki Euklidesa od obiektu maksymalnego oraz obiektu minimalnego, mają tę samą użyteczność. W pracy zamieszczony został przykład, który pokazuje, że obiekt uznany za najgorszy według jednego wzorca może być najlepszy według drugiego wzorca.

**Słowa kluczowe:** mierniki syntetyczne, metryka, funkcja użyteczności, wzorzec, normalizacja, klasyfikacja.

### WSTĘP

Do analizy zjawisk złożonych takich jak np.: rozwój gospodarczy i społeczny, poziom rozwoju i potencjał rolnictwa, ocena przedsiębiorstw oraz województw i gmin, poziom i jakość życia społeczeństwa, konieczne jest rozważenie wielu czynników ekonomicznych. Czynniki, które traktowane są jako zmienne objaśniające dane zjawisko, mogą być zarówno mierzalne jak i niemierzalne. Podanie ocen na podstawie tych danych ma na ogół charakter niejednoznaczny. Do oceny sumarycznej zjawisk złożonych stosuje się zmienne syntetyczne (agregatowe). [Zeliaś A. 1997]. Zastąpienie ciągu wielu zmiennych objaśniających badanego zjawiska przez zmienną syntetyczną daje pewną ocenę (niejednoznaczna) badanego zjawiska. Zmienne syntetyczne poza swą niejednoznacznością mają jeszcze taką wadę, że nie zawsze można im nadać interpretację merytoryczną. Istnieje wiele metod tworzenia zmiennych syntetycznych. Metody te można podzielić na wzorcowe i bezwzorcowe (metoda sum standaryzowanych wartości, pierwszego czynnika wspólnego), [Pociecha i in. 1988]. Metody wzorcowe zakładają istnienie pewnego hipotetycznego obiektu wzorcowego, uporządkowanie badanych obiektów dokonuje się w zależności od osiągniętych przez nich odległości od obiektu wzorcowego.

Metody te wykorzystują odpowiednio wybrane zmienne diagnostyczne (objaśniające), charakteryzujące badane zjawisko, różnią się między sobą, co do sposobu normalizacji zmiennych oraz postaci funkcji je agregujących [Hellwig 1968; Bartosiewicz 1976; Borys 1978]. Wśród zmiennych objaśniających wyróżnia się zmienne, które działają w sposób pobudzający (tzw. stymulanty), podczas gdy

inne wpływają hamująco na rozwój badanego zjawiska (tzw. destymulanty). Przyjmijmy założenie, że zmiennymi stymulantami nazywać będziemy takie zmienne, których większe wartości świadczą o wyższym poziomie rozwoju badanego zjawiska, a zmiennymi destymulantami nazywać będziemy takie zmienne, których mniejsze wartości świadczą o wyższym poziomie rozwoju [zob. Borkowski B., Dudek H., Szczesny W. 2004; Zeliaś A. 2000]. Oczywiście poza stymulantami i destymulantami występują również nominanty - zmienne o trudnym do sprecyzowania sposobie oddziaływania na poziom rozwoju badanego zjawiska, jak również zmienne jakościowe. Określenie charakteru zmiennych opiera się na przesłankach merytorycznych. Przy braku odpowiedniej teorii można się posłużyć np. metodą opinii zespołu ekspertów.

Otrzymane w pracy rezultaty autorka wykorzystała do badania przestrzennego zróżnicowania polskiego rolnictwa [Binderman A. 2006]. Spośród wielu prac, poświęconym zastosowaniu wielowymiarowych metod porównawczych do badania struktur ekonomicznych regionów wymienić można prace [Zeliaś 2000; Malina 2004, Binderman 2005].

## FUNKCJA UŻYTECZNOŚCI

W dalszej części rozważań założmy, że dane zjawisko jest opisane przez zmienne będące stymulantami. Osiągnąć to można poprzez eliminację zmiennych neutralnych, nadanie zmiennym jakościowym wartości liczbowych, przekształcenie destymulant w stymulanty (np. odwrócenie wartości destymulant). Bez straty dla ogólności rozważań, założmy również, że rozważane stymulanty po dokonaniu normalizacji i zmianie układu współrzędnych poprzez przesunięcie, mają wartości nieujemne. Przy takim podejściu dany obiekt (obserwacja) badanego zjawiska jest opisany za pomocą wektora, będącego elementem przestrzeni  $\mathfrak{R}_+^n := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \geq 0, k=1,2,\dots,n\}$ , gdzie  $n \geq 1$  jest ilością zmiennych zakwalifikowanych do oceny zjawiska. Do klasyfikacji danych obiektów obserwowanego zjawiska, przy pomocy mierników syntetycznych, wygodne może być użycie aparatu matematycznego stworzonego w teorii ekonomii dobrobytu (popytu) [zob. Allen R. 1961; Panek E. 2000, 2003]. W teorii tej opisane jest pojęcie funkcji użyteczności i przyjmuje się, że indywidualna użyteczność badanego obiektu jest mierzalna.

Rozważmy teraz problem polegający na klasyfikacji  $m \in N$  obiektów badanego zjawiska za pomocą  $n \in N$  zmiennych. Zgodnie z przyjętymi wcześniej założeniami każdy taki obiekt daje się przedstawić za pomocą wektora należącego do przestrzeni  $\mathfrak{R}_+^n$ . Niech wektor  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , opisuje  $i$ -ty obiekt.

Jeżeli  $x_{ik} > x_{jk}$  ( $x_{ik} \geq x_{jk}$ ) dla  $k=1,2,\dots,n$  to pisać będziemy  $\mathbf{x}_i > \mathbf{x}_j$ , ( $\mathbf{x}_i \geq \mathbf{x}_j$ ), gdzie  $i, j \in [1,m]$ . Nietrudno zauważyć, że jeżeli  $\mathbf{x}_i > \mathbf{x}_j$  i  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$  to naturalnym jest nazywać obiekt  $\mathbf{x}_i$  lepszym (wyżej ocenianym) od obiektu  $\mathbf{x}_j$ . Istotnie oznacza to, że żadna ze



składowych wektora  $\mathbf{x}_i$  nie jest mniejsza od odpowiednich składowych wektora  $\mathbf{x}_j$ , a przynajmniej jedna z nich ma wartość większą, tj. istnieje takie  $k \in [1, n]$ , że  $x_{ik} > x_{jk}$ . Z tego względu, w celu uporządkowania rozważanych obiektów przyjmijmy następującą definicję funkcji użyteczności będącą liczbową charakterystyką naszych preferencji (porównaj z definicją funkcji użyteczności w teorii popytu w warunkach niedosytu [Panek 2000, 2003]).

**DEFINICJA 1.** Każdą rosnącą funkcję  $u: \mathfrak{R}_+^n \rightarrow \mathfrak{R}$  nazywać będziemy *funkcją użyteczności*. Z definicji wynika, że dla dowolnej pary wektorów  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}_+^n$  spełniona jest implikacja:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y}).$$

Dlatego też w dalszej części pracy obiekt  $\mathbf{x}$  uważać będziemy za lepszy od obiektu  $\mathbf{y}$ , jeżeli  $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ , oznacza to, że obiekt lepszy od drugiego obiektu ma większą od niego użyteczność. Fakt ten zapisywać będziemy w następujący sposób:  $\mathbf{y} < \mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ ). Obiekty  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  uważać będziemy za jednakowo dobre (obojętne), względem przyjętej funkcji użyteczności  $u$ , jeżeli  $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y})$ . Fakt ten zapisywać będziemy w następujący sposób:  $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ ). W pierwszym przypadku mówić będziemy, że obiekt  $\mathbf{x}$  jest *silnie preferowany* nad  $\mathbf{y}$ , w drugim, że obiekty  $\mathbf{y}$  i  $\mathbf{x}$  są *indyferentne*. Jeżeli obiekty  $\mathbf{y}$  i  $\mathbf{x}$  są indyferentne lub obiekt  $\mathbf{x}$  jest silnie preferowany nad  $\mathbf{y}$  to mówić będziemy, że obiekt  $\mathbf{x}$  jest *ślabo preferowany* nad  $\mathbf{y}$ . Symbol  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$  lub  $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$  oznaczać będzie alternatywę:  $\mathbf{x} > \mathbf{y}$  lub  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ .

Zdefiniowane powyżej związki między obiektami wyznaczają odpowiednio relację silnej preferencji, relację indyferencji oraz relację preferencji (śłabej) [zob. Panek 2000, 2003]. Oczywiście w teorii popytu relacja preferencji konsumenta może indukować funkcję użyteczności. Przyjmując jakąkolwiek postać funkcji użyteczności przesadzamy istnienie relacji preferencji, którą ta funkcja opisuje.

## WYKORZYSTANIE FUNKCJI UŻYTECZNOŚCI DO KLASYFIKACJI DANYCH

Przyjmijmy dla obiektów wzorcowych następujące oznaczenia:

$$\mathbf{x}_0 := (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}), \quad \mathbf{x}_{m+1} := (x_{m+1,1}, x_{m+1,2}, \dots, x_{m+1,n}), \quad \text{gdzie}$$

$$x_{0,k} := \min_{1 \leq i \leq m} x_{ik}, \quad x_{m+1,k} := \max_{1 \leq i \leq m} x_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Oczywistym jest, że tak określone obiekty  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1}$  (być może fikcyjne) są odpowiednio, niegorsze, nielepsze od pozostałych  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ , tj.  $\mathbf{x}_{m+1} \geq \mathbf{x}_i$  oraz  $\mathbf{x}_i \geq \mathbf{x}_0$ , dla każdego  $i: m \geq i \geq 1$ .

W przypadku, gdy  $\mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{x}_{m+1}$  są różne od rozważanych obiektów  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ , to spełniają one następującą rolę:  $\mathbf{x}_{m+1}$  **obiektem najlepszego**,  $\mathbf{x}_0$  **obiektem najgorszego**. Obiekty te traktowane będą, jako **wzorcowe**. W tym przypadku, jeżeli znana jest

funkcja użyteczności  $u$  określona na przestrzeni wektorów  $\mathfrak{R}_+^n$  to dla każdego  $i \in [1, m]$ :  $u(\mathbf{x}_{m+1}) > u(\mathbf{x}_i)$  oraz  $u(\mathbf{x}_0) < u(\mathbf{x}_i)$ . Można przyjąć różne kryteria wyboru funkcji użyteczności, aby przy jej pomocy ustalić relację porządku liniowego [zob. Panek 2000, 2003, Malawski 1999] określoną na iloczynie kartezjańskim  $W \times W \subset \mathfrak{R}_+^n \times \mathfrak{R}_+^n$ , gdzie  $W := \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m+1}\}$ .

Kryterium przyjęte w pracy opiera się na pojęciu odległości pomiędzy rozważnymi obiektami. Pojęcie odległości między dwoma obiektami wiąże się bezpośrednio z koniecznością normalizowania zmiennych, które wyrażone są w różnych jednostkach fizycznych. Normalizacja ta polega na przekształceniu wartości zmiennych wyrażonych w różnych jednostkach w celu doprowadzenia ich do wzajemnej porównywalności. W literaturze przedmiotu wyróżnia się normalizację cech poprzez przekształcenie **ilorazowe**, **standaryzację** i **unitaryzację** [zob. Kukuła 2000; Gatnar 1998; Zeliaś 2000; Strahl, Walesiak 1996, 1997]. Normalizowanie jest konieczne do konstrukcji mierników syntetycznych. Pojęcie **metryki (odległości)** odgrywa fundamentalną rolę w badaniach ekonomicznych, szczególnie przy porównywaniu struktury ekonomicznej regionów [Stone 1970, Zeliaś 2002; Malina 2004]. Niech  $X = \mathfrak{R}^n$ , to *metryką* nazywamy każdą funkcję  $d: X \times X \rightarrow \mathfrak{R}_+ = [0, +\infty)$  spełniającą następujące trzy warunki:

- 1)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ ,
- 2)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,
- 3)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ , dla wszystkich  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , należących do  $X$ .

Metryka każdej parze wektorów przyporządkowuje liczbę nieujemną, zwaną odległością między nimi, liczbę  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  nazywa się *odległością wektora  $\mathbf{x}$  od wektora  $\mathbf{y}$* . W ekonomii stosuje się bardzo wiele różnych metryk, przykłady ich można znaleźć w pracach [Rolewicz 1985; Zeliaś 2002; Kukuła 2000] i innych, są nimi na przykład:

$$d_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (|x_1 - y_1|^k + \dots + |x_n - y_n|^k)^{1/k}, \quad k \geq 1, \quad d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\},$$

gdzie:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$ .

Metryki te są często nazywane metrykami Minkowskiego. Dla  $k=1$  jest to tzw. metryka liniowa Hamminga (miejska, uliczna, metropolitarna), dla  $k=2$  to metryka Euklidesa, natomiast dla  $k=\infty$  metryka Czebyszewa. Autorka proponuje w pracy przyjąć naturalne kryterium, według którego dwa obiekty o identycznych odległościach od obiektu najlepszego i najgorszego byłyby względem siebie obojętne, tj. miały tę samą użyteczność. Jeżeli zatem  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  ( $i, j \in [1, m]$ ) oznacza odległość między obiektami  $\mathbf{x}_i$  i  $\mathbf{x}_j$  to  $\mathbf{x}_i \sim \mathbf{x}_j \Leftrightarrow u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_j) \Leftrightarrow d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0) \wedge d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1}) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1})$ . Funkcją użyteczności, która spełnia powyższy warunek, przy wyborze odległości na podstawie metryki Euklidesa jest np. funkcja liniowa będąca iloczynem skalarnym wektorów  $\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{x}_i$  tj.

$$u(\mathbf{x}_i) := \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i \rangle = \sum_{k=1}^n (x_{m+1,k} - x_{0,k}) x_{ik}; \quad (1)$$

gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, m+1$ . Dla tak określonej funkcji użyteczności słuszne jest następujące twierdzenie.

**TWIERDZENIE 1.** Dwa obiekty  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$  mają tę samą użyteczność wtedy i tylko wtedy, gdy różnica kwadratów ich odległości (według metryki Euklidesa) od obiektu najlepszego jest równa różnicy kwadratów ich odległości od obiektu najgorszego tj.

$$u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_j) \Leftrightarrow d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1}) - d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1}) = d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) - d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0),$$

gdzie:  $d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k})^2$ ;  $i, j \in [0, m+1]$ .

**DOWÓD 1.** Warunek wystarczający.

Niech  $u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_j)$ , wówczas  $\langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_j \rangle$  czyli:

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{m+1,k} - \mathbf{x}_{0,k}) \mathbf{x}_{i,k} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{m+1,k} - \mathbf{x}_{0,k}) \mathbf{x}_{j,k} \text{ oraz } \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{m+1,k} - \mathbf{x}_{0,k}) (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k}) = 0.$$

Stąd:  $\sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k}) (\mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{x}_{j,k} - 2\mathbf{x}_{m+1,k} - \mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k} + 2\mathbf{x}_{0,k}) = 0$ ,

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k}) (\mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{x}_{j,k} - 2\mathbf{x}_{m+1,k}) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k}) (\mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{x}_{j,k} - 2\mathbf{x}_{0,k}),$$

$$\sum_{k=1}^n \{ (\mathbf{x}_{i,k})^2 - 2\mathbf{x}_{m+1,k} (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k}) - (\mathbf{x}_{j,k})^2 \} = \sum_{k=1}^n \{ (\mathbf{x}_{i,k})^2 - 2\mathbf{x}_{0,k} (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k}) - (\mathbf{x}_{j,k})^2 \},$$

$$\sum_{k=1}^n \{ (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{m+1,k})^2 - (\mathbf{x}_{j,k} - \mathbf{x}_{m+1,k})^2 \} = \sum_{k=1}^n \{ (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{0,k})^2 - (\mathbf{x}_{j,k} - \mathbf{x}_{0,k})^2 \},$$

czyli  $d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1}) - d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1}) = d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) - d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0)$ . W podobny sposób dowodzi się warunku koniecznego. Z powyższego twierdzenia wynika ważny wniosek.

**WNIOSEK** Jeżeli obiekty  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$  są jednakowo odległe od obiektu maksymalnego  $\mathbf{x}_{m+1}$  oraz obiektu minimalnego  $\mathbf{x}_0$ , tj.  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1}) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1})$ ,  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0)$  to obiekty te mają tę samą użyteczność. Istotnie, jeżeli:

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1}) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1}) \text{ oraz } d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0) \text{ to}$$

$$d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1}) - d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1}) = d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) - d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0) = 0, \text{ stąd } u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_j).$$

Jeżeli zatem dwa obiekty są jednakowo oddalone względem metryki Euklidesa od obiektu najlepszego  $\mathbf{x}_{m+1}$  i obiektu najgorszego  $\mathbf{x}_0$  to ich użyteczności są identyczne.

**UWAGA 1.** Powierzchniami obojętności ( $u(x) = \text{constans}$ ) generowanymi przez funkcję użyteczności  $u$  określoną za pomocą wzoru (1), są hiperpłaszczyzny: proste dla  $n=2$ , płaszczyzny dla  $n=3$ .

**DEFINICJA 2.** Układ wektorów  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}$  nazywać będziemy znormalizowanym jeżeli obiekty  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1}$  są reprezentowane przez wektor zerowy i jednostkowy tj.

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0), \mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1).$$

Oczywiście, jeżeli układ wektorów  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}$  jest znormalizowany to  $0 \leq x_{i,k} \leq 1$  dla każdego  $i = 0, 1, \dots, m+1; k = 1, 2, \dots, n$ .

Ze wzoru (1) wynika:

**UWAGA 2.** Jeżeli układ wektorów  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$  jest znormalizowany to:

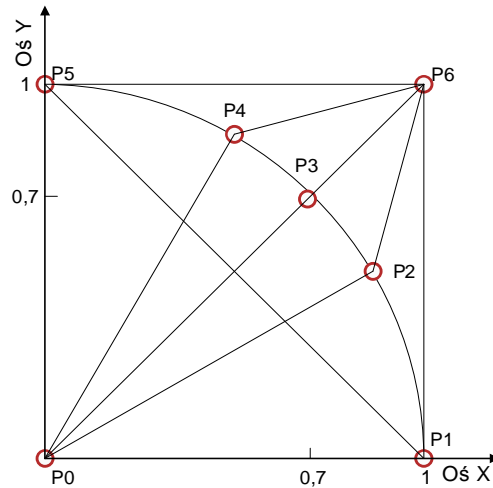
$$u(\mathbf{x}_0) = 0, u(\mathbf{x}_{m+1}) = n, u(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^n x_{i,k} \quad (2)$$

**PRZYKŁAD 1.** Rozważmy na płaszczyźnie zmiennych rzeczywistych  $Oxy$ , siedem punktów o współrzędnych:

$$P_0 = (0; 0), P_1 = (1; 0), P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), P_3 = (0,7; 0,7), P_4 = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_5 = (0; 1), P_6 = (1; 1).$$

Położenie punktów na płaszczyźnie ilustruje poniższy rysunek.

Rys 1 Geometryczna interpretacja przykładu



Źródło: Opracowanie własne

Załóżmy, że punkty te opisują odpowiednio pewne badane obiekty  $w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ , charakteryzowane za pomocą pary cech będących stymulantami. Obiekt  $w_0$  opisywany za pomocą punktu  $P_0$  jest uznany za najgorszy, obiekt zaś  $w_6$  jest najlepszy. Ocena pozostałych obiektów jest dokonywana według odległości (obliczonej przy pomocy metryki Euklidesa) punktów  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  najpierw od punktu  $P_0$  potem od punktu  $P_6$ . Przyjmijmy, że obiekt jest uważany za lepszy od

drugiego obiektu, gdy jest: położony dalej od najgorszego - według pierwszego kryterium, położony bliżej najlepszego obiektu- według drugiego kryterium. Łatwo zauważyć, że przy takich kryteriach obiekt  $w_3$  jest najgorszy według pierwszego kryterium, lecz jest najlepszy według drugiego kryterium, spośród obiektów  $w_5, w_4, w_3, w_2, w_1$ . Jeżeli na rozważanym zbiorze obiektów określimy funkcję użyteczności  $u$ , określoną za pomocą wzoru (1), to ich użyteczności przedstawiają się następująco:  $u(w_0)=0$ ;  $u(w_1)=u(w_5)=1$ ;  $u(w_2)=u(w_4)=1,38$ ;  $u(w_3)=1,4$ ;  $u(w_6)=2$ . Według kryterium większej użyteczności obiektu, mamy następujące uporządkowanie:  $w_0 < w_1 \sim w_5 < w_2 \sim w_4 < w_3 < w_6$ .

Na odcinku wyznaczonym przez punkty  $P_1$  i  $P_5$  leżą obiekty, które mają tę samą użyteczność, równą 1. Odcinek ten jest tak zwaną krzywą obojętności generowaną przez funkcje użyteczności  $u$  (zob. Panek E. 2000). Nietrudno zauważyć, że w tym przypadku krzywe obojętności są odcinkami prostych o równaniach  $x+y=c$ ,  $0 < c < 2$ . Istotnie, jeżeli punkty  $P(s,t)$ ,  $Q(v,z)$ ,  $0 < s,t,v,z < 1$  leżą na prostej o równaniu  $x + y = c$ , to:  $u(P) = \langle (1,1), (t,s) \rangle = t+s = c$ ,  $u(Q) = \langle (1,1), (v,z) \rangle = v+z = c$ . Oznacza to, że  $P \sim Q$ .

Powyższe rozważania pokazują, że *wybór wzorca odgrywa istotną rolę dla rankingów*, jak również przy grupowaniu obiektów. Podany w przykładzie sposób porządkowania obiektów za pomocą funkcji użyteczności *opiera się na dwóch wzorcach*.

Jeżeli dana funkcja użyteczności  $u$  indukuje relacje preferencji obiektów zbioru  $W$  to funkcja złożona  $g(u(x))$ , gdzie  $g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  jest funkcją rosnącą, jest również funkcją użyteczności, generującą tą samą relację preferencji w zbiorze obiektów  $W$  co funkcja  $u$ .

Wykorzystując powyższą własność celowe jest unormowanie funkcji użyteczności polegające na wybraniu takiej funkcji  $g$ , aby jej wartość dla obiektu najgorszego wynosiła 0, wartość zaś dla obiektu najlepszego wynosiła 1, to jest by:

$$g(u(\mathbf{x}_0))=0, \quad g(u(\mathbf{x}_{m+1}))=1.$$

Funkcją o tej własności może być na przykład funkcja liniowa:

$$g(t)=(t-t_0)/(t_1-t_0), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (3)$$

gdzie  $t_1 = u(\mathbf{x}_{m+1})$ ,  $t_0 = u(\mathbf{x}_0)$ . Przy oczywistym założeniu, że  $t_1 > t_0$ , gdyż dopuszczenie przypadku  $t_1 = t_0$  oznaczałoby, że wszystkie rozważane obiekty mają tą samą użyteczność, otrzymaną za pomocą funkcji  $u$ . W tym przypadku funkcja:

$$f(\mathbf{x}_i) := g(u(\mathbf{x}_i)) = (u(\mathbf{x}_i) - u(\mathbf{x}_0)) / (u(\mathbf{x}_{m+1}) - u(\mathbf{x}_0)), \quad i=0,1,\dots,m+1, \quad (4)$$

określona na zbiorze obiektów  $W$ , jest funkcją użyteczności mającą tą własność, że  $f(\mathbf{x}_0)=0$ ,  $f(\mathbf{x}_{m+1})=1$ . Jeżeli funkcja użyteczności  $u$  określona jest za pomocą wzoru (1) to przy pomocy wzoru (4) otrzymujemy postać nowej funkcji użyteczności:

$$f(\mathbf{x}_i) = \left[ \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i \rangle - \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle - \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1} \rangle + \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle \right]^{-1} =$$

$$= \|\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0\|^{-2} \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 \rangle, \quad i=0,1,\dots,m+1, \quad (5)$$

gdzie norma wektora  $\|\mathbf{x}_i\| := (\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle)^{1/2}$  (zob. Panek E., 2000, 2003). Funkcja  $f$  indukuje tą samą relację preferencji, co funkcja użyteczności  $u$ , oczywiście  $f(\mathbf{x}_0)=0$ ,  $f(\mathbf{x}_{m+1})=1$ .

Jeżeli układ wektorów  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}$  jest znormalizowany to:

$$f(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{i,k}, \quad i=0,1,\dots,m+1. \quad (6)$$

Wzór (2) jak i wzór (6) należą do najczęściej stosowanych addytywnych formuł agregacyjnych [por. Cieślak M. 1993, Kukuła K. 2000].

Zauważmy ponadto, że jeżeli wektor  $\mathbf{s} := (\mathbf{x}_{m+1} + \mathbf{x}_0)/2$  reprezentuje obiekt „pośredni” pomiędzy najlepszym  $\mathbf{x}_{m+1}$  a najgorszym  $\mathbf{x}_0$  to  $f(\mathbf{s})=1/2$ . Istotnie

$$\begin{aligned} f(\mathbf{s}) &= \|\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0\|^{-2} \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{s} - \mathbf{x}_0 \rangle = \|\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0\|^{-2} \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, (\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0)/2 \rangle \\ &= 0,5 \|\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0\|^{-2} \langle \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0,5. \end{aligned}$$

Istnieje skończenie wiele rosnących funkcji  $g$  jednej zmiennej, spełniających warunki:

$$g(t_0)=0, \quad g(t_1)=1, \quad g((t_1+t_0)/2)=1/2; \quad t_0, t_1 \in \mathfrak{R}, \quad t_0 \neq t_1.$$

Oczywiście, istnieje również nieskończenie wiele funkcji, które będąc funkcjami rosnącymi mają te same wartości dla obiektów, które są jednakowo odległe od obiektu maksymalnego  $\mathbf{x}_{m+1}$  oraz obiektu minimalnego  $\mathbf{x}_0$ . Przykładem jest funkcja określona w poniższym twierdzeniu.

**TWIERDZENIE 2.** Funkcja:

$$U(\mathbf{x}_i) = \frac{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1}) - d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1})}{2d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1})}, \quad i = 0, 1, \dots, m, m+1, \quad (7)$$

jest funkcją użyteczności przyjmującą wartości z przedziału  $[0,1]$ , przy czym  $U(\mathbf{x}_0)=0$ ,  $U(\mathbf{x}_{m+1})=1$ . Jeżeli  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1})=d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1})$  i  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0)$  to  $U(\mathbf{x}_i)=U(\mathbf{x}_j)$ .

Oczywistym jest, że powierzchnie obojętności generowane przez równanie  $U(\mathbf{x})=constans$ , nie będą, jak w przypadku funkcji liniowej u hiperpłaszczyznami. Warto jednak zauważyć, że w przypadku  $n=2$  krzywa obojętności wyznaczona przez równanie  $U(\mathbf{x})=c$ ,  $c \in [0,1]$  jest odcinkiem prostej o równaniu  $x_2=1-x_1$  (przekątną kwadratu) dla  $c=0,5$  oraz hiperbolą dla pozostałych  $c$ . Wynika to z faktu, że hiperbola jest miejscem geometrycznym punktów, których różnica odległości od dwóch stałych punktów zwanych ogniskami jest stała.

**PRZYKŁAD 2** Rozważmy zbiór siedmiu obiektów  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5, \mathbf{w}_6$ , z poprzedniego przykładu, charakteryzowanych za pomocą pary cech będących

stymulantami. Obiekty te traktowane, jako wektory, tworzą znormalizowany układ wektorów (Definicja 2). Poniższa tabela podaje ich użyteczności obliczone za pomocą dwóch znormalizowanych funkcji użyteczności.

Tabela 1. Użyteczności obiektów

Funkcja użyteczności	w <sub>0</sub>	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	w <sub>3</sub>	w <sub>4</sub>	w <sub>5</sub>	w <sub>6</sub>
f(w <sub>i</sub> )-wzór (5)	0	0,5	0,683	0,7	0,683	0,5	1
U(w <sub>i</sub> )-wzór (7)	0	0,5	0,671	0,7	0,671	0,5	1

Zródło: Opracowanie własne

Łatwo zauważyć, że funkcje te zachowują preferencje z przykładu pierwszego.

## WNIOSKI

Przedstawione w pracy rozważania pokazują, że przy klasyfikacji obiektów wybór wzorca odgrywa istotną rolę. Zaproponowany sposób porządkowania liniowego obiektów w równym stopniu wykorzystuje obiekt wzorcowy najgorszy jak i obiekt wzorcowy najlepszy. Zaprezentowane w pracy podejście do problemu klasyfikacji obiektów nie wyczerpuje badań w tym zakresie a przydatność metody zweryfikować mogą tylko badania oparte na rzeczywistych danych.

## LITERATURA

- Allen R. G. D. (1964) *Ekonomia matematyczna*, PWN, Warszawa.
- Bartosiewicz S. (1976) Propozycja metody tworzenia zmiennych syntetycznych, *Prace Naukowe AE we Wrocławiu*, nr 84, Wrocław.
- Binderman A. (2005) O problemie wyboru wzorca przy badaniu przestrzennego zróżnicowania potencjału rolnictwa w Polsce, *Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – V*, Warszawa, str. 46.
- Binderman A. (2006) Wykorzystanie funkcji użyteczności do badania przestrzennego zróżnicowania rolnictwa-praca złożona do *Roczników Naukowych Stowarzyszenia Ekonomistów Rolnictwa i Agrobiznesu*.
- Borkowski B, Dudek H., Szczesny W. (2004) *Ekonometria. Wybrane zagadnienia*, PWN, Warszawa.
- Borys T. (1978) Propozycja agregatowej miary rozwoju obiektów, „*Przegląd Statystyczny*”, z. 3.
- Cieślak M. (1993) Ekonomiczne zastosowanie mierników syntetycznych ze zmiennym wzorcem, [w:] *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, AE, Kraków.
- Gantar E. (1998) *Symboliczne metody klasyfikacji danych*, PWN, Warszawa.
- Hellwig Z. (1968) Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę kwalifikowanych kadr, „*Przegląd Statystyczny*”, z. 4.
- Kukuła K. (2000) *Metoda unitaryzacji zerowanej*, PWN, Warszawa.
- Malawski A. (1999) *Wprowadzenie do ekonomii matematycznej*, AE, Kraków.

- Malina A. (2004) Wielowymiarowa analiza przestrzennego zróżnicowania struktury gospodarki Polski według województw, AE, Seria Monografie nr 162, Kraków.
- Panek E. (2000) Ekonomia matematyczna, Akademia Ekonomiczna, Poznań.
- Panek E. (red.) (2003) Podstawy ekonomii matematycznej, AE, Poznań.
- Pociecha J., Podolec B., Sokołowski A., Zając K. (1988) Metody taksonomiczne w badaniach społeczno-ekonomicznych, PWN, Warszawa.
- Rolewicz S. (1985) Metric linear spaces, PWN-Polish Scientific Publishers and D. Reidel, Warszawa-Dordrecht.
- Stone R., (1970) Matematyka w naukach społecznych, PWE, Warszawa.
- Strahl D., Walesiak M. (1996) Normalizacja zmiennych w skali przedziałowej i ilorazowej w referencyjnym systemie granicznym, Seria: Taksonomia, z. 3, Sekcja Klasyfikacji i Analizy Danych, Wrocław – Kraków - Jelenia Góra.
- Strahl D., Walesiak M. (1997) Normalizacja zmiennych w granicznym systemie referencyjnym, „Przegląd Statystyczny”, z. 1.
- Zegar J. (2003) Zróżnicowanie regionalne rolnictwa, GUS, Warszawa.
- Zeliaś A. (1997) Teoria prognozy, PWE, Warszawa.
- Zeliaś A. (2000) Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania poziomu życia w Polsce w ujęciu dynamicznym, Kraków.

### **On a classification of objects basing on two models**

**Summary:** In the present paper, a manner of classification of objects which is based on two model objects is given. The applied method uses comparative multidimensional analysis and conception of models, normalization, preference relations and utility functions as the preference indicators. The given utility functions have such property that two considered objects have an identical utility if their distances from two different fixed model objects are equal.

**Key words:** synthetic measures, metrics, utility function, model, normalization, classification.



Lucyna Błażejczyk-Majka, Radosław Kala  
Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych  
Akademia Rolnicza im. Augusta Cieszkowskiego w Poznaniu  
e-mail: lmajka@au.poznan.pl, kalar@au.poznan.pl

## ESTYMACJA UDZIAŁÓW METODĄ REGRESJI GRZBIETOWEJ

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono metodę estymacji opartą na regresji grzbietowej, która ma zastosowanie, gdy zmienne objaśniające są silnie skorelowane i równocześnie nie jest możliwa redukcja modelu. Taka sytuacja ma często miejsce podczas próby oceny udziału poszczególnych nakładów w produkcji całkowitej. Rozważania teoretyczne zilustrowano estymując udziały czterech podstawowych nakładów, tj. ziemi, kapitału obrotowego, kapitału trwałego i pracy, w produkcji rolniczej Francji i Wielkiej Brytanii na podstawie danych statystycznych za okres 1973-2003.

**Słowa kluczowe:** udziały czynników produkcji, funkcja Cobba-Douglasa, regresja grzbietowa.

### WSTĘP

Jedną z najstarszych postaci funkcji produkcji jest funkcja Cobba i Douglasa [1928]. Charakteryzuje się ona rozłącznością nakładów, co oznacza, że krańcowa stopa substytucji pomiędzy każdymi dwoma nakładami jest niezależna od poziomu zaangażowania pozostałych nakładów. Jak stwierdza Swanson [1984], funkcje o takiej własności najlepiej nadają się do opisu biologicznych procesów produkcyjnych. Funkcję Cobba-Douglasa wyróżnia ponadto prostota pozwalająca na estymację jej parametrów metodami regresji wielokrotnej, przy czym szacowane parametry nie tracą swojej interpretacji ekonomicznej, nawet jeśli zmienne wyrażone są w postaci indeksów. Wymienione własności powodują, że funkcja Cobba-Douglasa jest często wykorzystywana w badaniach ekonomiczno-rolniczych [Stańko 1987].

Jak wiadomo, nakłady biorące udział w procesie produkcji są zwykle względem siebie komplementarne lub substytucyjne. O zależnościach tych możemy się przekonać analizując skorelowanie zmiennych objaśniających w oparciu o wieloletnie szeregi czasowe. Jednak silne skorelowanie zmiennych objaśniających powoduje, że standardowa analiza regresji oparta na metodzie najmniejszych kwadratów może być nieskuteczna, dostarczając irracjonalnych ocen parametrów funkcji produkcji [Doll 1974]. W takich przypadkach zaleca się redukcję modelu regresji poprzez eliminację jednej lub kilku spośród najbardziej skorelowanych zmiennych objaśniających. Takie rozwiązanie nie jest jednak przydatne, gdy celem oszacowania funkcji Cobba-Douglasa jest uzyskanie ocen elastyczności produkcji względem wszystkich nakładów, które przy założeniu

liniowej jednorodności funkcji produkcji mogą być utożsamione z udziałami poszczególnych nakładów w procesie produkcji [Henrichsmeyer i Witzke 1991]. W takim przypadku możliwym rozwiązaniem jest skorzystanie z regresji grzbietowej. Przedstawienie tej właśnie metody w zastosowaniu do oszacowania udziałów czterech podstawowych nakładów w produkcji rolniczej jest celem niniejszej pracy. Rozważania teoretyczne zostaną zilustrowane analizą rolnictwa francuskiego i brytyjskiego w oparciu o dane statystyczne obejmujące okres 1973-2003. Wybór tych krajów różnych producentów rolniczych był podyktowany z jednej strony dostępnością danych ekonomiczno-statystycznych, a z drugiej strony chęcią pokazania, że proponowane rozwiązanie jest niezależne od wielkości produkcji oraz od jej struktury.

## FUNKCJA COBBA-DOUGLASA I ESTYMACJA STANDARDOWA

Wśród głównych nakładów produkcji rolniczej poza pracą ( $L$ ) i kapitałem trwałym ( $K$ ) zwykle wyróżnia się ziemię ( $Z$ ) oraz kapitał obrotowy ( $N$ ). Wiążąc wymienione nakłady z wielkością produkcji rolniczej ( $Q$ ) za pomocą funkcji Cobba-Douglasa, otrzymamy zależność:

$$Q = AL^{\beta_L} K^{\beta_K} Z^{\beta_Z} N^{\beta_N}, \quad (1)$$

gdzie  $A$  ( $A > 0$ ) jest parametrem efektywności, natomiast parametry  $\beta_i$  ( $0 < \beta_i < 1$ ),  $i = L, K, Z, N$ , są elastycznościami produkcji względem nakładów. Jeżeli funkcja  $Q$  jest liniowo jednorodna, to suma elastyczności jest równa jedności, co pozwala utożsamiać parametry  $\beta_i$ ,  $i = L, K, Z, N$ , z udziałami nakładów w produkcji  $Q$  [patrz np.: Henrichsmeyer i Witzke 1991; Nasiłowski 2004].

Jeżeli proces produkcji jest rozpatrywany w ujęciu dynamicznym, to dodatkowo w zależności (1) należy uwzględnić efekty postępu technicznego. Standardowym podejściem w takim przypadku jest przyjęcie założenia, że postęp oddziałuje na wydajność całego procesu produkcyjnego. Wtedy funkcja produkcji przyjmie postać:

$$Q_t = AL_t^{\beta_L} K_t^{\beta_K} Z_t^{\beta_Z} N_t^{\beta_N} e^{\gamma t}, \quad (2)$$

gdzie  $e^{\gamma t}$  jest funkcją określającą całościowy efekt postępu technicznego w zależności od czasu  $t$ . Tak ujęty postęp techniczny, zwany neutralnym postępem Hicksa (patrz np. Intriligator 1957; Pawłowski 1976; Antle, 1986), nie jest ukierunkowany na żaden z nakładów.

Najprostszy sposób estymacji parametrów funkcji (2) polega na jej zlogarytmowaniu, która to zależność uzupełniona o składnik losowy prowadzi do modelu regresji wielokrotnej

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad (3)$$

gdzie  $y$  jest wektorem wielkości produkcji w kolejnych okresach szeregu czasowego najpierw zlogarytmowanych, a następnie scentrowanych przez odjęcie średniej,  $X$  jest macierzą zmiennych objaśniających, przekształconych analogicznie

jak wielkości produkcji,  $\beta$  jest wektorem nieznanych udziałów uzupełnionych o parametr  $\gamma$  reprezentujący stałą stopę wzrostu produkcji wynikającą z postępu technicznego, a  $\varepsilon$  jest wektorem nieskorelowanych błędów losowych o jednakowej wariancji  $\sigma^2$ .

Ponieważ poszczególne nakłady biorące udział w procesie wytwórczym zwykle pozostają w silnym związku, co jest związane bądź z ich komplementarnością (korelacja dodatnia) lub ich substytucyjnością (korelacja ujemna), więc kolumny macierzy  $X$  w modelu (3) mogą być bliskie liniowej współzależności. W rezultacie oceny udziałów mogą nie spełniać wymaganych założeń, a same oszacowania udziałów uzyskane metodą najmniejszych kwadratów,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y, \quad (3)$$

mogą charakteryzować się zbyt dużymi odchyleniami standardowymi.

W przypadku, gdy w wyniku współliniowości zmiennych objaśniających macierz  $X'X$  jest prawie osobliwa i nie jest dostępna żadna informacja dodatkowa, estymację parametrów w modelu (2) można oprzeć na zaproponowanej przez Hoerla i Kenarda [1970] regresji grzbietowej. Estymator grzbietowy przyjmuje wtedy postać:

$$\hat{\beta}(k) = (X'X + kI)^{-1}X'y, \quad (4)$$

gdzie  $k$  jest odpowiednio dobraną stałą dodatnią.

Estymator (4) dla  $k=0$  pokrywa się z estymatorem najmniejszych kwadratów (3), tj.  $\hat{\beta}(0) = \hat{\beta}$ . O estymatorze tym wiadomo ponadto [patrz np. Mardia, Kent i Bibby 1979], że suma kwadratów obciążeń  $\hat{\beta}_i(k)$ , składowych wektora  $\hat{\beta}(k)$ , rośnie wraz ze wzrostem wartości stałej  $k$  oraz że równocześnie suma ich wariancji maleje. Wynika stąd istnienie takiej wartości  $k > 0$ , że tzw. średni błąd kwadratowy estymatora grzbietowego jest mniejszy niż estymatora najmniejszych kwadratów. Warto tu nadmienić, że średni błąd kwadratowy jest standardową miarą jakości estymatorów obciążonych.

Ustalenie stałej  $k$  jest jednak uzależnione od znajomości nieznanych parametrów modelu. Stąd powstaje problem wyboru właściwej wartości  $k$ . Szereg takich propozycji wraz z obszernymi badaniami symulacyjnymi przedstawił ostatnio Kibria [2003]. W badaniach tych, opartych na metodzie Monte Carlo, analizowano zachowanie siedmiu estymatorów grzbietowych, z których trzy wykorzystują stałe  $k$  wyliczone według następujących formuł:

$$k_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}, \quad k_{AM} = \frac{1}{p} \sum_i^p \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}_i^2}, \quad k_{GM} = \hat{\sigma}^2 \left( \prod_i^p \hat{\beta}_i^2 \right)^{-1/p}, \quad (5)$$

gdzie  $p$  jest liczbą zmiennych objaśniających, a oceny parametrów są uzyskane metodą najmniejszych kwadratów.

Stała  $k_{LW}$  była zaproponowana przez Lawlessa i Wanga [1976], natomiast dwie pozostałe stałe, z których pierwsza wykorzystuje średnią harmoniczną, a druga średnią geometryczną, są propozycjami Kibria [2003]. W przeprowadzonych badaniach stałe te prowadziły częściej niż inne wartości do redukcji średniego błędu kwadratowego. Nie oznacza to, że tak jest zawsze lub że oceny parametrów spełnią postulowane założenia, co w rozważanym tu problemie estymacji udziałów ma znaczenie zasadnicze. Z tego względu również inne wartości stałej  $k$  muszą być brane pod uwagę.

## WSKAŹNIKI EKONOMICZNE

Dla ilustracji praktycznej przydatności regresji grzbietowej w estymacji wielkości udziałów poszczególnych nakładów w produkcji całkowitej poddamy analizie dane ekonomiczno-statystyczne z lat 1973-2003 dotyczące produkcji rolniczej Francji i Wielkiej Brytanii.

Za miarę osiągniętego poziomu produkcji ( $Q$ ) przyjęto indeksy agregatowe wielkości produkcji z całego rolnictwa (*volume index of agricultural output*), publikowane przez EUROSTAT. Są one skonstruowane wg formuły Laspeyresa, przy czym za bazę przyjęto rok 2000. Produkcja rolnicza wg metodyki EUROSTAT (*Manual on the economic accounts for Agriculture and Forestry*, 2000) obejmuje obok podstawowych kategorii, jakimi są produkcja roślinna i zwierzęca, także usługi rolnicze.

Do opisu kapitału trwałego i obrotowego wykorzystano również zmienne typu agregatowego, publikowane przez tą samą agendę i skonstruowane według tej samej formuły. I tak za miarę kapitału ( $K$ ) przyjęto indeksy ilości zużytego kapitału trwałego brutto w danym roku w procesie produkcji rolniczej (*volume index of fixed capital consumption*), w których skład wchodzi między innymi: plantacje wieloletnie, stado podstawowe, maszyny i urządzenia, budynki, wyposażenie przeznaczone do transportu, deszczownie. Natomiast kapitał obrotowy ( $N$ ) opisano za pomocą ilościowych indeksów zużycia pośredniego w poszczególnych latach (*volume index of total intermediate consumption*). W ich skład wchodzi takie wielkości jak: nasiona i materiał reprodukcyjny, pasze dla zwierząt, nawozy i ulepszcze, środki ochrony roślin, środki farmaceutyczne dla zwierząt, paliwa i smary, naprawy, materiały konserwujące maszyny i budynki.

Natomiast siłę roboczą ( $L$ ) zaangażowaną w procesie produkcji wyrażono liczbą aktywnych zawodowo w rolnictwie (*economically active population in agriculture*), a ziemię ( $Z$ ) powierzchnią użytków rolniczych (*agriculture area*). Obie te zmienne są udostępniane przez FAOSTAT.

Publikowane dane statystyczne, ze względu na ich złożoność, różnią się formą i postacią ich prezentacji. Ziemia i siła robocza jest przedstawiona w wartościach bezwzględnych, a produkcja, kapitał i nakłady w formie indeksów agregatowych dynamiki. W związku z tym wartości danych opisujących ziemię

i siłę roboczą przedstawiono również w formie indeksów dynamiki, a dodatkowo wartości wszystkich zmiennych przeliczono w stosunku do roku 1973.

## ESTYMACJA UDZIAŁÓW

Analizę regresji zwykle poprzedza wyznaczenie współczynników korelacji liniowej. Dla rolnictwa francuskiego i brytyjskiego współczynniki takie dla wielkości produkcji i badanych czterech nakładów, po ich logarytmicznej transformacji, przedstawiono w tabeli 1, przy czym nad przekątną podano korelacje wyznaczone dla Francji, a poniżej przekątnej dla Wielkiej Brytanii.

Tabela 1. Współczynniki korelacji liniowej

	Francja Wielka Brytania	Produkcja $Q$	Ziemia $Z$	Kap. obrotowy $N$	Praca $L$	Kap. trwałe $K$
Produkcja		*	-0.9203	0.9743	-0.9410	0.7578
Ziemia		-0.7838	*	-0.9247	0.9864	-0.6828
Kap. obrotowy		0.9059	-0.7713	*	-0.9478	0.8302
Praca		-0.8657	0.9502	-0.8674	*	-0.7478
Kapitał trwałe		0.0959	0.3843	0.1772	0.2815	*

Źródło: obliczenia własne

Łatwo spostrzec, że w przypadku rolnictwa francuskiego wszystkie zmienne są silnie skorelowane, podczas gdy dla rolnictwa brytyjskiego silnie skorelowane są wszystkie zmienne z wyjątkiem kapitału trwałego, który również nie wykazuje korelacji liniowej z wielkością produkcji. W konsekwencji standardowa analiza regresji może nie dawać zadowalających rezultatów. To przypuszczenie potwierdzają wyniki przedstawione w tabeli 2.

Tabela 2. Wyniki estymacji udziałów metodą najmniejszych kwadratów

Kraj	Udziały nakładów (S.D.)				Postęp		
	$\beta_Z$	$\beta_N$	$\beta_L$	$\beta_K$	$\gamma$	$R^2$	$\sigma$
Francja	2.0677 (1.0858)	1.4104 (0.1676)	1.5357 (0.5056)	-0.2868 (0.1299)	0.0699 (0.0204)	0.9733	0.0253
Wielka Brytania	0.9762 (0.5553)	0.4496 (0.2871)	2.0298 (0.5009)	-0.2777 (0.2126)	0.0367 (0.0057)	0.9531	0.0263

Źródło: obliczenia własne

W obu przypadkach wśród uzyskanych ocen parametrów  $\beta_i$ ,  $i = Z, N, L, K$ , otrzymano wartości ujemne lub większe od jedności, co jest sprzeczne z przyjętymi

założeniami o funkcji produkcji. W związku z powyższym pozostaje poszukiwanie trafniejszych oszacowań. Temu celowi służy regresja grzbietowa. Dobór stałej  $k$  można oprzeć na jednym ze wzorów (5), ale można też skorzystać z informacji dodatkowej wynikającej z faktu, że parametry  $\beta_i$ ,  $i = Z, N, L, K$ , są udziałami sumującymi się do jedności, czyli ich średnia wynosi 0,25. Za stałą  $k$  można zatem również przyjąć wartość

$$k_s = \frac{\hat{\sigma}^2}{(1/4)^2} = 16\hat{\sigma}^2. \quad (6)$$

Wynikające z regresji grzbietowej oszacowania udziałów wraz z odchyleniami standardowymi i pozostałymi charakterystykami modelu uzyskane dla różnych wartości stałej  $k$ , w tym również dla wartości wynikających ze wzorów (5) i (6), zestawiono w tabeli 3 (rolnictwo francuskie) i w tabeli 4 (rolnictwo brytyjskie).

Analizując uzyskane wyniki przede wszystkim należy zauważyć, że wszystkie rozpatrywane tu modele charakteryzuje podobna determinacja, porównywalna z determinacją modelu estymowanego metodą najmniejszych kwadratów. Dla danych rolnictwa francuskiego współczynnik determinacji jest w granicach od 93% do 97%, a dla danych rolnictwa brytyjskiego w granicach 92% do 95%. Warto tu też odnotować, że stopień determinacji maleje wraz ze wzrostem wartości stałej  $k$ . Ponadto, dla  $k > 0.02$ , oszacowania udziałów są dodatnie, a ich suma jest bliska jedności, przy czym wraz z dalszym wzrostem wartości stałej  $k$  oszacowania udziałów rosną, a oszacowania ich błędów standardowych maleją. Wreszcie należy zauważyć, że stałe  $k$  wyliczone zgodnie ze wzorami (5) różnią się znacznie, co nie pozwala na wskazanie jednej uniwersalnej formuły, a raczej przemawia za prowadzeniem analizy wielokrotnie dla różnych wartości  $k$ .

Decydując się na wybór konkretnych oszacowań udziałów należy pamiętać, że im większa wartość  $k$  tym większe obciążenie ocen, ale i mniejszy błąd standardowy. Zatem powinniśmy wybierać zestaw ocen odpowiadający możliwie małej wartości  $k$  i najlepiej tak, aby wartość każdego oszacowania przewyższała oszacowanie jego błędu standardowego. Nie zapewnia to statystycznej istotności parametrów modelu, ale jej wymuszanie jest wbrew dobrej praktyce.

Tabela 3. Wyniki estymacji udziałów nakładów w produkcji rolniczej Francji w latach 1973-2003 metodą regresji grzbietowej

Stała $k$	Udziały nakładów (S.D.)				Suma udziałów	Postęp $\gamma$	$R^2$
	$\beta_Z$	$\beta_N$	$\beta_L$	$\beta_K$			
0.00001 <sup>LW</sup>	1.4558 (1.1177)	1.3778 (0.2015)	1.3819 (0.5910)	-0.2646 (0.1565)	3.9509	0.0618 (0.0231)	0.9728
0.00055 <sup>GM</sup>	-0.5025 (0.5257)	1.2210 (0.2192)	0.6169 (0.4571)	-0.1977 (0.1656)	1.1377	0.0256 (0.0169)	0.9635
0.01000	0.0115 (0.1148)	0.8807 (0.1624)	0.1988 (0.1196)	-0.0928 (0.1332)	0.9983	0.0135 (0.0060)	0.9556
0.01026 <sup>S</sup>	0.0150 (0.1131)	0.8750 (0.1613)	0.1980 (0.1183)	-0.0901 (0.1327)	0.9980	0.0135 (0.0059)	0.9554
0.02000	0.0947 (0.0777)	0.7151 (0.1294)	0.1926 (0.0907)	-0.0118 (0.1173)	0.9905	0.0149 (0.0049)	0.9493
0.02331 <sup>AM</sup>	0.1098 (0.0718)	0.6778 (0.1214)	0.1944 (0.0857)	0.0071 (0.1130)	0.9892	0.0153 (0.0047)	0.9475
0.03000	0.1324 (0.0632)	0.6179 (0.1080)	0.1988 (0.0780)	0.0380 (0.1053)	0.9871	0.0160 (0.0043)	0.1354
0.04000	0.1546 (0.0545)	0.5539 (0.0928)	0.2050 (0.0695)	0.0717 (0.0955)	0.9852	0.0168 (0.0039)	0.9409
0.05000	0.1693 (0.0485)	0.5085 (0.0813)	0.2101 (0.0631)	0.0960 (0.0874)	0.9838	0.0175 (0.0036)	0.9382
0.06000	0.1798 (0.0438)	0.4747 (0.0724)	0.2141 (0.0578)	0.1143 (0.0806)	0.9829	0.0179 (0.0033)	0.9360

Źródło: obliczenia własne

Kierując się tymi wskazaniem można uznać, że w rolnictwie francuskim udział kapitału obrotowego jest największy i wynosi 51% (stała  $k = 0.05$ ). Udziały pozostałych nakładów są w kolejności: praca – 21%, ziemia – 17% i kapitał trwały – 10%. W rolnictwie brytyjskim rozkład udziałów jest inny. Uzyskane oszacowania dla  $k = 0.03$  wynoszą odpowiednio: praca – 37%, ziemia – 24% i kapitał trwały – 26% oraz nakłady – 12%. Natomiast oszacowana roczna stopa postępu technicznego dla rolnictwa obu krajów jest podobna i waha się 1.6 – 1.7%. Wyniki te zdają się potwierdzać różnice w strukturze produkcji rolniczej obu badanych tu krajów. Rolnictwo francuskie nastawione bardziej na produkcję roślinną, wymagającą większego kapitału obrotowego na nawozy i środki ochrony roślin, oraz rolnictwo brytyjskie raczej skoncentrowane na produkcji zwierzęcej wymagającej większych nakładów pracy.

Tabela 4. Wyniki estymacji udziałów nakładów w produkcji rolniczej Wielkiej Brytanii w latach 1973-2003 metodą regresji grzbietowej

Stała $k$	Udziały nakładów (S.D.)				Suma udziałów	Postęp $\gamma$	$R^2$
	$\beta_Z$	$\beta_N$	$\beta_L$	$\beta_K$			
0.00001 <sup>LW</sup>	0.8705 (0.6432)	0.4031 (0.3375)	1.9334 (0.5809)	-0.2305 (0.2426)	2.9764	0.0355 (0.0065)	0.9530
0.00153 <sup>GM</sup>	0.0436 (0.3416)	-0.0540 (0.2660)	0.8212 (0.3266)	0.2445 (0.1466)	1.0554	0.0226 (0.0043)	0.9372
0.01000	0.2018 (0.1268)	0.0160 (0.1628)	0.5078 (0.1400)	0.2672 (0.1164)	0.9928	0.0186 (0.0027)	0.9326
0.01106 <sup>S</sup>	0.2073 (0.1191)	0.0248 (0.1558)	0.4933 (0.1323)	0.2665 (0.1144)	0.9919	0.0184 (0.0026)	0.9322
0.02000	0.2308 (0.0830)	0.0802 (0.1145)	0.4168 (0.0932)	0.2608 (0.1012)	0.9886	0.0171 (0.0020)	0.9300
0.03000	0.2397 (0.0656)	0.1169 (0.0885)	0.3745 (0.0720)	0.2565 (0.0903)	0.9876	0.0163 (0.0016)	0.9284
0.04000	0.2434 (0.0557)	0.1403 (0.0722)	0.3495 (0.0594)	0.2539 (0.0817)	0.9872	0.0158 (0.0014)	0.9274
0.05000	0.2453 (0.0489)	0.1564 (0.0610)	0.3330 (0.0510)	0.2523 (0.0746)	0.9870	0.0155 (0.0013)	0.9266
0.06000	0.2463 (0.0439)	0.1682 (0.0529)	0.3211 (0.0448)	0.2513 (0.0687)	0.9869	0.0153 (0.0012)	0.9261
0.08764 <sup>AM</sup>	0.2474 (0.0346)	0.1887 (0.0386)	0.3008 (0.0339)	0.2499 (0.0564)	0.9868	0.0149 (0.0010)	0.9250

Źródło: obliczenia własne

## LITERATURA:

- Antle J. (1986) Aggregation, Expectation, and the Explanation of Technical Change. *Journal of Econometrics*, 33, str. 213-36
- Cobb C. W., Douglas, P. H. (1928) A Theory of Production. *American Economic Review*, 8, str. 139-65
- Doll J. P. (1974) On Exact Multicollinearity and the Estimation of the Cobb-Douglas Production Function, *American Journal of Agriculture Economics*, 3, str. 556-563
- Halava A. M., El Bassiouni M. Y. (2000) Tests of Regression Coefficients under Ridge Regression Models. *Journal of Statistical Computation and Simulations*, 65, str. 341-356
- Henrichesmeyer W., Witzke H. P. (1991) *Agropolitik Band 1. Agrarökonomische Grundlagen* Verlag Eugen Umber, Stugart, str. 252
- Hoerl A. E., Kennard R. W. (1970) Ridge regression. *Technometrics*, 12, str. 55-82



- Intriligator M. D. (1957) Embodied Technical Change and Productivity in the United States 1929 –1958. *Review of Economics and Statistics*, 39, str. 65-70
- Kibria B. M. G. (2003) Performance of Some New Ridge Regression Estimators. *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, 32, str.419-435
- Lawless J. F., Wang P. (1976) A Simulation Study of Ridge and Other Regression Estimators, *Communications in Statistics*, 5, str. 307-323
- Mardia K. V., Kent J. T., Bibby J. M. (1979) *Multivariate analysis*. Academic Press, London, str. 254
- Nasiłowski M. (2004) *System rynkowy. Podstawy mikro- i makroekonomii*, Wydawnictwo Key Text, Warszawa, str. 435
- Pawłowski Z. (1976) *Ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego*, PWN, Warszawa, str. 102-103
- Stańko S. (1987) Postęp naukowo techniczny w rolnictwie, w: *Czynniki kształtujące poziom produkcji i dochodów w rolnictwie*, PWR i L, Warszawa, str. 139-183
- Swanson E. R. (1987) Substytucyjne związki między nakładami w doświadczeniach i gospodarstwach rolnych, *Roczniki Nauk Rolniczych, Seria G*, 84, str. 293-98
- Manual on the economic accounts for Agriculture and Forestry EAA/AAF 97 (Rev. 1.1), Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2000
- FAOSTAT: <http://apps.fao.org/>
- EUROSTAT: <http://epp.eurostat.cec.eu.int/>

### **Estimation of factor shares by ridge estimator**

**Summary:** In the papers the method of estimation factor shares based on the ridge estimator is presented. This technique can be used then multicollinearity among the explanatory variables is presence and reduction of model is impossible. This situation takes often places then you calculate share of factor in production.

Its practical application concerning the estimation of share of four elementary factors: land, labour, working capital and fixed capital in the agricultural production of France and Great Britain in period 1973-2003, is also investigated.

**Key words:** factor share, Cobb-Douglas production function, ridge regression

Ryszarda Bolonek

Katedra Ekonomii Stosowanej, Akademii Ekonomicznej w Krakowie

## **MODELOWANIE KONKURENCYJNOŚCI REGIONU W OPARCIU O ADAPTACJĘ TECHNIKI ANALIZY NIEUSZKADZALNOŚCI SYSTEMÓW**

**Streszczenie:** Rozbieżności między teorią ekonomii i praktyką gospodarczą w odniesieniu do pojęcia konkurencyjności sprawiły, iż artykuł został poświęcony nowemu zdefiniowaniu konkurencyjności oraz jej modelowaniu w oparciu o ekonomiczną aplikację inżynierskiej metody analizy nieuszkodzalności systemów, wykorzystywanej do oceny niezawodności skomplikowanych urządzeń. Konkurencyjność regionu rozumiana jest jako intensywność procesu konkurencji mającej na celu poszukiwanie nowych źródeł wzrostu gospodarczego w oparciu o własne zasoby uwzględnione w strategii regionalnej. Celem modelowania konkurencyjności regionu jest oszacowanie i zmniejszenie ryzyka ukierunkowania decyzji regionu na realizację, bądź zaniechanie realizacji określonych kryteriów konkurencyjności, rozumianych jako potencjalne czynniki wzrostu gospodarczego. Z tego względu zaprezentowana została poniżej uproszczona wersja metody i sposób jej ekonomicznej aplikacji w kontekście podejścia systemowego, a także graficzny obraz metody, zastosowanie modelu do oceny konkurencyjności regionu łódzkiego oraz podstawowe wyniki badań uzyskanych tą metodą.

**Słowa kluczowe:** region, konkurencyjność, modelowanie konkurencyjności regionu, aplikacja techniki analizy nieuszkodzalności systemów.

### **CHARAKTERYSTYKA ZASTOSOWANEJ METODY**

Kwestia konkurencyjności jest niezwykle istotna, ponieważ znani ekonomiści krytycznie odnoszą się do tego pojęcia [Krugman, 1994] i mnożących się kryteriów konkurencyjności nazywając je zajęciem obsesyjnym. Z kolei praktyka gospodarcza w tym względzie rozwija się i nie można zignorować faktu, iż celem UE na lata 2007-2013 jest wzrost konkurencyjności. Na potrzeby niniejszego artykułu konkurencyjność regionu została zdefiniowana jako intensywność procesu konkurencji mającej na celu poszukiwanie nowych źródeł wzrostu gospodarczego w oparciu o własne zasoby ujęte w strategii regionalnej. Poszukiwanie nowych źródeł wzrostu gospodarczego rozumiane jest jako dążenie do realizacji określonych kryteriów konkurencyjności. Jednakże wielość tychże kryteriów oraz różnorodność ich klasyfikacji, opracowywanych przez instytuty naukowe, banki, organizacje międzynarodowe (między innymi Bank Światowy,

Uniwersytet w Maastricht, Instytut Gospodarki Gruntami w Cambridge) sprawia, iż jest to działanie w warunkach niepewności i ryzyka. Jednakże ryzyko związane z poszukiwaniem nowych źródeł wzrostu gospodarczego poprzez realizację określonych kryteriów konkurencyjności, bądź spełnienie całych klasyfikacji kryteriów konkurencyjności, można oszacować w oparciu o ekonomiczną adaptację techniki analizy nieuszkodzalności systemów, której oryginalna nazwa występuje jako „Failure Mode, Effects and Criticality Analysis”, w skrócie FMECA [MIL-STD 1629A, 1980; Burgess J.,1984; PN – IEC 812, 1994; PN-ISO 9004-4+AC1, 1996]. Występuje w niej model w postaci równania  $WWS = P \times WS \times T$ , przy czym WWS oznacza Wskaźnik Wagi Skutków zmian rozumianych jako realizacja określonych kryteriów konkurencyjności, P to prawdopodobieństwo realizacji kryteriów konkurencyjności, WS to waga skutków realizacji kryteriów konkurencyjności, T oznacza trudności realizacji tychże kryteriów. Ryzyko wiążące się z niektórymi kryteriami konkurencyjności wynika z doboru tych czynników, który nie jest zupełnie dowolny, ale bywa arbitralny. Zatem proponuję ocenę ryzyka związanego z realizacją kryteriów konkurencyjności na podstawie zastosowania metody FMECA. Ze względu na ograniczone możliwości prezentacji, poniżej zostanie przedstawiony uproszczony tryb postępowania według metody FMECA obejmujący następujące po sobie, zredukowane punkty rozbudowanej procedury, której wypełnienie stanowi poniższy plan postępowania. Zidentyfikowanie poszczególnych elementów systemu.

1. Wypisanie symptomów uszkodzenia/zmian (failure mode-FM).
2. Ustalenie skutków uszkodzenia/zmian (effects-E).
3. Wypisanie przyczyn symptomów uszkodzenia/zmian.
4. Oszacowanie symptomów uszkodzenia/zmian: P, WS, T (P-prawdopodobieństwo wystąpienia, WS-waga skutku uszkodzenia, T-trudność wykrycia).
5. Obliczenie wskaźnika wagi skutków uszkodzenia/zmian  $WWS = P \cdot WS \cdot T$  i uszeregowanie symptomów uszkodzenia/zmian (criticality analysis-CA)
6. Wskazanie działań naprawczych [Muhlemann i in., 1992, s.195]

Zastosowanie metody FMECA w gospodarce w postaci modelu  $WWS = P \cdot WS \cdot T$  jest następujące:

FM oznacza typ zmiany rozumianej jako realizacja kryterium konkurencyjności	P- prawdopodobieństwo realizacji kryterium konkurencyjności
E- efekty realizacji danego kryterium	WS- oznacza wagę skutków realizacji kryt.
CA – macierz ryzyka związanego z realizacją danego kryterium konkurencyjności	WWS – model informujący o kierunkach działania na podstawie hierarchicznego uporządkowania wyników

Właściwa forma procedury obejmuje 9 punktów z których trzy pierwsze dotyczą identyfikacji systemu. Ekonomicznymi elementami systemu są:

- ❖ nadsystem rozumiany jako gospodarka globalna wraz z otoczeniem tworzonym przez światową konkurencyjność w której można wyróżnić trzy zasadnicze ośrodki: Azja z wiodącą rolą Japonii, Stany Zjednoczone i Europa;
- ❖ govsystem tworzony przez makrogospodarki krajów i ich otoczenie;
- ❖ podsystem reprezentowany przez regiony i ich strategie w otoczeniu UE.

Z określenia elementów systemu wynika, iż konkurencyjność regionu jest wypadkową, połączeniem polityki makroekonomicznej państwa z zasobami regionu. Spójność tych poczynań pozwala umiejscowić region w perspektywie konkurencyjności globalnej. W związku z tym każdemu poziomowi systemu została przyporządkowana reprezentatywna klasyfikacja kryteriów konkurencyjności, przy czym dobór danej klasyfikacji konkurencyjności nie jest traktowany dogmatycznie, lecz wynika z uzasadnienia, w którym bierze się pod uwagę lokalizację ocenianego regionu, jego otoczenia makrogospodarczego i globalnego.

Poziomowi podsystemu została przyporządkowana klasyfikacja regionalnych wskaźników konkurencyjności [Pinelli i in., 1999], która obejmuje następujące kryteria: zatrudnienie w pięciu i w siedemnastu dziedzinach wytwarzania, drogi i motodrogi per capita i na km<sup>2</sup>, przewozy powietrzne per capita, pasażerowie samolotów per capita, patenty i wydatki na B+R per capita, wskaźnik zdrowia publicznego oraz wartość dodana brutto per capita i na pracownika.

Poziom govsystemu reprezentuje klasyfikacja instytutu IMD [Institute of Management Development - World Competitiveness Yearbook, 2004] ze Szwajcarii, który dokonuje corocznie ocen konkurencyjności państw. Klasyfikacja składa się z pięciu kryteriów podstawowych, którym przyporządkowane jest po 20 kryteriów szczegółowych. Europejskie kryteria konkurencyjności na poziomie makroekonomicznym są następujące: dynamizm rynkowy i makroekonomiczny, skuteczność rządu (finanse publiczne, polityka fiskalna, instytucje itd.), skuteczność biznesu (produktywność, rynki pracy i finansowe, globalizację itd.), infrastruktura (podstawowa, technologiczna, naukowa), edukacja.

Poziom nadsystemu opisany został przez kryteria konkurencyjności Instytutu Polityki Progresywnej dla gospodarki amerykańskiej, która reprezentuje poziom konkurencyjności globalnej. Wyznaczniki konkurencyjności amerykańskiej gospodarki zostały podzielone na pięć kategorii [Atkinson i in., 1999], z których każde opisane jest przez dwa, bądź trzy subkryteria, a mianowicie: stanowiska

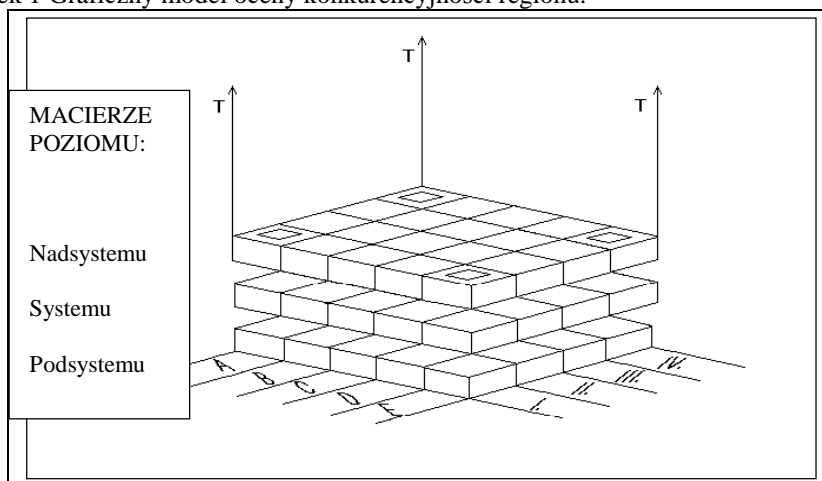
pracy oparte na wiedzy, globalizacja (udział siły roboczej w wytwarzaniu dóbr na eksport, bezpośrednie inwestycje zagraniczne), dynamizm ekonomiczny i konkurencja (liczba stanowisk pracy w szybko rozwijających się firmach jako udział w ogólnym zatrudnieniu, udział wskaźnika liczby nowo powstałych-upadających firm w ogólnej liczbie firm danego stanu, wskaźnik początkowej oferty na giełdzie); gospodarka cyfrowa, zdolność innowacyjna (udział stanowisk pracy w zaawansowanych technologicznie przemysłach w zatrudnieniu ogółem, liczba patentów przypadających na 1000 pracowników, inwestycje w badania i rozwój itp).

Skonfigurowana w powyższy sposób metoda kompleksowej oceny konkurencyjności regionu będzie służyła jako podstawa określenia ścieżki dla skutków zmian wywołanych realizacją kryteriów konkurencyjności wyznaczonych poprzez wszystkie poziomy systemu. W wyniku tego podejścia powstanie potrójna macierz oceny konkurencyjności regionu na poziomie podsystemu, govsystemu i nadsystemu, co widać na poniższym rysunku 1. Tak skonstruowane rozważanie konkurencyjności regionu nie pozwoli na zagubienie małej, autonomicznej jednostki terytorialnej jaką jest region w gąszczu międzynarodowych powiązań.

## GRAFICZNY MODEL OCENY KONKURENCYJNOŚCI REGIONU

Graficzny model oceny konkurencyjności regionu składa się z trzech macierzy.

Rysunek 1 Graficzny model oceny konkurencyjności regionu.



Źródło: opracowanie własne

Skutki zmiany **WS** dla każdego poziomu systemu w skali 0-10 punktów

IV – niewielkie lub 0 - 2,5  
 III – marginalne lub 2,5 - 5  
 II – krytyczne lub 5 - 7,5  
 I – katastrofalne lub 7,5 - 10

Prawdopodobieństwo zmiany **P** dla każdego poziomu systemu w skali (0;1) lub (0-10 punktów)

A – duże (0,2;1>) lub <10-8)  
 B - potencjalne (0,1;0,2) lub < 8-6)  
 C – okazjonalne (0,01;0,1) lub <6-4)  
 D – małe (0,001;0,01) lub <4-2)  
 E – b. małe (P,0,001) lub <2-0)

**T** - trudności realizacji zmiany w skali 0 -10 punktów, dla każdego poziomu systemu

W podstawie rysunku 1 znajduje się macierz ryzyka (macierz krytyczności – Criticality Analysis) właściwa dla podsystemu, wyżej dla govsystemu, następnie dla nadsystemu. Wzór macierzy ryzyka zamieszczony jest poniżej w postaci tablicy 1. Analiza Krytyczności (Criticality Analysis) jest także ustaleniem rankingu Wskaźników Wagi Skutków zmian (WWS). Na podstawie rankingu podejmowane są działania naprawcze urządzeń technicznych. Jednak ekonomiczna aplikacja zakłada potrójny ranking otrzymany najpierw dla podsystemu, później zweryfikowany dla govsystemu, a następnie dla nadsystemu. W poniższej tablicy 1 skonstruowana została macierz ryzyka zmian ekonomicznych opracowana na podstawie macierzy krytycznych dla bezpieczeństwa urządzeń zdarzeń.

Tablica 1 Macierz ryzyka

Poziom krytyczności (C)	Kategorie	wagi skutków	zmian	(WS)
Prawdopodobieństwo Zmian (P)	Niewielkie IV	Marginalne III	Krytyczne II	Katastroficzne I
A duże	3	2	1	1
B potencjalne	3	2	2	1
C okazjonalne	3	3	2	1
D małe	4	3	2	1
E bardzo małe	4	4	3	2

1- nie akceptowane, 2- niepożądane, 3 – akceptowane pod warunkiem kontroli, 4- akceptowane.

Źródło: opracowanie własne na podstawie przykładu siatki krytyczności, PN-IEC 812, Techniki analizy nieuszkodzalności systemów. Procedura analizy rodzajów i skutków uszkodzeń, PKN, Warszawa, grudzień 1994, s.14.

Powyższa macierz stanowi wzorzec trzech macierzy zawartych na rysunku 1.

Konfrontacja tablicy 1 z klasyfikacją kryteriów konkurencyjności właściwą dla każdego poziomu systemu pozwoli sporządzić trzy macierze ryzyka dla każdego poziomu systemu, a w konsekwencji dla każdej klasyfikacji konkurencyjności, co sprawi, iż model  $WWS=P \cdot WS \cdot T$  będzie szacowany osobno dla każdego poziomu systemu.

Oszacowanie prawdopodobieństwa wystąpienia zmian  $P$  i zaklasyfikowanie go do określonej kategorii: A, B, C, D, E będzie ustalone na podstawie wagi danego kryterium w danej klasyfikacji. Zatem  $P$  - jest prawdopodobieństwem realizacji danego kryterium konkurencyjności. W procedurze inżynierskiej jest to estymacja jakościowa, której wynikiem są wartości prawdopodobieństwa rzędu jednej setnej, bądź jednej tysięcznej wartości  $P$ . Jeżeli cecha ma charakter niemierzalny, wówczas interesuje nas, czy dany element populacji ma wyróżnioną cechę jakościową, czy też nie ma. Podstawowym elementem szacowanym jest wówczas frakcja  $p$  elementów wyróżnionych w populacji, zwana także wskaźnikiem struktury badanej cechy populacji [Krysicki i in. 1997]. Zadanie sprowadza się do estymacji parametru  $p$  w rozkładzie dwumianowym. Zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrami  $(n, p)$  można interpretować jako możliwą liczbę sukcesów (czyli realizacji pewnego zdarzenia  $A$ ) w dowolnej kolejności w  $n$  doświadczeniach  $D_1, \dots, D_n$ . Zatem

$$P(\text{zdarzenie } A \text{ realizuje się } k \text{ razy}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

gdzie  $p$  oznacza prawdopodobieństwo sukcesu,  $q$  - prawdopodobieństwo porażki [Krysicki i in. 1998]. W zastosowaniach ekonomicznych nie ma potrzeby oszacowania parametru  $P$  do wartości setnych, czy tysięcznych jedności. Zatem przedział wartości prawdopodobieństwa  $P < 1; 0 >$  można zastąpić przedziałem  $P < 10; 0 >$ . W związku z występowaniem w procedurze wzorcowej pięciu klas prawdopodobieństwa od A do E z podziału 10 punktów między pięć klas wynikają przedziały o równej długości wynoszącej po 2 jednostki. W rzeczywistości jednak, bardziej interesująca jest skala nie przedziałowa, lecz porządkowa, bowiem istotna jest nie długość klasy, lecz sposób uporządkowania, to znaczy, czy mamy do czynienia z dużym, średnim, czy małym prawdopodobieństwem realizacji danego kryterium konkurencyjności. Wagę skutków zmian  $WS$  określi ich zaklasyfikowanie do ustalonej kategorii – skutki o niewielkim znaczeniu, marginalnym, krytycznym, aż do znacznych (katastrofalnych) konsekwencji zmian.

W zastosowaniach inżynierskich w odniesieniu do trudności  $T$  tworzony jest histogram na podstawie historii liczby zdarzeń, które prowadzą do uszkodzenia. Natomiast w ekonomicznej aplikacji trudności  $T$  w realizacji danego kryterium konkurencyjności zostaną oszacowane najwyżej w przypadku braku w regionalnej strategii elementów pośrednio przyczyniających się do spełnienia danego

kryterium konkurencyjności. Im więcej jest elementów w strategii regionu pośrednio przyczyniających się do realizacji danego kryterium konkurencyjności, tym niższe oceny trudności realizacji.

## ZASTOSOWANIE MODELU DO OCENY KONKURENCYJNOŚCI REGIONU ŁÓDZKIEGO

Przedmiotem oceny stała się strategia regionu łódzkiego zawarta w Kontrakcie Wojewódzkim [zwanym dalej Kontraktem, 2001]. Szacowanie modelu  $WWS=P \cdot WS \cdot T$  dla każdego poziomu systemu z osobna sprawi, iż przyjmie on postaci:  $WWS1=P1 \cdot WS1 \cdot T1$ ;  $WWS2=P2 \cdot WS2 \cdot T2$ ;  $WWS3=P3 \cdot WS3 \cdot T3$ . Zakładam, iż prawdopodobieństwo realizacji kryteriów zawartych w Kontrakcie  $P=1$ . Wysokość prawdopodobieństwa  $P1$  - realizacji kryterium konkurencyjności z klasyfikacji regionalnych wskaźników konkurencyjności z Cambridge w regionie łódzkim, ustaląm na podstawie wagi danego kryterium w wynikach badań tego ośrodka (wykonanych na podstawie analizy regresji między kolejnymi kryteriami z tejże klasyfikacji a wzrostem Wartości Dodanej Brutto). Zakładam bowiem, że im większa korelacja między danym kryterium, a wzrostem, tym większe prawdopodobieństwo realizacji tego kryterium w regionie łódzkim.

Wysokość prawdopodobieństwa  $P2$  – realizacji kryteriów zawartych w klasyfikacji instytutu IMD ustaląm ze względu na makroekonomiczne problemy danego państwa odzwierciedlone w danych GUS, które jednocześnie znajdują swe potwierdzenie w danych regionalnych GUS dotyczących regionu łódzkiego. Zakładam bowiem, że im większy problem, tym większe prawdopodobieństwo realizacji kryterium, które uwzględnia likwidację lub ograniczenie problemu.

Dokonując oszacowania prawdopodobieństwa  $P3$  realizacji kryteriów zawartych w klasyfikacji Instytutu Polityki Progresywnej dla gospodarki USA, wszystkie znajdujące się tam kryteria uznają za jednakowo istotne i traktuję jako model wzorcowy. Uzasadniam to faktem, iż kryteria tej klasyfikacji uznanej za reprezentatywną dla gospodarki globalnej zawierają się w nowej teorii wzrostu opartej na kapitale ludzkim i sektorze badawczo-rozwojowym. Zakładając, iż wszystkie kryteria określane są jednakową wagą, mogą pominąć wartości  $P3$ . Jeżeli jednak region posiada długookresową strategię rozwoju, może nadać odpowiednią wagę dla wyróżnionego kryterium.

$WS$  - wskaźnik skutków realizacji określonego kryterium oszacowany został jako stopień różnicy między kryterium z klasyfikacji właściwej dla danego poziomu systemu, a kryteriami zawartymi w Kontrakcie; jest to więc porównanie kryteriów. Podział wskaźników skutków realizacji określonych w Kontrakcie kryteriów konkurencyjności, podobnie jak w procedurze wzorcowej podzielony



jest na cztery klasy, jako skutki: katastrofalne, poważne, marginalne i akceptowalne. W związku z tym długość przedziału wynika z podzielenia 10 punktów między cztery klasy, co daje wynik po 2,5 punktu. Dlatego skutki bardzo poważne dla wzrostu znajdują się w przedziale  $<10;7,5)$ , poważne  $<7,5;5)$ ; marginalne  $<5;2,5)$ ; akceptowalne  $<2,5;0)$ . Na tej zasadzie zostały oszacowane wartości WS1, WS2, WS3, pod warunkiem zastosowania reprezentatywnej dla danego poziomu systemu klasyfikacji kryteriów konkurencyjności.

Trudności realizacji kryterium konkurencyjności – T – oszacowane są najwyżej w przypadku braku w Kontrakcie Wojewódzkim elementów pośrednio spełniających dane kryterium. Zatem znaczny stopień różnicy między kryteriami zawartymi w danej klasyfikacji i w Kontrakcie może być łagodzony w przypadku, gdy występują inne pośrednie kryteria w Kontrakcie lub otoczeniu mogące pośrednio wpłynąć na stopień realizacji kryterium oceny regionalnej. W ten sposób zostały oszacowane wartości T1, T2, T3.

Hierarchiczne uporządkowanie wyników dla wskaźników WWS1, WWS2, WWS3 informuje o konieczności podejmowania działań we wskazanych przez wyniki kierunkach dla każdego poziomu systemu, co zakładam, daje wskazanie priorytetów w krótkim, średnim i długim okresie czasu, z perspektywy mezo-, makroekonomicznej i globalnej. Analiza ryzyka sporządzona na podstawie wartości P i WS dla każdej klasyfikacji z osobna w postaci trzech macierzy ryzyka sporządzonych na podstawie wzorcowej tablicy nr 1 pozwoli ocenić poziom ryzyka związanego z brakiem, bądź niewłaściwym poziomem realizacji określonych kryteriów.

Ocena konkurencyjności regionu z różnych poziomów systemu da możliwości weryfikacji strategii regionalnej w różnych horyzontach czasowych. Pozwoli przynajmniej na częściowe uniezależnienie polityki regionu od bieżącego cyklu politycznego ułatwiając planowanie i kontynuację długookresowych zamierzeń niezależnie od realizacji bieżącego budżetu regionalnego.

## PREZENTACJA WYNIKÓW BADAŃ UZYSKANYCH W WYNIKU ZASTOSOWANIA MODELU DO OCENY KONKURENCYJNOŚCI REGIONU

Jednym z celów prezentowanego modelu jest, by waga danego kryterium z określonej klasyfikacji nabrała znaczenia relatywnego. Taki sposób postępowania zmniejsza ryzyko ukierunkowania decyzji podmiotu regionalnego na jego wykonanie, czy zaniechanie realizacji. Łącznie w trzech zastosowanych klasyfikacjach wystąpiło 49 (12+20+17) podstawowych kryteriów konkurencyjności i ok. 300 szczegółowych, które są potencjalnymi czynnikami

wzrostu. Porównanie hierarchii najważniejszych wyników zastosowania modelu  $WWS=P \cdot WS \cdot T$  dla oceny konkurencyjności regionu z perspektywy krótkiego, średniego i długiego okresu czasu oraz odniesienia ich do podsystemu, govsystemu i nadsystemu dało poniższe rezultaty.

W krótkim okresie czasu najistotniejsze okazały się następujące kryteria:

patenty per capita,  
transport powietrzny  
wydatki na badania i rozwój per capita,  
zatrudnienie w podstawowych działach i ogółem.

W średnim okresie czasu najważniejsze kryteria to:

zatrudnienie,  
rynki finansowe  
globalizacja,  
produktywność,  
system instytucjonalny,  
infrastruktura naukowa,  
handel i inwestycje międzynarodowe.

W długim okresie czasu kryteria charakteryzujące się największą liczbą punktów są następujące:

- ❖ liczba stanowisk pracy w szybko rozwijających się firmach jako udział w ogólnym zatrudnieniu,
- ❖ udział stanowisk pracy w zaawansowanych technologicznie przemysłach w zatrudnieniu ogółem,
- ❖ inwestycje w badania i rozwój,
- ❖ procentowy udział cywilnych naukowców i inżynierów w sile roboczej,
- ❖ liczba patentów przypadających na 1000 pracowników,
- ❖ udział pracowników zatrudnionych w biurach jako odsetek siły roboczej.

Ze względu na ograniczone możliwości prezentacji, wyniki otrzymane poprzez wypełnienie macierzy ryzyka w krótkim, średnim i długim okresie czasu można ogólnie skomentować jako przybliżone do wskaźników WWS, jednakże dopiero podział kryteriów między przedziały ryzyka: nie akceptowanego, niepożądanego, akceptowanego pod warunkiem kontroli oraz akceptowanego daje orientację co do możliwości uporządkowania działań regionu. Konkluzje jakie wynikają z powyższego zestawienia wyników dotyczą pojawiającego się wszędzie kryterium zatrudnienia. Jednakże znamienne jest, iż z perspektywy regionu bardziej istotne pozostają problemy związane z rozwojem sektora badawczo-rozwojowego, liczbą patentów i ich wdrożeń, a dopiero później z zatrudnieniem, co znajduje swe potwierdzenie z perspektywy makroekonomicznej i globalnej.

## PODSUMOWANIE

Powyższe wyniki wskazują na konieczność zmiany sposobu myślenia i postępowania, a mianowicie, ze zmagania z bezrobociem, na sposób działania ukierunkowany na kreację zatrudnienia. Wprawdzie bezrobocie i zatrudnienie są w teorii ekonomii powiązane ze sobą, jednak wyniki badań wyraźnie wskazują na zwrot na rzecz wysiłków zmierzających do wzrostu zatrudnienia poprzez kreację zatrudnienia w sektorze badawczo-rozwojowym, wdrożeniach patentów, poprzez rozwój nowoczesnych nośników transportu, a więc wskazują konkretne kierunki działań. Dopiero z perspektywy makroekonomicznej istotne są w regionie działania zmierzające do rozwoju rynków finansowych, systemu instytucjonalnego, infrastruktury naukowej, napływu bezpośrednich inwestycji zagranicznych, wzrostu wydajności pracy, rozwoju handlu i sprostanie globalizacji. Z perspektywy globalnej, działania regionu winny zmierzać w już wytyczonych, w krótko i średniookresowej perspektywie kierunkach, co znajduje swe potwierdzenie we wzroście zatrudnienia, nie w małych, lecz w szybko rozwijających się firmach, poprzez inwestycje w badania i rozwój, wzrost liczby patentów, wzrost liczby naukowców i inżynierów w sile roboczej. Z tego wynika, iż długookresowym trendem jest jakościowa zmiana struktury zatrudnienia na korzyść wzrostu liczby osób zajmujących się nauką oraz badaniami i rozwojem.

## LITERATURA

- Atkinson R., Court R., Ward J., (July 1999) The State New Economy Index. Benchmarking Transformation in the States, Progressive Policy Institute, wzięto z: <http://www.neweconomyindex.org/states/StateNewEcon.pdf>, stan na dzień 28.08.2004
- Burgess J.,(1984) Design Assurance for Engineers and Managers, Marcel Dekker,New York.
- Muhlemann A., Oakland J., Lockyer K, (1992) Zarządzanie. Produkcja i usługi, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kontrakt Wojewódzki dla Łodzi, Warszawa, stan na dzień 19.06.2001 [www.lodzkie.pl/szablon.pkp?key\[0\]=samorzad&key\[1\]=wojew&key\[2\]=strategia](http://www.lodzkie.pl/szablon.pkp?key[0]=samorzad&key[1]=wojew&key[2]=strategia)
- Krysicki W., Bartos J., Dyczko W., Królikowska K., Wasilewski M., (1997) Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, Część I Rachunek prawdopodobieństwa, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Krysicki W., Bartos J., Dyczko W., Królikowska K., Wasilewski M., (1998) Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, Część II, Statystyka matematyczna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Krugman P., (March/April 1994) Competitiveness: A Dangerous Obsession, "Foreign Affairs".

MIL-STD-1629A, (1981) Procedures for Performing Failure Mode Effects and Criticality Analysis, U.S. Department of Defense, Government Printing Office, Washington.

Pinelli D., Giacometti R., Lewney R., Fingleton B., (1999) European Regional Competitiveness Indicators, Discussion Paper no103, Department of Land Economy, University of Cambridge.

PN-ISO 9004-4+AC1 (marzec 1996) Zarządzanie jakością i elementy systemu jakości, Polski Komitet Normalizacji, Warszawa.

PN-IEC 812 (grudzień 1994) Techniki analizy nieuszkodzalności systemów. Procedura analizy rodzajów i skutków uszkodzeń, PKN, Warszawa.

World Competitiveness Yearbook (2004) IMD, wzięto z:

[www01.imd.ch/wcy/criteria/criteria.cfm](http://www01.imd.ch/wcy/criteria/criteria.cfm),

[www02.imd.ch/wcy/methodology/methodology.cfm](http://www02.imd.ch/wcy/methodology/methodology.cfm), stan na dzień 28.08.2004.

### **Regional competitiveness modeling based on the FMECA procedure application**

**Summary:** There is a difference between competitiveness perception in the theory of economics and practice. Therefore, this paper defines regional competitiveness as the intensity of competition process, which is aimed at searching the new sources of GNP raise on the behalf of own resources pointed in the regional strategy. The purpose of regional competitiveness modeling is estimation and reduction the risk connected with the different competitiveness criteria realization. It is based on FMECA method application, which was firstly used in the theory of reliability.

**Key words:** region, competitiveness, regional competitiveness modeling, FMECA application.

Bolesław Borkowski, Wiesław Szczesny  
Katedra Ekonometrii i Informatyki, SGGW  
bborkowski@mors.sggw.waw.pl,  
wszczesny@mors.sggw.waw.pl

## ZMIANY W ZASOBACH I ROZMIARACH PRODUKCJI GOSPODARSTW ROLNICZYCH W LATACH 1993 – 2003

**Streszczenie:** W pracy dokonano dynamicznej analizy zróżnicowania obszaru, wyposażenia w środki trwałe oraz nakładów materialnych i nakładów pracy w gospodarstwach rolniczych. Badaniem objęto blisko 9000 gospodarstw ankietowanych przez IERiGŻ w okresie 1993 – 2003. Do analizy wykorzystano krzywe Lorenza, wskaźnik Giniego oraz dynamiczną funkcję produkcji Cobba – Douglasa..

**Słowa kluczowe:** krzywa Lorenza, wskaźnik Giniego, funkcję produkcji Cobba – Douglasa

### WSTĘP

Transformacja gospodarcza Polski w latach 90 – tych miała duży wpływ na sytuację w rolnictwie. Liberalizacja cen środków produkcji i uwolnienie cen rolnych wpłynęły na relacje wskaźnika nożyc cen, który był niekorzystny dla rolnictwa, aż w 9 latach, w okresie 1993 – 2003 (por. Roczniki GUS). Sytuacja ta miała przede wszystkim, wpływ na wielkość uzyskiwanych dochodów przez rolników (parytet dochodowy w analizowanym okresie obniżył się z 92% do około 40%). Wprowadzenie zmian systemowych wymusiło zmiany w gospodarstwach rolniczych. Tempo tych zmian jest zróżnicowane tak pod względem regionalnym, jak i przedmiotowym (Zegar 2002, Józwiak 2003, Borkowski 2005, GUS 2006). Celem naszych badań jest określenie zróżnicowania efektywności pracy i majątku mierzonej wielkością produkcji końcowej w gospodarstwach rolniczych na przestrzeni lat 1993 i 2003. Materiałem empirycznym są dane z gospodarstw rolniczych zgromadzone przez IERiGŻ. Badaniem objęto gospodarstwa ankietowane przez Instytut w latach 1993 – 2003. Łącznie badaniem objęto około 8800 gospodarstw (por. Tab.1).

Tabela 1. Liczba badanych gospodarstw w latach 1993 - 2003

	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2002	2003	Razem
do 15 ha	593	645	672	571	561	553	95	476	451	365	4982
powyżej 15 ha	158	261	295	426	437	445	102	436	637	600	3797
Razem	751	906	967	997	998	998	197	912	1088	965	8779

Źródło: Opracowanie własne

Za zmienną objaśnianą przyjęliśmy wartość końcowej produkcji rolniczej w zł/ha UR ( $Y_t$ ), natomiast zmiennymi objaśniającymi są: obszar użytków rolnych (UR) - ( $X_{1t}$ ), nakłady pracy ( $X_{2t}$ ) w osobach na 100 ha UR, nakłady materialne ( $X_{3t}$ ) w zł/ha UR, nakłady na rzeczowe aktywa trwałe ( $X_{4t}$ ) w zł/ha UR oraz zmienna  $t = 1, 2, \dots, 11$  reprezentująca czas. Wszystkie zmienne zostały wyrażone w cenach 1993 roku. Ankietowane gospodarstwa rolnicze (około 900 w każdym roku) przez IERiGŻ nie są próbą losową. Dlatego też badania te traktujemy jako pewne case study a uzyskanych wyników nie uogólniamy na populację gospodarstw rolniczych w Polsce.

## METODY ANALIZY

W pierwszym etapie pracy dokonaliśmy analizy porównawczej rozkładu badanych cech za pomocą tzw. krzywej zróżnicowania dwu dystrybuant (częstości skumulowanych) oraz za pomocą liczbowego wskaźnika. Krzywa zróżnicowania (koncentracji) przy zadanym naturalnym uporządkowaniu może przebiegać nad i pod przekątną. Liczbowym miernikiem koncentracji  $ar$  jest podwojona różnica między dwoma polami zawartymi między przekątną a krzywą: tym, które znajduje się pod przekątną i tym, które położone jest nad nią. Formalnie można to zapisać w postaci:

$$2 \int_0^1 (u - C(u)) du,$$

gdzie  $C(u)$  oznacza funkcję opisującą krzywą koncentracji.

Maksymalny wskaźnik koncentracji ( $ar_{max}$ ) nazywany jest uogólnionym wskaźnikiem Giniego. Szerszy opis badania zróżnicowania rozkładów można znaleźć w (Kowalczyk i inni 2004).

W literaturze naukowej proponowane są różne analityczne postacie funkcji produkcji, oprócz statycznych wyróżnia się dynamiczne postacie funkcji produkcji. Relacja pomiędzy wielkością produkcji a nakładami pracy i kapitału, przy założeniu, że proces produkcji nie ulega zmianie w czasie jest nazywana statyczną funkcją produkcji (Borkowski, Dudek, Szczesny 2003, Varian 2000, Żółtkowska 1997). Do badań mikroekonomicznych obejmujących krótki okres może być wykorzystana statyczna postać funkcji produkcji. Natomiast gdy wielkość produkcji niezależnie od wielkości nakładów pracy i kapitału zależy od czasu, w którym relacja ta jest obserwowana to funkcja produkcji ma charakter dynamiczny.

Dynamiczną postać dwuczynnikowej funkcji produkcji możemy zapisać w postaci (Green 2000, Fuss, McFadden 1978, Kukuła 2003):

$$y_t = \gamma x_{1t}^{\beta_1} x_{2t}^{\beta_2} x_{3t}^{\beta_3} x_{4t}^{\beta_4} e^{\delta t + \varepsilon_t} \quad (1)$$

$y_t$  - wielkość produkcji końcowej w zł/ha UR,

$x_{1t}$  - obszar UR w ha,

$x_{2t}$  - liczba osób zatrudnionych na 100 ha UR,

$x_{3t}$  - nakłady materialne w zł/ha UR,

$x_{4t}$  - nakłady na rzeczowy majątek trwały w zł/ha UR,

$\beta, \gamma, \delta$  - parametry modelu,

$t$  - zmienna czasowa,

$\varepsilon$  - składnik losowy.

Ponadto założyliśmy, że funkcja ta jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego, tzn. że suma elastyczności produkcji jest równa jeden, czyli, że mamy stały efekt skali.

Powyzsza postać funkcji pochodzi od Tinbergera i polega na multiplikatywnym nałożeniu na model wielkości  $e^{\delta \cdot t}$ , gdzie  $\delta$  - jest miarą postępu techniczno – organizacyjnego. Jeżeli  $\delta > 0$ , to wielkość produkcji zależy także od efektów postępu organizacyjnego i technicznego. Wielkość wzrostu produkcji wynosi średnio  $(e^{\delta} - 1) \cdot 100$  w skali rocznej. Gdy  $\delta < 0$  możemy powiedzieć, że mamy do czynienia z ujemnym wpływem postępu technicznego i organizacyjnego a wielkość średniego wpływu w roku możemy obliczyć jako:  $(e^{\delta} - 1) \cdot 100$ . Dla  $\delta = 0$  wielkość produkcji determinowana jest tylko poprzez wielkości nakładów kapitałowych i pracy (wówczas mówimy o neutralnym postępie techniczno – organizacyjnym). Oszacowania parametrów funkcji produkcji dokonaliśmy KMNK.

## WYNIKI ANALIZY

W pierwszej kolejności dokonaliśmy analizy zmian badanych cech w okresie 1993 – 2003. Wykorzystaliśmy w niej krzywe zróżnicowania rozkładów i krzywe Lorenza oraz odpowiednie wskaźniki Giniego (Kowalczyk i inni 2004) jako liczbowe miary zróżnicowania. Średni obszar UR gospodarstw objętych badaniem wyraźnie wzrósł. Łącznie ze wzrostem średniego obszaru zwiększała się dyspersja (por. tab. 2). Analiza wykazała wzrost koncentracji UR w badanych gospodarstwach, szczególnie do 1998 roku (wskaźnik Giniego wynosił 0,544).

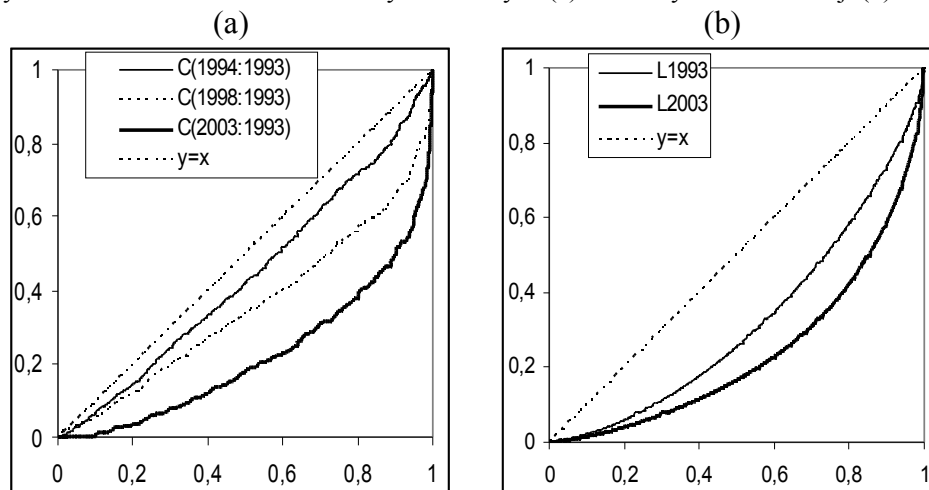
W następnych latach obserwujemy koncentrację UR na podobnie wysokim poziomie, zmienia się jednak wielkość gospodarstw we wszystkich grupach gospodarstw (por. rys. 1). Dynamiczna analiza zróżnicowania obszaru UR w porównaniu do 1993 roku wykazała wysoki ich poziom. W analizowanym okresie wystąpiły dość duże zmiany obszaru UR w badanych gospodarstwach.

Tabela 2. Poziom średni, zróżnicowanie i koncentracja obszaru użytków rolnych

Rok	średnia	odch. Stand.	Gini	ar( $C_{Rok:1993}$ )
1993	10,99	8,65	0,357	0,000
1994	12,92	10,44	0,368	0,122
1995	13,68	12,46	0,385	0,146
1996	22,11	28,99	0,521	0,282
1997	22,88	30,59	0,528	0,292
1998	24,09	33,86	0,544	0,297
1999	26,74	33,66	0,521	0,406
2000	26,18	37,43	0,552	0,336
2002	30,92	53,37	0,526	0,508
2003	33,96	58,69	0,526	0,556

Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 1. Zróżnicowanie obszaru użytków rolnych (a) oraz krzywe koncentracji (b)



Źródło: Opracowanie własne

Realne wartości produkcji końcowej, rzeczowego majątku trwałego oraz nakładów materialnych wyrażone są w cenach 1993 roku. Analiza dynamiki zmian średnich wartości badanych cech wykazała tendencje malejącą (por. tab. 3).



Tabela 3. Wartości średnie oraz zróżnicowanie badanych cech

Rok	Produkcja końcowa		Rzeczowy majątek trw.		Nakłady materialne		Nakłady pracy	
	średnia	ar(C <sub>Rok:1993</sub> )	średnia	ar(C <sub>Rok:1993</sub> )	średnia	ar(C <sub>Rok:1993</sub> )	średnia	ar(C <sub>Rok:1993</sub> )
1993	1174,4	0,000	7612,051	0,000	1022,6	0,000	34,0	0,000
1994	1119,7	-0,114	6940,851	-0,076	1042,1	0,010	30,5	-0,091
1995	1237,3	0,047	6760,375	-0,095	1063,5	0,035	29,7	-0,012
1996	1268,5	0,086	6852,013	-0,111	1103,0	0,073	27,2	-0,125
1997	1143,6	-0,063	6931,122	-0,096	1059,0	0,010	27,0	-0,016
1998	1061,4	-0,154	6867,577	-0,114	977,6	-0,103	27,1	-0,018
1999	820,6	-0,450	5989,364	-0,262	830,7	-0,288	25,0	-0,077
2000	1010,2	-0,222	6318,985	-0,201	943,9	-0,147	25,0	0,026
2002	980,3	-0,301	3778,266	-0,609	718,2	-0,474	21,3	-0,033
2003	989,3	-0,328	3741,817	-0,611	710,5	-0,477	19,1	-0,049

Źródło: Opracowanie własne

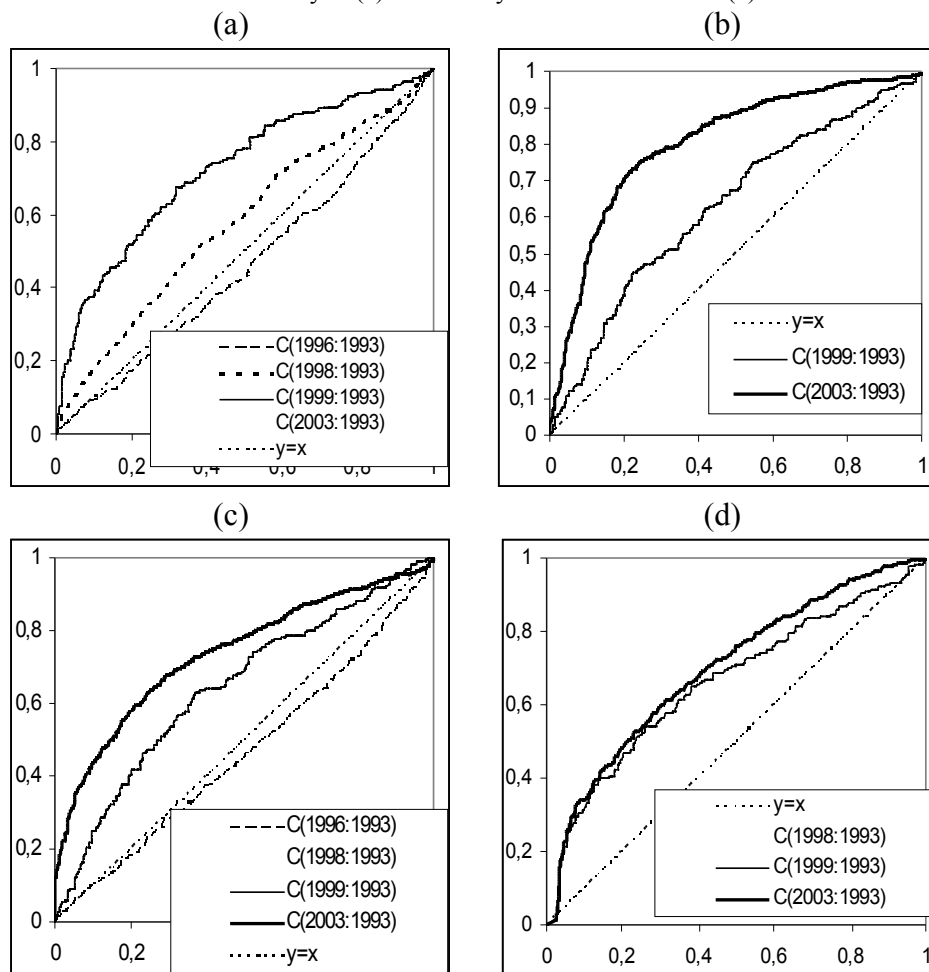
Realne średnie wartości produkcji w analizowanym okresie wykazywały tendencje malejące.

Wartość produkcji w 2003 roku stanowiła 84,24% średniej wartości produkcji rolniczej w 1993 roku. Podobne analogie zaobserwowaliśmy przy rzeczowym majątku trwałym i nakładach materialnych. Wartość rzeczowego majątku trwałego w 2003 roku nie przekraczała 50% średniej wartości majątku trwałego w 1993 roku. Do pozytywnych aspektów przemian, jakie dokonały się w gospodarstwach rolniczych należy zaliczyć wzrost produktywności majątku trwałego. W 1993 roku produktywność majątku trwałego liczona wartością produkcji końcowej wynosiła 0,15 zł wobec 0,26 zł w 2003 roku. Oczywiście są to wyliczenia na poziomie średnich i mogą być obarczone błędem, niemniej jednak wskazują na tendencję wzrostu produktywności majątku trwałego w badanych gospodarstwach rolniczych.

Nakłady pracy wyrażone liczbą osób zatrudnionych na 100 ha UR wyraźnie zmniejszały się w badanym okresie. Ponad 45% zmniejszyła się liczba zatrudnionych w 2003 roku w porównaniu do 1993 roku. Wzrosła wyraźnie efektywność nakładów pracy. W 1993 roku wynosiła ona 34,5 zł produkcji końcowej z ha UR na 1 zatrudnionego wobec 51,8 zł w 2003 roku.

Generalnie można więc stwierdzić, że w badanych gospodarstwach nastąpiła racjonalizacja zatrudnienia i wyposażenia w majątek trwały oraz koncentracja obszaru UR. Przepuszczalnie spadek wartości produkcji wymuszał zmiany struktury gospodarstw rolniczych. Niekorzystne dla rolnictwa indeksy nożyc cen powodowały spadek realnych wartości produkcji końcowej (por. rys. 2).

Rysunek 2. Zróżnicowanie produkcji końcowej (a), rzeczowego majątku trwałego (b), nakładów materialnych (c) oraz liczby osób na 100 ha UR (c)



Źródło: Opracowanie własne

Z analizy rys.2 (a) wynika, że aż w 80% gospodarstw w 2003 roku wartość produkcji końcowej nie przekroczyła wartości mediany (wartość środkowa) z 1993 roku a ponad połowa nie przekroczyła wartości drugiego decyla z 1993 roku. Jeszcze większe zróżnicowanie wystąpiło w wyposażeniu w majątek trwały (rys.2 (b)). W około 90% gospodarstw w 2003 roku wartość rzeczowego majątku trwałego była niższa od średniej wartości rzeczowego majątku trwałego

w gospodarstwach w 1993 roku. Również w ponad połowie gospodarstw w 2003 roku realna średnia wartość nakładów materialnych nie przekroczyła wartości drugiego decyla z 1993 roku (rys.2 (c)).

W następnym etapie badań określiliśmy miary elastyczności produkcji końcowej względem badanych cech. Badania efektywności czynników wytwórczych i elastyczności produkcji dokonaliśmy na podstawie dynamicznej funkcji potęgowej. Ze względu na duże zróżnicowanie obszaru UR badania te przeprowadziliśmy w dwóch rozłącznych grupach: w gospodarstwach rolniczych o obszarze do 15 ha UR (grupa I) i w gospodarstwach rolniczych o obszarze powyżej 15 ha (grupa II). Dla wyodrębnionych grup zbudowaliśmy te same modele dynamicznej funkcji potęgowej o postaci:

$$y_t = \gamma x_{1t}^{\beta_1} x_{2t}^{\beta_2} x_{3t}^{\beta_3} x_{4t}^{\beta_4} e^{\delta t + \varepsilon_t} \quad (2)$$

gdzie oznaczenia jak we wzorze (1)

W pierwszej kolejności parametry tej funkcji oszacowaliśmy KMNK. W tym celu dokonaliśmy linearyzacji funkcji potęgowej do postaci liniowej, poprzez obustronne logarytmowanie:

$$\ln y_t = \ln \lambda + \beta_1 \ln x_{1t} + \beta_2 \ln x_{2t} + \beta_3 \ln x_{3t} + \beta_4 \ln x_{4t} + \delta t \quad (3)$$

Parametry obliczone tą metodą oceny parametrów były parametrami startowymi w nieliniowej metodzie numerycznej (wykorzystano algorytm Marquardta). Oceny parametrów z modeli przedstawia tabela 4.

Tabela 4. Oceny parametrów, błędy standardowe oraz przedziały ufności

Nazwa zmiennej	gospodarstwa o powierzchni do 15 ha				gospodarstwa o powierzchni powyżej 15 ha			
	Współczynnik	Błąd standardowy	Granice przedziału ufności (95%)		Współczynnik	Błąd standardowy	Granice przedziału ufności (95%)	
Stała	4,459	1,112	3,620	5,493	1,7748	1,0962	1,4824	2,1249
$x_{1t}$	0,005	0,002	0,001	0,008	0,0003	0,0002	-0,00001	0,0006
$x_{2t}$	0,019	0,005	0,009	0,029	-0,0238	0,0102	-0,0439	-0,0038
$x_{3t}$	0,574	0,012	0,551	0,597	0,7084	0,0129	0,6831	0,7337
$x_{4t}$	0,007	0,002	0,003	0,011	0,1817	0,0121	0,1579	0,2055
t	0,154	0,012	0,131	0,177	0,0124	0,0019	0,0086	0,0162

Źródło: Opracowanie własne

Dla gospodarstw o obszarze UR do 15 ha uzyskano następujące oszacowania parametrów:

$$y_t = 4,46 x_{1t}^{0,005} x_{2t}^{0,019} x_{3t}^{0,574} x_{4t}^{0,007} e^{0,154t + \varepsilon_t} \quad (4)$$

$$\bar{R}^2 = 0,4832$$

Z obliczeń wynika, że największe znaczenie w objaśnianiu wielkości produkcji końcowej miały nakłady materialne. Wzrost nakładów materialnych o 1% powodował ceteris paribus wzrost produkcji końcowej średnio o około 58%. Wielkość wzrostu produkcji spowodowana postępem techniczno – organizacyjnego wynosi średnio  $(e^{\delta-1}) \cdot 100 = 16,65\%$  w skali rocznej. Jest to zdumiewająco wysoka wartość i według naszej opinii mało realna, tym bardziej, że dopasowanie modelu do danych empirycznych nie jest zadowalające.

Natomiast dla gospodarstw o obszarze UR powyżej 15 ha uzyskano następujące oszacowania parametrów:

$$y_t = 1,77x_{1t}^{0,0003} x_{2t}^{-0,024} x_{3t}^{0,71} x_{4t}^{0,18} e^{0,0124t + \varepsilon_t} \quad (5)$$

$$\bar{R}^2 = 0,6280$$

Dla gospodarstw powyżej 15 ha UR uzyskaliśmy znacznie wyższą elastyczność produkcji względem nakładów materialnych (około 71%). W tym przypadku efekt postępu techniczno – organizacyjnego wynosił 1,25% w skali roku. Wynik ten potwierdza innowacyjność właścicieli gospodarstw i wdrażanie nowych, bardziej wydajnych technik wytwarzania. Na uwagę zasługuje także różny kierunek wpływu nakładów pracy w obu badanych grupach. W gospodarstwach mniejszych obszarowo, do 15 ha wzrost zatrudnienia o 1% powodował wzrost produkcji średnio o 0,005% przy stałym poziomie innych czynników. Natomiast w drugiej grupie gospodarstw wpływ nakładów pracy na poziom produkcji był ujemny. W gospodarstwach obszarowo większych znaczenie siły roboczej było znacznie mniejsze.

Do ciekawych wniosków prowadzi porównanie przedziałów ufności oszacowanych parametrów w dwóch grupach gospodarstw. Z uwagi na rozłączność obliczonych przedziałów ufności wnioskujemy o różnym wpływie badanych cech na poziom produkcji w gospodarstwach do 15 ha UR i powyżej 15 ha UR. Wpływ obszaru UR na wielkość produkcji końcowej był niski w obu badanych grupach, dlatego też w dalszej analizie pominęliśmy tę cechę. Oszacowania parametrów dla modeli ekonometrycznych bez nakładów pracy w obu badanych grupach przedstawia tab. 5.

Tabela 5 .Oceny parametrów, błędy standardowe oraz przedziały ufności

Nazwa zmiennej	gospodarstwa o powierzchni do 15 ha				gospodarstwa o powierzchni powyżej 15 ha			
	Współczynnik	Błąd standardowy	Granice przedziału ufności (95%)		Współczynnik	Błąd standardowy	Granice przedziału ufności (95%)	
Stała	4,981	1,103	4,111	6,035	1,8638	1,0921	1,5682	2,2151
$x_{2t}$	0,016	0,005	0,006	0,026	-0,0355	0,0081	-0,0514	-0,0196
$x_{3t}$	0,579	0,012	0,556	0,601	0,7097	0,0129	0,6844	0,7349
$x_{4t}$	0,144	0,011	0,121	0,166	0,1790	0,0121	0,1553	0,2026
t	0,007	0,002	0,003	0,011	0,0127	0,0019	0,0089	0,0165

Źródło: Opracowanie własne

Oszacowaliśmy dwa rozłączne modele ekonometryczne, dla gospodarstw do 15 ha UR i powyżej 15 ha UR. Dla gospodarstw o obszarze UR do 15 ha uzyskano następujące oszacowania parametrów:

$$y_t = 4,98x_{2t}^{0,016} x_{3t}^{0,579} x_{4t}^{0,144} e^{0,007t + \varepsilon_t} \quad (6)$$

$$\bar{R}^2 = 0,4826$$

Jedyną zauważalną zmianą w porównaniu do poprzedniego modelu jest wyraźny wzrost elastyczności nakładów na rzeczowy majątek trwały, który wynosił średnio 0,14%. Wielkość wzrostu produkcji spowodowana postępem techniczno – organizacyjnego wynosi tu średnio  $(e^{\delta} - 1) \cdot 100 = 0,71\%$  w skali rocznej. Wyeliminowanie więc UR z modelu ekonometrycznego obniżyło bardzo wyraźnie wpływ postępu techniczno – organizacyjnego na wzrost produkcji. Z porównania wyników modeli ekonometrycznych (4) i (6) może wynikać wniosek, że w tej grupie gospodarstw postęp techniczno – organizacyjny był determinowany głównie poprzez wzrost obszaru UR. Perspektywa przyjęcia do UE i dopłaty do obszaru były czynnikami sprzyjającymi zwiększania obszaru UR.

Natomiast dla gospodarstw o obszarze UR powyżej 15 ha uzyskano następujące oszacowania parametrów:

$$y_t = 1,86x_{2t}^{-0,036} x_{3t}^{0,71} x_{4t}^{0,18} e^{0,0127t + \varepsilon_t} \quad (7)$$

$$\bar{R}^2 = 0,6277$$

W tej grupie gospodarstw wyeliminowanie UR z modelu ekonometrycznego nie spowodowało większych różnic. Efekt postępu techniczno – organizacyjnego został na podobnym poziomie i wynosił  $(e^{\delta} - 1) \cdot 100 = 1,28\%$  w skali rocznej. Pośrednio można więc wnioskować, że postęp w tej grupie gospodarstw nie był determinowany zwiększaniem obszaru UR a raczej innymi czynnikami. Efekt skali produkcji w obu badanych grupach był mniejszy od jedności i wynosił: dla grupy

gospodarstw o obszarze do 15 ha - 0,74 (por. (6)), a dla gospodarstw o obszarze powyżej 15 ha - 0,85 (por. (7)). Zatem w obu badanych grupach gospodarstw produkcja wzrastała wolniej niż nakłady, występował więc efekt malejącej skali produkcji.

## PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Przeprowadzone badania upoważniają nas do następujących uogólnień.

1. W badanych gospodarstwach, w okresie 1993 – 2003, nastąpiła koncentracja UR, przy jednoczesnym dużym ich zróżnicowaniu.
2. Realne wartości produkcji końcowej oraz nakładów na rzeczowy majątek trwały wykazywały tendencje malejące.
3. W analizowanym okresie nastąpił wzrost produktywności majątku trwałego oraz efektywności nakładów pracy.
4. Tempo racjonalizacji zatrudnienia i wyposażenia w majątek trwały oraz koncentracji obszaru UR było inne w gospodarstwach obszarowo mniejszych (do 15 ha) niż obszarowo większych (powyżej 15 ha).
5. Efekt postępu techniczno – organizacyjnego był różny w zależności od obszaru UR. W grupie gospodarstw do 15 ha postęp techniczno – organizacyjny był determinowany głównie poprzez wzrost obszaru.
6. W badanych gospodarstwach występowała malejąca wydajność czynników produkcji (elastyczność skali produkcji była w obu badanych grupach poniżej jedności).

## LITERATURA

- Borkowski B, Dudek H, Szczesny W.(2003): Ekonometria. Wybrane zagadnienie. PWN, Warszawa,
- Borkowski B: (2005) Tendencje zmian elastyczności substytucji nakładów pracy i nakładów na rzeczowe aktywa trwałe w gospodarstwach rolniczych. W: Gospodarstwa niekonwencjonalne na tle bazy produkcyjnej rolnictwa w Polsce, Urząd Statystyczny w Kielcach,. Kielce
- Greene W.H. (2000) Econometric Analysis. Prentice Hall, Inc. New Jersey
- Fuss M, McFadden D.,L.: (1978) Production Economics: A dual approach to theory and applications, Volume I: Theory of production, Volume II: Applications of theory of production Editors Amsterdam; North Holland
- Kowalczyk T., Pleszczyńska E., Ruland F., (Eds), (2004) Grade Models and Methods for Data Analysis Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

- Kukuła K. (2004) Wprowadzenie do ekonometrii w przykładach i zadaniach. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 2004.
- Varian H. (1992) Microeconomic Analysis. Norton. New York, London
- Żółtowska E. (1997) Funkcje produkcji. Wydawnictwo UŁ, Łódź
- (2003) Produkcyjno – ekonomiczna sytuacja gospodarstw prowadzących rachunkowość rolną w latach 1999 – 2001. Opracowanie IERiGŻ, Warszawa
- Zegar J. (2003) Zróżnicowanie regionalne rolnictwa, GUS, Warszawa
- (2006) Charakterystyka gospodarstw rolnych w 2005 roku. Informacje i opracowania statystyczne. GUS, Warszawa 2006.

### **The changes in Farm's production structure during 1993 – 2003 period**

**Summary:** Within the analysed homesteads, a rationalization of employment and equipment in assets members and a concentration of arable lands area have taken place. Price range indexes, which are disadvantageous for agriculture, have resulted in a drop of actual final output value and material asset members costs. Analysis has shown an increase in arable lands concentration within the examined homesteads, especially until year 1998 (the Gini index amounted to 0,544). An increase in productivity of asset members and effectiveness of invested work are the positive aspects of changes that took place within the homesteads. Effectiveness of productive factors and production flexibility, which were calculated based on a dynamic exponential function, differed within two separate groups of homesteads of dissimilar arable lands area.

**Key words:** Gini index

Katarzyna Brzozowska-Rup, Wiesław Dziubdziela  
Wyższa Szkoła Handlowa im. Bolesława Markowskiego w Kielcach  
e-mail: brzozows@poczta.fm, wiedziu@poczta.fm,

## ESTYMACJA “INDEKSU OGONA” WYBRANYCH SZEREGÓW FINANSOWYCH ZA POMOCĄ ENTROPII RENYI’EGO.

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono wstępne wyniki estymacji indeksu ogona rozkładów prawdopodobieństwa w wybranych szeregach finansowych. Zakładając rozkład Pareto, otrzymano za pomocą entropii Renyi’ego estymator indeksu ogona w przypadku stóp zwrotu indeksu. Analiza indeksu WIG wskazuje, że szereg czasowy jego zwrotów ma nieskończone momenty, natomiast w przypadku zwrotów indeksu DJ częstość pojawiania się dużych zmian jest znacznie mniejsza.

**Słowa kluczowe:** rozkłady z grubymi ogonami, rozkład Pareto, entropia Renyi’ego, estymacja jądrowa.

### WSTĘP

Bogata empiryczna analiza stóp zwrotu finansowych szeregów czasowych pozwala stwierdzić, że dominujące do niedawna modele bazujące na rozkładzie normalnym, w wielu przypadkach są dużym nadużyciem. Większość szeregów finansowych wykazuje: tendencje do skupiania danych, długoterminową zależność, asymetrię (częściej występują zwroty dodatnie), a prawdopodobieństwo pojawienia się skrajnych wartości, czy bardzo dużych zmian jest wyraźnie większe niż w przypadku rozkładu Gaussa. Wykresy kwantyli (QQ plot) pokazują, że duże zmiany występują znacznie częściej niż przewiduje to rozkład normalny, natomiast mniej jest średnich zmian (wartości odchylających się od średniej od 0,5 do 2,5 odchyłeń standardowych). W związku z powyższym konieczne jest poszukiwanie jakościowo nowych modeli.

Na podstawie przeprowadzonych badań okazuje się, że w wielu zjawiskach wartości ekstremalne pojawiają się zgodne z rozkładami potęgowymi. Celem pracy jest wykorzystanie rozkładów z grubymi ogonami do analizy finansowych szeregów czasowych. Została podjęta próba estymacji ciężkości ogona rozkładów szeregu zwrotów: dziennych notowań indeksu WIG i DJ przy założeniu, że dane pochodzą z rozkładu Pareto.

W literaturze przedmiotu definiowanych jest wiele różnych estymatorów indeksu, między innymi estymator: Hilla, Pickandsa, Dekkersa-Einmahla-de Haana, niestety otrzymane na ich podstawie oszacowania pozostawiają wiele do życzenia. W artykule zaprezentujemy próbę oszacowania indeksu ogona za pomocą entropii Renyi’ego.



## GRAFICZNA IDENTYFIKACJA ROZKŁADU POTĘGOWEGO.

Zmienna losowa  $X$  pochodzi z rozkładu potęgowego, jeżeli jej funkcja gęstości spełnia zależność:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{L(x)x^{-\alpha-1}} = 1, \quad (2.1)$$

gdzie:  $L(x)$  jest wolno zmieniającą się funkcją, tzn.  $\forall t > 0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$ ,

a  $\alpha$  jest stałą większą od zera, nazywaną indeksem ogona. Graficzna metoda wykrywania rozkładu potęgowego jest bezpośrednią konsekwencją własności funkcji przeżycia tego typu rozkładów. Zauważmy:

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \int_x^{\infty} p(x)dx \approx \frac{L(x)}{\alpha} x^{-\alpha} \quad (2.2)$$

po obustronnym zlogarytmowaniu związku (2.2) otrzymujemy równanie prostej:

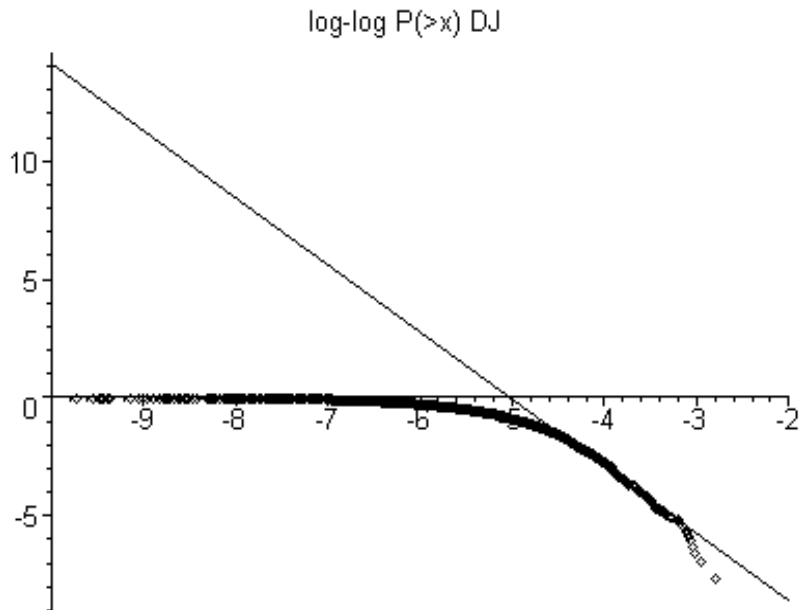
$$\ln(\bar{F}(x)) = -\alpha \ln x + \ln L(x) \quad (2.3)$$

Z powyższych rozważań wynika, że pierwszym krokiem badania szeregów pod kątem rozkładów z grubymi ogonami jest obserwacja empirycznej funkcji przeżycia w skali podwójnie logarytmicznej (Rysunek 1). Jeżeli dane pochodzą z rozkładu potęgowego, to wykres punktów  $(x, y) = (\ln(x_{(i)}), \ln(\bar{F}(x_{(i)})))$  układa się wzdłuż prostej o współczynniku kierunkowym  $(-\alpha)$ . W celu wyznaczenia empirycznej funkcji przeżycia, należy uporządkować obserwacje od największej do najmniejszej  $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \dots \geq x_{(n)}$  (statystyki porządkowe), wtedy

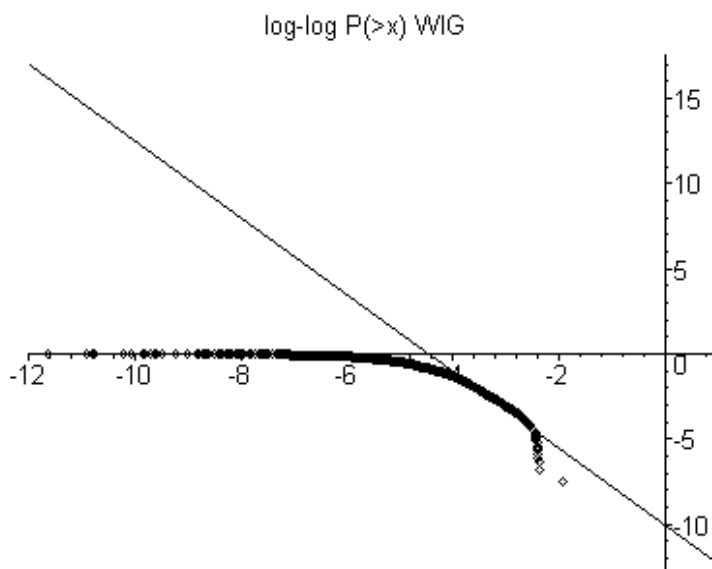
$$\bar{F}(x_{(i)}) = P(X \geq x_{(i)}) = \frac{i}{n} \quad (2.4)$$

Niestety metoda jest bardzo wrażliwa zarówno na wielkość próby, jak i na liczbę obserwacji uwzględnionych w modelu regresji. Z przeprowadzonych badań wynika, że właściwe zachowanie ogona widoczne jest dopiero dla bardzo dużych (co do wartości bezwzględnej) obserwacji. W praktyce oznacza to, że do otrzymania wiarygodnego estymatora ciężkości ogona, należy posłużyć się bardzo dużą liczbą obserwacji, wybierając tylko wartości skrajne.

Stosując przedstawioną metodę dla stóp zwrotu indeksu DJ otrzymaliśmy  $\hat{\alpha} = -2,84$ , natomiast w przypadku stóp zwrotu oszacowany parametr  $\hat{\alpha} = -2,26$ .



Rysunek 1. Funkcje przeżycia szeregów stóp zwrotu indeksów DJ w skali podwójnie logarytmicznej wraz z dopasowanymi funkcjami regresji dla wartości skrajnych.



Rysunek 2. Funkcje przeżycia szeregów stóp zwrotu indeksów WIG w skali podwójnie logarytmicznej wraz z dopasowanymi funkcjami regresji dla wartości skrajnych

## ESTYMACJA FUNKCJI GĘSTOŚCI ROZKŁADU.

W teorii statystyki istnieje wiele sposobów estymacji nieznannej postaci funkcji gęstości, niestety część z nich nie może być użyta w przypadku rozkładów z grubymi ogonami, np. metoda krzywych Pearsona - zakłada istnienie czterech pierwszych momentów zwykłych i centralnych.

W naszych badaniach zastosujemy estymację funkcji gęstości za pomocą jądra. Wyboru jądra dokonujemy w taki sposób, aby otrzymany estymator gęstości uwzględniał istnienie grubszych ogonów niż w rozkładzie normalnym. Definiujemy jądra za pomocą pewnej modyfikacji (tak, aby spełnione były poniższe warunki) funkcji gęstości rozkładu Laplace'a i rozkładu Cauchy'ego.

Estymatorem jądrowym gęstości  $f(x)$  nazywamy funkcję postaci:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (3.1)$$

gdzie  $K(x)$  jest odwzorowaniem spełniającym następujące warunki:

1.  $\int_{\mathbb{R}} |K(x)|^2 dx < \infty$ ,
2.  $\int_{\mathbb{R}} K(x) dx = 1$ ,
3.  $K(x) = K(-x)$  dla  $x \in (-\infty, \infty)$ ,

Okazuje się, że jakość estymacji jądrowej w większym stopniu zależy od wyboru szerokości pasma,  $h$  (bandwidth) niż od kształtu jądra. Zbyt małe wartości parametru  $h$  (gdy  $h$  dąży do zera) powodują, że szukany estymator gęstości jest nieregularny, „najeżony pikami”, z dużym prawdopodobieństwem zawiera wahania przypadkowe. Natomiast w przeciwnym przypadku, gdy szerokość pasma jest zbyt duża estymator jest co prawda gładki, ale może okazać się za bardzo wygładzony, a przez to tracić istotne własności poszukiwanego rozkładu. Szerokość pasma można traktować jako stopień/parametr wygładzania estymowanej funkcji gęstości, ale chociaż metodom jego wyboru poświęcono wiele prac, nadal nie jest to zadanie proste.

Jako wstępne kryterium wyboru szerokości pasma zastosowaliśmy metodę graficzną – wizualna ocena zgodności kształtu histogramu empirycznego i szacowanej gęstości.

## RELACJA MIĘDZY ENTROPIĄ A INDEKSEM OGONA ROZKŁADU.

Pojęcie entropii występuje w wielu dziedzinach nauki, między innymi takich jak termodynamika czy teoria informacji - powoduje to różne sposoby

definiowania tej wielkości. Niemniej w każdym przypadku entropia jest pewną miarą niepewności – nieporządku systemu dynamicznego (przy czym nieporządek niekoniecznie musi oznaczać nieład przestrzenny struktury). Entropia jest funkcją częstotliwości występowania określonych konfiguracji.

W naszych badaniach posłużymy się definicją entropii zaproponowaną przez Renyi'ego, wówczas ogólny wzór na entropię rzędu  $\beta$  ma postać:

$$R_\beta(f) = \frac{1}{1-\beta} \ln \int_R f^\beta(x) dx, \quad \beta > 0, \beta \neq 1 \quad (4.1)$$

lub w przypadku dyskretnym:

$$\hat{R}_\beta(p) = \frac{1}{1-\beta} \ln \sum_{i=1}^k p_i^\beta \quad (4.2)$$

Wielkość  $k$  określa liczbę pojawiających się mikrostanów,  $\beta$  jest parametr skalowania (zooming parameter).

Celem pracy jest analiza ogonów rozkładów finansowych szeregów czasowych. Przypomnijmy, funkcja gęstości rozkładu Pareto wyraża się wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \theta^\alpha x^{-(\alpha+1)} & x > \theta \\ 0 & x \leq \theta \end{cases} \quad (4.3)$$

gdzie:  $\theta > 0$ ,  $\alpha > 0$  - jest miarą grubości ogona rozkładu. Grubość ogona określa prawdopodobieństwo pojawienia się obserwacji ekstremalnych, im mniejsze  $\alpha$  tym grubszy ogon, a tym samym więcej jest takich wartości.

Podstawowe charakterystyki rozkładu Pareto mają postać:

Wartość oczekiwana:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \theta, \quad \text{dla } \alpha > 1 \quad (4.4)$$

Wariancja:

$$D^2(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \cdot \theta^2, \quad \text{dla } \alpha > 2 \quad (4.5)$$

Z powyższych relacji otrzymujemy naturalną interpretację wykładnika  $\alpha$ , a mianowicie określa maksymalny rząd momentu skończonego.

Do ustalenia wstępnych wniosków przyjmijmy  $\beta = 2$  (quadratic entropy), wówczas entropia Renyi'ego, dla rozkładu Pareto wynosi :

$$R_2(f) = -\ln \int_{\theta}^{+\infty} \alpha^2 \theta^{2\alpha} x^{-2(\alpha+1)} dx = -\ln \frac{\alpha^2}{1+2\alpha} \theta^{-1} \quad (4.6)$$

$\Updownarrow$

$$\exp(-R_2(f)) = \frac{\alpha^2}{1+2\alpha} \theta^{-1} \quad (4.7)$$

Zdefiniujmy nową zmienną  $T = \theta \exp(-R_2(f))$ , wówczas równość (4.7) przekształca się w proste równanie kwadratowe:

$$\alpha^2 - (1 + 2\alpha)T = 0 \quad (4.8)$$

$$\Delta = 4T^2 + 4T$$

Zauważmy, że  $T$  przyjmuje wartości większe od 0, skąd wynika, że równanie (4.8) posiada dwa pierwiastki rzeczywiste, które określają związek między entropią a wykładnikiem  $\alpha$ :

$$\alpha_1(T) = T - \sqrt{T^2 + T} \quad (4.9)$$

$$\alpha_2(T) = T + \sqrt{T^2 + T} \quad (4.10)$$

W definicji rozkładu Pareto wykładnik  $\alpha > 0$ , stąd jedynym rozwiązaniem jest pierwiastek  $\alpha_2(T)$ .

Powyższe obliczenia pozwalają określić estymator parametru  $\alpha$  wzorem:  $\hat{\alpha}(T) = T + \sqrt{T^2 + T}$ . Teraz problem sprowadza się do oszacowania wartości entropii rzędu 2.

## ESTYMACJA ENTROPII RENYI'EGO.

Wzór na entropię Renyi'ego rzędu  $\beta$  zmiennej losowej pochodzącej z rozkładu o funkcji gęstości  $f_X$ , oraz zauważmy, że można go wyrazić za pomocą wartości oczekiwanej zmiennej  $f_X^{\beta-1}(X)$ :

$$R_\beta(f) = \frac{1}{1-\beta} \ln \int_R f_X^\beta(x) dx = \frac{1}{1-\beta} \ln E_X[f_X^{\beta-1}(X)] \quad (5.1)$$

Jak wyżej rozważamy szczególnie przypadek, gdy parametr  $\beta = 2$ , wówczas:

$$R_2(f) = -\ln E_X[f_X(X)] \quad (5.2)$$

Wzór, z którego będziemy korzystać estymując entropię, otrzymujemy podstawiając w relacji (5.2) estymator jądrowy (3.1) funkcji  $f_X$ , stąd:

$$R_2(f) = -\ln E_X[f_X(X)] = -\ln \left[ \frac{1}{n^2 h} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right] \quad (5.3)$$

## BADANIA EMPIRYCZNE

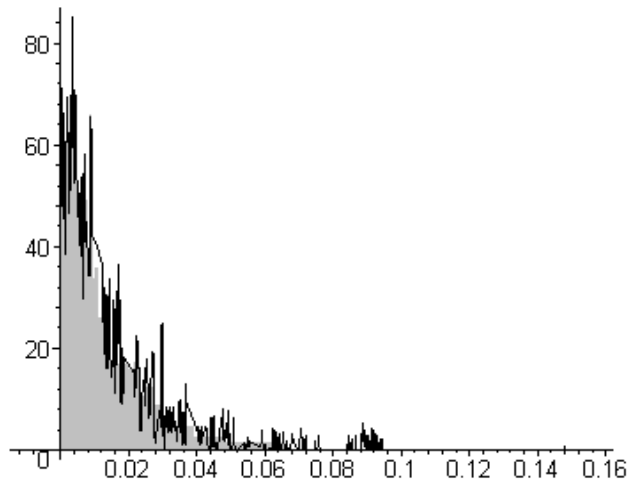
W naszych badaniach ograniczyliśmy się do szacowania ciężkości prawych ogonów rozkładów. Estymując funkcję gęstości za pomocą jądra, obliczenia powtórzyliśmy dla kilku szerokości pasma.

Poniższe tabele i wykresy przedstawiają wyniki naszej analizy przeprowadzonej dla:

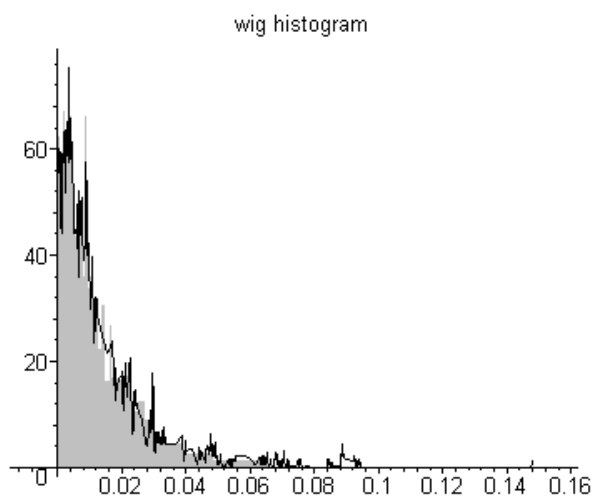
- a** Dziennych notowań indeksu DJ, kurs zamknięcia (okres obserwacji: 02.10.1990-0.3.03.2006, łącznie 4078 danych, 2128 dodatnich stóp zwrotu),
- b** Dziennych notowań indeksu WIG, kurs zamknięcia (okres obserwacji: 23.04.1991- 0.3.03.2006, 3271, 1728 dodatnich stóp zwrotu),

Zanim przystąpiliśmy do analizy danych rzeczywistych, dokonaliśmy estymacji funkcji gęstości dla szeregu wygenerowanego z rozkładu Pareto ze znanym parametrem  $\alpha$ , generowaliśmy szereg  $\{u_t\}_{t=1}^{1000}$ , gdzie  $U_t = u_{\min} (1-x)^{-1/\alpha}$ , a zmienna losowa  $X$  jest zmienną o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0, 1)$ . W przypadku, gdy  $\alpha = 2$ , zarówno z jądrem Laplace'a jak i Cauchy'ego wartość wyestymowanej grubości ogona pokrywa się z wartością rzeczywistą, o ile szerokość pasma nie jest zbyt duża.

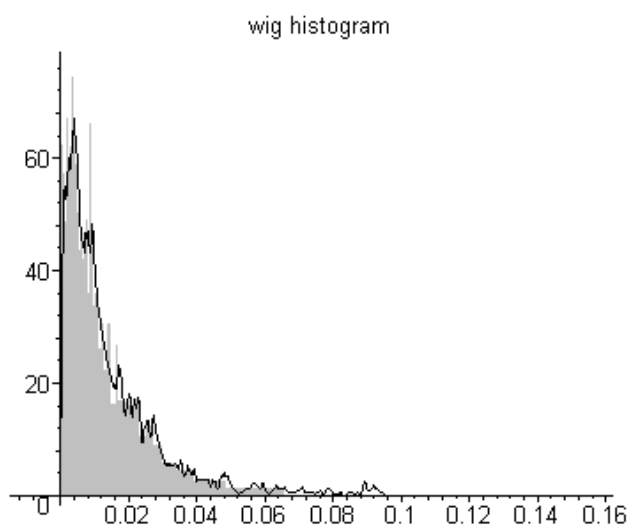
wig histogram



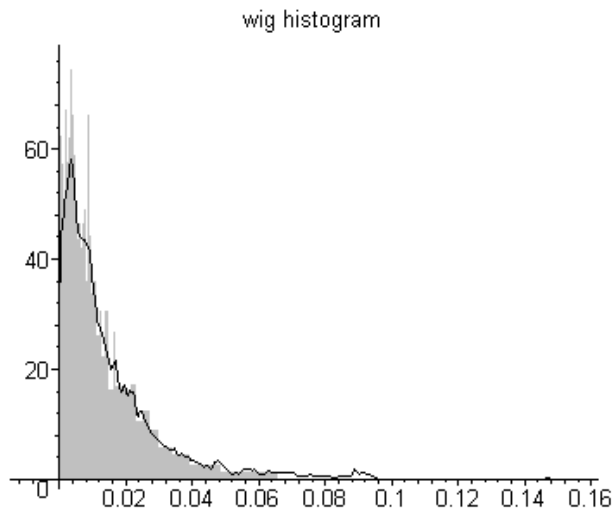
Rysunek 3 Estymacja jądrem Laplace'a szerokość pasma  $2 \cdot h$



Rysunek 4. Estymacja jądrem Cauchy'ego szerokość pasma  $2 \cdot h$

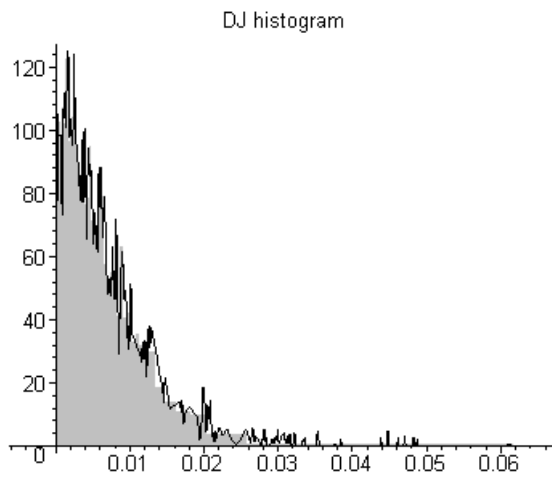


Rysunek 5. Estymacja jądrem Laplace'a szerokość pasma  $10 \cdot h = 0,036$



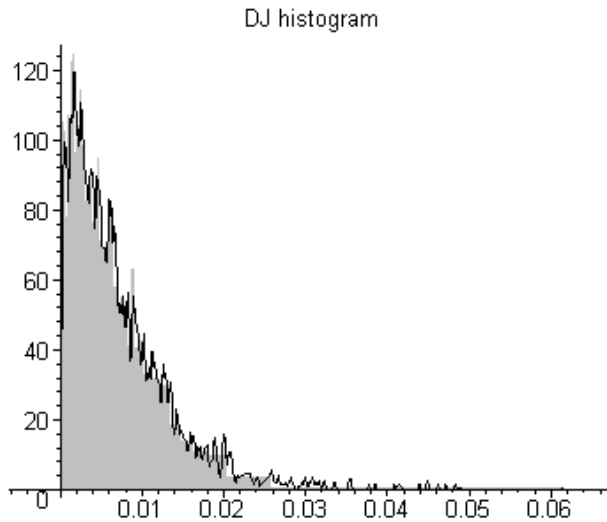
Rysunek 6. Estymacja jądrem Cauchy'ego szerokość pasma  $10 \cdot h = 0,036$

Poniższe rysunki przedstawiają wybrane efekty estymacji funkcji gęstości szeregów zwrotów notowań indeksu DJ za pomocą jądra Laplace'a,  $L_{(s/\sqrt{2}, 0)}$ .



Rysunek 7. Estymacja jądrem Laplace'a szerokość pasma  $12 \cdot h$





Rysunek 8. Estymacja jądrem Laplace'a szerokość pasma  $20 \cdot h$

Wyniki prezentowanej procedury szacowania ciężkości ogonów analizowanych szeregów przedstawiają tabele poniżej:

Tabela 1. Wyniki analizy dla szeregu generowanego z rozkładu Pareto z parametrem  $\alpha = 2$  :

jądro/pasmo	$h/4$	$h/2$	$h=0,018$	$10h$
Laplace'a	2	2	2	1,08
Cauchy	2	2	2	1,65

Tabela 2. Wyniki analizy szeregu dodatnich stop zwrotu indeksu WIG (estymacja gęstości dla szeregu dodatnich stop zwrotu )

jądro/pasmo	$h/2$	$h=0,0036$	$2h$	$5 \cdot h$	$10 \cdot h$
Laplace'a	1,019	0,974	0,949	0,926	0,908
Cauchy	1,052	0,988	0,948	0,908	0,875

Tabela 3. Wyniki analizy szeregu dodatnich stop zwrotu indeksu DJ (estymacja gęstości tylko dla dodatnich stop zwrotu)

jądro/pasmo	$h/2$	$h=0,001$	$5 \cdot h$	$10h$	$12 \cdot h$	$20 \cdot h$
Laplace'a	3,076	2,808	2,384	2,529	2,521	2,494
Cauchy	3,004	2,88	2,234	2,494	2,481	2,477

## WNIOSKI.

Rozkłady potęgowe często nazywane są rozkładami z grubymi/ciężkimi ogonami - im grubszy ogon, tym więcej wartości ekstremalnych.

W wyniku przeprowadzonych badań na szeregu stóp zwrotu indeksu WIG okazało się, że estymator indeksu ogona w większości przypadków nie przekracza jedynki, a to oznaczałoby, że szereg pochodzi z rozkładu, w którym nie istnieje żaden moment skończony. Proces stochastyczny o nieskończonej wariancji, choć jest dobrze określony matematycznie, jest niesłychanie trudny do zastosowania. W przypadku układów finansowych nieskończona wariancja wprowadziłaby ogromne komplikacje przy szacowaniu ryzyka.

W przypadku analizy stóp zwrotu indeksu DJ wyniki nie są tak zaskakujące, estymatory otrzymane metodą entropii przyjmują wartości powyżej dwójki i pokrywają się z wartością estymatora  $\hat{\alpha}$  otrzymaną metodą graficzną.

Zaprezentowano wstępne wyniki estymacji indeksu ogona rozkładu w zamiarach autorów leży dogłębne, teoretyczne zbadanie własności zaproponowanego estymatora, jak również wykorzystanie innych sposobów estymacji entropii, potrzebnej do oszacowania szukanego indeksu.

## LITERATURA

- Domański Cz., Pruska K. (2000) „Nieklasyczne metody statystyczne”, PWE, Warszawa,  
 Ombach J. (1996) „Wykłady z równań różniczkowych”, WUJ, Kraków,  
 Reimann S, „An Elementary Model of Price Dynamice In A Financial Market. Distribution, Multiscaling & Entropy”, physics/0602097.  
 Weron A., Weron R. (1999) „Inżynieria finansowa”, WNT, Warszawa,

### **Use Renyi's entropy for estimating tail index in financial time series.**

**Summary:** Empirical analysis of financial time series indicates that there is a great demand for qualitative new models. Paper presents preliminary results for estimating tail index applying Renyi entropy. Empirical results show that exchange rate of WIG's time series are generated from distribution with significantly fatter tails than DJ's time series.

**Key words:** heavy-tailed distribution, Pareto distribution, Renyi entropy, Kernel estimation.

Hanna Dudek<sup>a</sup>, Monika Dybciak<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW

<sup>b</sup>studentka Międzywydziałowego Studium Informatyki i Ekonometrii

e-mail: hdudek@mors.sggw.waw.pl

## ZASTOSOWANIE MODELU LOGITOWEGO DO ANALIZY WYNIKÓW EGZAMINU

**Streszczenie:** W pracy podjęto próbę wyjaśnienia przyczyn wysokiego udziału ocen negatywnych uzyskanych z egzaminu z ekonometrii na Międzywydziałowym Studium Informatyki i Ekonometrii SGGW. W celu określenia wielkości wpływu czynników objaśniających wynik egzaminu zastosowano model logitowy. Model ten stanowi jeden z rodzajów modeli dwumianowych, w których zmienna objaśniana jest zmienną zerojedynkową.

Przedstawiono metody estymacji i weryfikacji modelu logitowego. Podano sposób interpretacji otrzymanych wyników. Na podstawie oszacowanego modelu stwierdzono, że systematyczna praca w ciągu semestru oraz dobry wypoczynek bezpośrednio przed pisaniem pracy egzaminacyjnej zwiększały prawdopodobieństwo zdania otrzymania oceny pozytywnej.

**Słowa kluczowe:** model logitowy, zmienna zerojedynkowa, wyniki egzaminu.

### WSTĘP

Uzyskanie oceny negatywnej z egzaminu jest przykrym doświadczeniem. Oznacza konieczność ponownej weryfikacji wiedzy z danego przedmiotu. W niektórych wyższych uczelniach niezdanie egzaminu w pierwszym terminie wiąże się z utratą otrzymywania stypendium naukowego w następnym roku akademickim. Regulamin Szkoły Wyższej Gospodarstwa Wiejskiego nie narzuca takich sankcji. Jednakże negatywna ocena uzyskana ponownie na egzaminie poprawkowym przekreśla zwykle możliwość ubiegania się o takie stypendium. Zdecydowanie poważniejszą konsekwencją jest zasadnicza trudność w kontynuowaniu studiów. Negatywna ocena uzyskana na egzaminie może mieć także znaczenie psychologiczne. Student czasem zastanawia się nad tym, czy wybrał właściwy kierunek studiów oraz czy w ogóle powinien studiować. Rozważania takie rzadko bywają konstruktywne. Dlatego też powinno się minimalizować ryzyko niezdania egzaminu.

W pracy tej podjęto próbę analizy zależności wyniku egzaminu od różnych czynników na podstawie zbudowanego modelu ekonometrycznego. Oszacowany model może pomóc odpowiedzieć na pytanie jak zwiększyć prawdopodobieństwo uzyskania oceny pozytywnej.

## DANE EMPIRYCZNE

Analizowane w pracy dane dotyczą studentów trzeciego roku pięcioletnich dziennych studiów magisterskich Międzywydziałowego Studium Informatyki i Ekonometrii SGGW w roku akademickim 2004/2005. Studenci w semestrze zimowym uczęszczali na zajęcia z „Ekonometrii” w wymiarze 30 godzin wykładów i 30 godzin ćwiczeń. Ekonometria była na kierunku studiów „Informatyka i ekonometria” przedmiotem kierunkowym kończącym się egzaminem z liczbą punktów ECTS wynoszącą 5.

W roku akademickim 2004/2005 na trzecim roku pięcioletnich studiów dziennych magisterskich Międzywydziałowego Studium Informatyki i Ekonometrii SGGW zarejestrowanych było 82 osoby. Do egzaminu z przedmiotu „Ekonometria” w pierwszym terminie przystąpiło 77 studentów. 5 osób nie zdawało wtedy egzaminu z powodu braku zaliczenia ćwiczeń bądź z powodu choroby. Ocenę pozytywną otrzymało 45 studentów, co stanowiło 58,44% wszystkich zdających.

Po konsultacjach ze studentami ustalono zestaw czynników wpływających na wyniki egzaminu. Na podstawie tych informacji sporządzono anonimową ankietę internetową. Odpowiedziało na nią 39 studentów, wśród których 23 zdały egzamin, co stanowiło 58,97% wszystkich osób udzielających odpowiedzi. Procentowy udział liczby prac egzaminacyjnych z oceną pozytywną był zatem zbliżony do analogicznego udziału wśród wszystkich osób przystępujących do egzaminu. Dzięki ankiecie internetowej otrzymano informacje, na podstawie których określono następujące zmienne:

Y przyjmującą wartość 1 jeśli student zdał egzamin z ekonometrii w pierwszym terminie oraz 0 w przypadku otrzymania oceny negatywnej,

$X_1$  określającą liczbę opuszczonych godzin wykładów i ćwiczeń z ekonometrii,

$X_2$  odnoszącą się do liczby godzin poświęconych na naukę indywidualną tego przedmiotu przed egzaminem,

$X_3$  oznaczającą ocenę uzyskaną na zaliczenie ćwiczeń z ekonometrii,

$X_4$  określających liczbę godzin snu danego studenta w ostatniej dobie przed egzaminem.

Poniżej przedstawiono krótką charakterystykę zmiennych  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  i  $X_4$ .

Tabela 1. Miary położenia i zróżnicowania zmiennych

Miary:	Zmienne:			
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
Średnia arytmetyczna	3,41	33,77	3,85	7,06
Mediana	3,00	25,00	4,00	7,00
Odchylenie standardowe	3,15	27,38	0,67	1,20
Minimum	0	2	3	4
Maksimum	11	100	5	10

Źródło: obliczenia własne.

Największym zróżnicowaniem cechuje się  $X_1$  - współczynnik zmienności wynosi 89,74%. Bardzo budujące są informacje dotyczące mediany rozkładu tej zmiennej - absencja co najmniej 50% studentów nie przekraczała 3 godzin. Wśród badanych 39 osób byli studenci, którzy nie opuścili ani jednego zajęcia, „rekordziści” zaś nie byli obecni na 11 godzinach. Współczynniki zmienności dla  $X_2$  jest równy 81,08%, co świadczy o znacznym zróżnicowaniu liczby godzin poświęconej na naukę indywidualną przed egzaminem. Średnio do egzaminu przygotowano się ok. 30 godzin, zdarzały się przy tym osoby uczące się jedynie 2 godziny jak i takie, które poświęcały 100 godzin. Zmienne  $X_3$  i  $X_4$  charakteryzują się stosunkowo niewielkim zróżnicowaniem, współczynniki zmienności są zbliżone: dla  $X_3$  - 17,40% oraz dla  $X_4$  - 17,00%. Zwraca tu uwagę stosunkowo wysoka średnia uzyskana na zaliczenie ćwiczeń oraz fakt, że co najmniej połowa ankietowanych studentów spała przed egzaminem nie mniej niż 7 godzin.

Dla powyższych zmiennych zbudowano model, w którym zmienną objaśnianą jest  $Y$  a zestaw potencjalnych zmiennych objaśniających stanowią  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  i  $X_4$ .

## MODELE ZMIENNYCH JAKOŚCIOWYCH

Modele dwumianowe (dychotomiczne) są najprostszymi i najpopularniejszymi modelami, w których zmienna objaśniana jest zmienną jakościową. W modelach tych zmienna objaśniana jest kwantyfikowana za pomocą zmiennej zerojedynkowej. Niech  $y_i$  oznacza  $i$ -tą realizację zmiennej zerojedynkowej  $Y$ . Zmienna  $y_i$  ma rozkład Bernoulliego. Przyjmuje wartość 1 z prawdopodobieństwem  $P_i$  oraz wartość 0 z prawdopodobieństwem  $1-P_i$ .

Wartość oczekiwana zmiennej  $y_i$  wynosi:

$$E(y_i) = 1 \cdot P_i + 0 \cdot (1 - P_i) = P_i \quad (1)$$

W modelach dwumianowych zakłada się, że  $P_i$  jest funkcją wektora wartości zmiennych objaśniających  $\mathbf{x}_i$  dla  $i$ -tego obiektu oraz wektora parametrów  $\boldsymbol{\beta}$ :

$$P_i = P(y_i = 1) = F(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \quad (2)$$

W zależności od typu funkcji  $F$  wyróżnia się różne rodzaje modeli [Judge i in. 1985]. Do najbardziej znanych należą:

- liniowy model prawdopodobieństwa, którym  $P_i = F(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ , (3)

- model probitowy, gdzie  $P_i = F(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ , (4)

- model logitowy, dla którego  $P_i = F(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{1 + \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})}$ . (5)

Zastosowanie najprostszego z przedstawionych modeli - liniowego modelu prawdopodobieństwa ma wiele negatywnych konsekwencji [Gruszczynski 2002, Maddala 2002].

1. Składnik losowy modelu  $y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i$  jest heteroskedastyczny, gdyż  $\text{Var}(\varepsilon_i) = P_i(1 - P_i)$ .
2. Składnik losowy modelu  $y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i$  nie ma rozkładu normalnego, co powoduje trudności w zastosowaniu testów istotności.
3. Wartości  $\hat{y}_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}$  mogą wykraczać poza przedział  $[0, 1]$  (przez  $\mathbf{b}$  oznaczono wektor ocen wektora parametrów  $\boldsymbol{\beta}$ ).
4. Współczynnik determinacji  $R^2$  w modelu LMP przyjmuje zwykle bardzo niskie wartości.

Ponadto, jak wskazuje Gujarati [Gujarati 2003], fundamentalny problem w stosowaniu LMP polega na przyjęciu założenia, że prawdopodobieństwo w sposób liniowy zależy od zmiennych objaśniających, co jest równoznaczne z założeniem, że krańcowy efekt jest stały. W większości problemów praktycznych zależność prawdopodobieństwa od zmiennych objaśniających jest nieliniowa.

Jak wskazują niektórzy autorzy modele probitowe i logitowe są podobne do siebie i w praktyce wykorzystuje się jeden z nich [Judge i in. 1985].

## MODEL LOGITOWY

Wartość funkcji odwrotnej do F, określonej wzorem (5), czyli

$$F^{-1}(P_i) = \ln \frac{P_i}{1 - P_i} \quad (6)$$

nazywa się logitem. Stąd dla modelu (5) przyjęło się w literaturze przedmiotu określenie „model logitowy”.

Na podstawie tego modelu można określić marginalny przyrost prawdopodobieństwa:

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_{ji}} = \beta_j \frac{\exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})}{[1 + \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})]^2} = \beta_j P_i(1 - P_i). \quad (7)$$

Ponieważ  $P_i(1 - P_i) > 0$ ,  
to znak parametru stojącego przy zmiennej  $X_j$  określa kierunek wpływu  $X_j$  na  $Y$ :

- dodatniemu  $\beta_j$  odpowiada wzrost prawdopodobieństwa tego, że  $Y=1$ , jeśli  $X_j$  zwiększa się,
- ujemnemu  $\beta_j$  towarzyszy spadek prawdopodobieństwa tego, że  $Y=1$ , jeśli  $X_j$  zwiększa się, przy założeniu, że pozostałe zmienne objaśniające pozostają bez zmian.

Do interpretacji oszacowanego modelu logitowego wykorzystuje się również wyrażenie  $\frac{P_i}{1 - P_i}$  nazywane ilorazem szans. Iloraz szans określa zatem stosunek prawdopodobieństwa, że  $Y=1$  do prawdopodobieństwa, że  $Y=0$ . Ponieważ

$\frac{P_i}{1-P_i} = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$ , zatem  $\exp(\beta_j)$  informuje ile razy zwiększa się iloraz szans jeśli zmienna  $X_j$  wzrasta o jednostkę, ceteris paribus.

Na podstawie oszacowanego modelu  $\hat{P}_i = \frac{1}{1 + \exp(-b_0 - b_1 x_{1i} - \dots - b_k x_{ki})}$

można określić prognozy:

$$\hat{y}_i = 1, \text{ jeśli } \hat{P}_i > p^* \text{ oraz}$$

$$\hat{y}_i = 0, \text{ jeśli } \hat{P}_i \leq p^*$$

Zwykle przyjmuje się wartość odcinającą  $p^* = 0,5$ . Jednakże niektórzy autorzy [Judge i in. 1985] proponują ustalić tę wartość w taki sposób, aby uwzględnić fakt niezbilansowania próby. Przez próbę niezbilansowaną uważa się próbę, gdzie  $n_1$  różni się od  $n_0$ , gdzie  $n_1$  i  $n_0$  -liczba przypadków, dla których odpowiednio  $Y$  przyjmuje wartość 1 oraz 0. W takiej sytuacji proponuje się  $p^* = \frac{n_1}{n}$ , gdzie  $n = n_0 + n_1$ .

## ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELU LOGITOWEGO

Do estymacji parametrów  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  stosuje się zwykle metodę największej wiarygodności. Jeśli dysponuje się  $n$ -elementową próbą  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , gdzie każda z  $y_i$  przyjmuje wartość 1 z prawdopodobieństwem  $P_i$  określonym jako (5), to funkcja

wiarygodności ma postać:  $L = \prod_{i=1}^n P_i^{y_i} (1 - P_i)^{1-y_i}$ , (9)

stąd logarytm tej funkcji można zapisać jako:

$$\ln L = \sum_{i=1}^n [y_i \ln P_i + (1 - y_i) \ln(1 - P_i)] = \sum_{i=1}^n y_i \ln \left( \frac{P_i}{1 - P_i} \right) + \sum_{i=1}^n \ln(1 - P_i) \quad (10)$$

Wykorzystując zależność (5) otrzymuje się:

$$\ln L = \sum_{i=1}^n y_i (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki}) + \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{1}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki})} \right) \quad (11)$$

Należy zatem przy znanych wartościach  $y_i, x_{1i}, \dots, x_{ki}, i=1, 2, \dots, n$ , oszacować tak parametry  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ , by zapewniały maksymalną wartość logarytmu funkcji wiarygodności. W tym celu należy obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji  $\ln L$  i przyrównać je do zera. Otrzymuje się wówczas  $k+1$  równań nieliniowych;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki})} \right) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki})} \right) x_{1i} = 0 \quad (13)$$

⋮

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki})} \right) x_{ki} = 0 \quad (14)$$

Powyższe równania są nieliniowe ze względu na parametry  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ . Nie można podać analitycznych wzorów określających estymatory tych parametrów. Dlatego też do poszukiwania maksimum logarytmu funkcji wiarygodności należy zastosować procedury iteracyjne. Macierz drugich pochodnych jest ujemnie określona dla wszystkich wartości parametrów  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  [Gujarati 2003]. To oznacza, że logarytm funkcji wiarygodności jest funkcją wklęsłą, zatem maksimum lokalne jest maksimum globalnym. Zwykle więc osiągnięta jest zbieżność w procesie iteracyjnym.

## TESTY ISTOTNOŚCI PARAMETRÓW

Estymatory parametrów uzyskane metodą największej wiarygodności mają asymptotyczny rozkład normalny i są asymptotycznie najefektywniejsze. Zatem dla dostatecznie dużych prób do testowania statystycznej istotności parametrów można wykorzystać asymptotyczny test t Studenta.

Do weryfikacji hipotezy zerowej:

$$H_0: \beta_j = 0, \quad (15)$$

wobec hipotezy alternatywnej:  $H_1: \beta_j \neq 0, = 1, 2, \dots, k$ ,

wykorzystuje się także statystykę ilorazu wiarygodności [Greene 2000]:

$$LR_j = -2(\ln \hat{L}_{Rj} - \ln \hat{L}_{UR}) \quad (16)$$

gdzie  $\ln \hat{L}_{Rj}$  jest wartością maksymalną logarytmu funkcji wiarygodności dla modelu z wyrazem wolnym zawierającego zmienne  $X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k$  (tj. bez zmiennej  $X_j$ ),

$\ln \hat{L}_{UR}$  - wartość wartością maksymalną logarytmu funkcji wiarygodności dla pełnego modelu (tj. ze zmiennymi  $X_1, \dots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \dots, X_k$ ).

Statystyka  $LR_j$  ma dla dużych prób rozkład  $\chi^2$  z 1 stopniem swobody.

Test ilorazu wiarygodności stosuje się także do weryfikacji hipotezy o braku statystycznej istotności wszystkich parametrów przy zmiennych objaśniających. Hipoteza zerowa ma wtedy postać:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0, \quad (17)$$

a hipotezę alternatywną można sformułować w następujący sposób:

$$H_1: \text{co najmniej jeden parametr } \beta_j \neq 0, = 1, 2, \dots, k.$$

Wtedy statystyka ilorazu wiarygodności może być zapisana jako:



$$LR = -2(\ln \hat{L}_R - \ln \hat{L}_{UR}), \quad (18)$$

gdzie  $\ln \hat{L}_R$  jest maksymalną wartością logarytmu funkcji wiarygodności dla modelu zawierającego jedynie wyraz wolny,

$\ln \hat{L}_{UR}$  - wartością maksymalną logarytmu funkcji wiarygodności dla pełnego modelu.

Statystyka LR ma dla dużych prób rozkład  $\chi^2$  z k stopniami swobody.

## OCENA ZGODNOŚCI MODELU Z DANYMI EMPIRYCZNYMI

Dla modeli binarnych stosuje się różne miary oceniające zgodność modelu z danymi empirycznymi. Wiele z tych miar konstruuje się na zasadzie odpowiedników klasycznego współczynnika determinacji dla modelu liniowego szacowanego metodą najmniejszych kwadratów.

Najprostszą miarą jest kwadrat współczynnika korelacji między wartościami empirycznymi zmiennej objaśnianej a wartościami wyznaczonymi z modelu:

$$R^2 = [r(y, \hat{P})]^2. \quad (19)$$

Propozycja Efrona zaś opiera się na pomysśle, aby we wzorze na klasyczny

współczynnik determinacji :  $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$  zamiast sumy kwadratów reszt

podstawić  $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{P}_i)^2$  [Maddala 2002].:

$$R_{Efron}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{P}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (20)$$

Ponieważ

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = n_1 - n \left( \frac{n_1}{n} \right)^2 = \frac{n_1 n_0}{n}, \quad (21)$$

to współczynnik Efrona można zapisać jako:

$$R_{Efron}^2 = 1 - \frac{n}{n_1 n_0} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{P}_i)^2 \quad (22)$$

gdzie  $n_1$  i  $n_0$  -liczba przypadków, dla których odpowiednio Y przyjmuje wartość 1 oraz 0.

Kolejna miara zaproponowana przez McFaddena dotyczy modelu szacowanego za pomocą metody największej wiarygodności:

$$R_{McFadden}^2 = 1 - \frac{\ln \hat{L}_{UR}}{\ln \hat{L}_R} \quad (23)$$

gdzie  $\ln \hat{L}_R$  jest wartością maksymalną logarytmu funkcji wiarygodności dla modelu zawierającego jedynie wyraz wolny,

$\ln \hat{L}_{UR}$  - wartość maksymalna logarytmu funkcji wiarygodności dla pełnego modelu.

Ten współczynnik jest w tym sensie odpowiednikiem klasycznego współczynnika determinacji, że przyjmuje wartość 0 jeśli  $b_1 = b_2 = \dots b_k = 0$  oraz wartość 1 w przypadku idealnego dopasowania, gdy  $\hat{p}_i = y_i$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$  [Greene 2000, Gujarati 2003].

Do określenia zgodności modelu z danymi wykorzystuje się także mierniki dokładności prognoz [Judge i in. 1985]. Wielu praktyków uważa bowiem, że o jakości modelu decyduje trafność prognoz uzyskiwanych na jego podstawie. Najczęściej wykorzystuje się tu miarę podaną przez Maddalę nazywaną przez Gruszczynskiego zliczeniowym  $R^2$ :

$$\text{Zliczeniowy } R^2 = \frac{n_{00} + n_{11}}{n} \quad (24)$$

gdzie  $n_{00}$  - liczba obserwacji, dla których  $\hat{y}_i = y_i = 0$ ,  $n_{11}$  - liczba obserwacji, dla których  $\hat{y}_i = y_i = 1$ .

Zliczeniowy  $R^2$  określa zatem udział poprawnie prognozowanych przypadków w łącznej liczbie przypadków. Wszystkie podane tu miary zgodności przyjmują wartości z przedziału  $[0, 1]$ . Wartości 0 odpowiada brak dopasowania. Im bliższe 1 jest  $R^2$ , tym większa zgodność modelu z danymi empirycznymi.

## WYNIKI

Oszacowany model ma postać:

$$\hat{p}_i = \frac{1}{1 + \exp[-(-57,34 - 1,06x_{1i} + 0,27x_{2i} + 2,77x_{3i} + 6,16x_{4i})]} \quad (25)$$

W tabeli 2 przedstawiono wyniki badania statystycznej istotności parametrów.

Tabela 2. Wyniki testu ilorazu wiarygodności

Parametr	Wartość LR	Stopnie swobody	Wartość krytyczna testu $\chi^2$ dla poziomu istotności 0,05
$\beta_1$	4,1126	1	3,841
$\beta_2$	6,3239	1	3,841
$\beta_3$	4,3656	1	3,841
$\beta_4$	18,5274	1	3,841
Łącznie $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$	43,0769	4	7,779

Źródło: Obliczenia własne wykonane przy pomocy programu Statgraphics

Na podstawie testu ilorazu wiarygodności można sądzić, że parametry  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  są statystycznie istotne. Należy jednak wyniki uzyskane na podstawie tego testu przyjąć z ostrożnością z powodu niewielkiej liczebności próby<sup>1</sup>.

Dla oszacowanego modelu określono wartości miar zgodności z danymi empirycznymi. Ponieważ współczynnik korelacji między wartościami zmiennej Y a wartościami prawdopodobieństwa wyznaczonymi z modelu wyniósł 0,9126, to  $R^2 = [r(y, \hat{P})]^2 = 0,8328$ . Zbliżone wartości otrzymano na podstawie miar  $R_{Efron}^2 = 0,8349$  oraz  $R_{McFadden}^2 = 0,8158$ . Ponieważ na 39 badanych osób 23 zdały egzamin, to wartość odcinającą ustalono na poziomie  $p^* = \frac{23}{39} = 0,5897$ . Prognozy wyznaczano zatem w następujący sposób:

$$\hat{y}_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \hat{p}_i > 0,5897 \\ 0 & \text{gdy } \hat{p}_i \leq 0,5897 \end{cases} \quad (26)$$

Na tej podstawie obliczono liczbę poprawnie prognozowanych przypadków.

Tabela 3. Klasyfikacja przypadków

	Liczba obserwacji, dla których:		
	$\hat{y}_i = 1$	$\hat{y}_i = 0$	Razem
$y_i = 1$	22	1	23
$y_i = 0$	1	15	16
Razem	23	16	39

Źródło: obliczenia własne

Zliczeniowy  $R^2 = \frac{n_{00} + n_{11}}{n} = \frac{22 + 15}{39} = 0,9487$ , stąd niemal w 95% klasyfikacja przypadków okazała się prawidłowa.

Weryfikacja statystyczna modelu polegająca na określeniu stopnia dopasowania modelu do danych oraz na badaniu statystycznej istotności parametrów przebiegła pozytywnie, można zatem przejść do etapu interpretacji modelu.

Na podstawie znaku oceny parametru stojącego przy zmiennej  $X_j$  można określić kierunek wpływu zmiennej objaśniającej na prawdopodobieństwo zdania egzaminu. Zatem ponieważ

- $b_1 < 0$ , to zwiększenie liczby opuszczonych zajęć zmniejszało prawdopodobieństwo uzyskania oceny pozytywnej,
- $b_2 > 0$ , więc wzrost czasu nauki indywidualnej powodowało zwiększanie szansy zdania egzaminu,

<sup>1</sup> Dotyczy to zwłaszcza parametrów  $\beta_1$  i  $\beta_3$ .

- $b_3 > 0$ , to poprawa oceny z zaliczenia ćwiczeń oznaczała wzrost prawdopodobieństwa zdania egzaminu,
- $b_4 > 0$ , więc poświęcenie więcej czasu na sen w ostatniej dobie przed egzaminem poprawiało szansę otrzymania oceny pozytywnej, *ceteris paribus*.

Interpretując ilorazy szans dla poszczególnych zmiennych (zakładając, że pozostałe zmienne uwzględnione w modelu pozostawały bez zmian) uzyskuje się informację:

- zwiększenie absencji na zajęciach o 1 godzinę powodowało spadek ilorazu szans o 65,45%,
- wzrost czasu nauki indywidualnej zwiększało ten iloraz o 30,59%,
- poprawa oceny z zaliczenia ćwiczeń o 1 stopień łączyła się z 16-to krotnym wzrostem ilorazu szans,
- wydłużenie snu w ostatniej dobie przed egzaminem o 1 godzinę powiększało 477 razy iloraz szans.

Zdumiewać może tak duży wpływ snu na wynik egzaminu. Być może osoby, które pozwoliły sobie na długi sen, to studenci bardzo uzdolnieni, nie obawiający się o wynik egzaminu. Zmienna ukryta odnosząca się do zdolności byłaby wtedy reprezentowana przez zmienną określającą liczbę godzin snu w ostatniej dobie przed egzaminem. Zjawisko to daje się także wytłumaczyć możliwą nierzetelnością udzielanych przez studentów informacji, na podstawie których oszacowano parametry modelu.

Ponieważ marginalny przyrost prawdopodobieństwa zależy od wartości zmiennych objaśniających, poniżej podano przykładowo wartości tych przyrostów dla wybranego studenta. Osoba ta opuściła 3 jednostki lekcyjne zajęć, poświęciła 10 godzin na przygotowanie się do egzaminu, z ćwiczeń na zaliczenie uzyskała ocenę 3 oraz ostatniej doby przed egzaminem poświęciła 7 godzin na sen.

Tabela 4. Wartości przyrostów marginalnych prawdopodobieństwa dla wybranych wartości zmiennych objaśniających.

Wartości	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
Zmiennych objaśniających	3	10	3	7
Przyrostów marginalnych prawdopodobieństwa	-0,0018	0,0004	0,0046	0,0001

Źródło: obliczenia własne

- Opuśczenie 1 jednostki lekcyjnej więcej zajęć spowodowałoby zmniejszenie się prawdopodobieństwa zdania egzaminu o 0,0018, *ceteris paribus*.
- Poświęcenie o 1 godzinę więcej na naukę indywidualną poprawiłoby prawdopodobieństwo uzyskania oceny pozytywnej z egzaminu o 0,0004, przy założeniu, że pozostałe zmienne pozostawałyby bez zmian.
- Uzyskanie o 1 stopień wyższej oceny na zaliczenie zwiększyłoby prawdopodobieństwo zdania egzaminu o 0,0046, *ceteris paribus*.

- Zwiększenie długości snu o 1 godzinę poprawiłoby prawdopodobieństwo uzyskania oceny pozytywnej z egzaminu o 0,0001, zakładając, że pozostałe zmienne pozostawałyby bez zmian.

Należy w tym miejscu podkreślić, że rozważana osoba otrzymała ocenę 3.0 z zaliczenia ćwiczeń oraz przygotowywała się do egzaminu przez jedynie 10 godzin, stąd niewielkie wartości przyrostów marginalnych prawdopodobieństw. Dla studenta słabego i leniwego jednostkowe zwiększenie danej zmiennej objaśniającej, *ceteris paribus*, nie przyczynia się w znaczący sposób do zmiany prawdopodobieństwa zdania egzaminu. Poniżej przedstawiono dwie przykładowe prognozy uzyskane na podstawie oszacowanego modelu logitowego.

Tabela 5. Prognozy zdania egzaminu

Numer prognozy	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$\hat{p}$	$\hat{y}$
1	5	10	4	8	0,6033	1
2	1	40	3,5	6	0,2607	0

Źródło: obliczenia własne

Na podstawie informacji przedstawionych w tabeli 5 można sądzić, że osoba, która opuściłaby 5 jednostek lekcyjnych zajęć, przeznaczyłaby 10 godzin na przygotowanie się do egzaminu, z ćwiczeń na zaliczenie uzyskałaby ocenę 4 oraz w ostatniej dobie przed egzaminem poświęciła 8 godzin na sen, zdałaby egzamin. Natomiast student z oceną 3,5 zaliczającą ćwiczenia, który nie był obecny na jednej godzinie lekcyjnej, uczący się do egzaminu 40 godzin i śpiący jedynie 6 godzin w ciągu doby bezpośrednio przed egzaminem nie uzyskałby oceny pozytywnej z egzaminu.

## PODSUMOWANIE

W pracy wykorzystano dane pozyskane na podstawie przeprowadzonej wśród studentów anonimowej ankiety internetowej. Z powodu braku informacji na temat rzetelności udzielanych odpowiedzi, trudno jest ocenić wiarygodność otrzymanych tu wyników. Zakładając jednak, że studenci udzielali prawdziwych informacji, podjęto próbę wyjaśnienia przyczyn wysokiego udziału ocen negatywnych uzyskanych z egzaminu z ekonometrii na Międzywydziałowym Studium Informatyki i Ekonometrii SGGW. W celu określenia wielkości wpływu czynników objaśniających rezultat egzaminu wykorzystano wyniki otrzymane na podstawie oszacowanego modelu logitowego.

Interpretacja ocen parametrów modelu prowadzi do wniosku, że systematyczna nauka w ciągu całego semestru (mała liczba opuszczonych zajęć i wysoka ocena na zaliczenie ćwiczeń) zwiększała prawdopodobieństwo zdania egzaminu. Bezpośrednio przed egzaminem należało powtórzyć materiał,

ewentualnie uzupełnić luki w wiedzy i dobrze wyspać się. Zdumiewająco duży wpływ na wynik egzaminu miała długość snu studentów. Wyrażono przypuszczenie, że osoby które pozwoliły sobie na długi sen mogły być bardzo uzdolnionymi studentami, nie obawiającymi się o wynik egzaminu.

## LITERATURA

- Greene W.H. (2000) *Econometric Analysis*. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Gruszczyński M. (2002) *Modele i prognozy zmiennych jakościowych w finansach i bankowości*. Oficyna Wydawnicza SGH. Warszawa.
- Gujarati D. N. (2003) *Basic Econometrics*. McGraw Hill.
- Judge G. G., Hill C., Griffiths W. E., Lütkepohl H., Lee T. (1985) *The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley&Sons. New York.
- Maddala C. S. (2002) *Introduction to Econometrics*. John Wiley&Sons. New York.

### **Application of Logit Model to Analysis of Examination Results**

**Summary:** The aim of this paper is application of logit model to explanation of examination results in econometrics on Interfaculty Studies in Computer Sciences and Econometrics. Logit model is the type of the binary choice models, where explained variable is dummy. Methods of estimation and measurement of goodness of fit are presented in the paper. Moreover interpretation of the estimated logit model is described. On the basis of estimated model it is found that systematic learning during semester and good rest immediately before writing examination paper increased probability of passing the examination.

**Key words:** logit model, dummy variable, result of examination.

Monika Gładysz,  
Katedra Ekonomii i Polityki Gospodarczej SGGW,  
e-mail: gladysz@alpha.sggw.waw.pl

## **ZASTOSOWANIE MODELU PANELOWEGO DO BADANIA NADWYŻEK KAPITAŁOWYCH W BANKACH KOMERCYJNYCH W POLSCE**

**Streszczenie:** Dane panelowe to zestaw danych przekrojowo-czasowych. W opracowaniu zastosowano model panelowy do badania nadwyżek kapitałowych w bankach komercyjnych w Polsce. Nadwyżka kapitałowa została zdefiniowana jako różnica pomiędzy współczynnikiem wypłacalności banku a wymaganym współczynnikiem wypłacalności podzielona przez wymagany współczynnik wypłacalności. Zauważono, że na wielkość nadwyżki kapitałowej wpływają następujące czynniki: poziom nadwyżki kapitałowej w poprzednim okresie, opóźniona stopa wzrostu PKB, bieżąca i opóźniona stopa zwrotu z kapitału oraz stopa przyrostu kapitału własnego.

**Słowa kluczowe:** model panelowy, nadwyżka kapitałowa, banki komercyjne.

### **WSTĘP**

Banki są zobowiązane do utrzymywania współczynnika wypłacalności, definiowanego jako stosunek kapitałów własnych do aktywów ważonych ryzykiem, na określonym prawem poziomie – co najmniej 15% w pierwszym roku działalności banku, 12% w drugim i 8% w kolejnych latach. Większość banków wykazuje jednak współczynnik wypłacalności powyżej obowiązujących minimalnych wymogów, co oznacza, że utrzymują one pewne nadwyżki kapitału. Przyczyny utrzymywania przez banki wyższego niż wymagany współczynnika wypłacalności mogą być różne. Najczęściej wymieniane są jednak następujące:

- uwzględnianie cykliczności gospodarki w planowaniu finansowym: utrzymywanie nadwyżki kapitału może mieć na celu pokrycie nieobsługiwanych terminowo kredytów, których udział wzrasta w sytuacji kryzysu gospodarczego [Richardson i in. 2000]; utrzymywane nadwyżki kapitałowe mogą też mieć na celu wykorzystywanie potencjalnych okazji inwestycyjnych, które częściej występują w okresie przyspieszonego wzrostu gospodarczego [Lindquist 2003],
- utrzymywanie większych nadwyżek współczynnika wypłacalności przez mniejsze banki; działalność mniejszych banków jest mniej zdywersyfikowana, a zatem bardziej narażona na ryzyko [Richardson i in. 2000]; mniejsze banki nie mogą liczyć na pomoc państwa zgodnie z hipotezą *too big to fail* [Lindquist 2003].

Celem pracy jest wskazanie czynników wpływających na wysokość utrzymywanych nadwyżek kapitałowych w bankach komercyjnych notowanych na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych. Badanie przeprowadzono w oparciu o dane kwartalne z okresu od początku 1995 r. do końca 2003 r., pochodzące z 12 banków giełdowych (po myślnikami podano oznaczenia, które wykorzystano w modelu):

- Bank Handlowy w Warszawie S.A. – BH,
- ING Bank Śląski S.A. – ING,
- Bank Przemysłowo-Handlowy PBK S.A. – BPH,
- BRE Bank S.A. – BRE,
- Bank Millennium S.A. – MILL,
- Bank Polska Kasa Opieki S.A. – PEKAO,
- NORDEA BANK POLSKA S.A. – NORD,
- Kredyt Bank S.A. – KB,
- Bank Ochrony Środowiska S.A. – BOS,
- FORTIS BANK POLSKA S.A. – FOR,
- DZ BANK Polska S.A. – DZB,
- Deutsche Bank PBC S.A. – DBPBC.

Wykorzystane dane mają charakter przekrojowo-czasowy, dlatego zbudowano model panelowy. Ponieważ w badanym okresie nowe banki trafiały na GPW, wykorzystane dane są niekompletne (stanowią tzw. niezrównoważony panel, ang. unbalanced panel). W badaniu wykorzystano dane zawarte w sprawozdaniach kwartalnych banków (SAB-Q), udostępnianych publicznie za pośrednictwem Komisji Papierów Wartościowych i Giełd oraz dane finansowe zamieszczone w serwisie internetowym [www.parkiet.com](http://www.parkiet.com). Ponieważ w analizowanym okresie wiele z badanych banków było włączanych w struktury grup kapitałowych, w celu zapewnienia międzyokresowej porównywalności poszczególnych wielkości wykorzystano dane nieskonsolidowane.

## ZMIENNE UWZGLĘDNIONE W BADANIU

Do określenia postaci analitycznej modelu posłużono się modelem stworzonym przez J. Ayuso, D. Pérez i J. Saurina dla rocznych danych panelowych dotyczących banków w Hiszpanii w latach 1986-2000 [Ayuso i in. 2002], rozwiniętym przez K. Lindquist i zastosowanym dla kwartalnych danych panelowych dotyczących banków w Norwegii w okresie od czwartego kwartału 1995 r. do czwartego kwartału 2001 r. [Lindquist 2003].

W wyżej wspomnianych pracach dotyczących adekwatności kapitałowej w bankach Hiszpanii i Norwegii szacowaną wielkością jest bufor kapitałowy, czyli nadwyżka ponad wymagania nadzorcze utrzymywanego przez banki kapitału. W pracach tych bufor kapitałowy został zdefiniowany jako nadwyżka kapitału



ponad aktywa wazone ryzykiem. Kiedy jednak w całym analizowanym okresie obowiązuje wymóg kapitałowy określony przez minimalny poziom współczynnika wypłacalności, bufor kapitałowy może być określony jako różnica pomiędzy rzeczywistym a wymaganym współczynnikiem wypłacalności podzielona przez wymagany współczynnik wypłacalności. Taka definicja bufora kapitałowego została też przyjęta do oszacowania w przedstawionym w opracowaniu modelu (zmienna **BUF**).

W pracy Ayuso i in. wysokość nadwyżki kapitałowej w danym banku w danym okresie uzależniona została od wysokości tej nadwyżki w poprzednim okresie, stopy zwrotu z kapitału własnego, udziału kredytów nieobsługiwanych terminowo w kredytach ogółem udzielonych przez bank, stopy wzrostu PKB oraz dwóch zmiennych zero-jedynkowych przyjmujących wartość 1 odpowiednio dla banków zaliczanych do najwyższego i najniższego decyla. W pracy Lindquist wysokość nadwyżki kapitałowej uzależniono od nadwyżki kapitałowej w poprzednim okresie, kosztu pozyskiwania dodatkowego kapitału przez bank, miary ryzyka kredytowego ponoszonego przez bank, miary nadzoru bankowego zdefiniowanego jako liczba inspekcji w miejscu odbytych przez władze nadzorcze, stopy wzrostu PKB, miary wielkości aktywów banku, miary zabezpieczenia aktywów obciążonych ryzykiem, trendu i trzech kwartalnych zmiennych zero-jedynkowych.

Konstruując model przyjęto, że na wysokość nadwyżek kapitałowych wpływają czynniki wyodrębnione przez Ayuso i Lindquist, przy czym pominięto zmienne niemożliwe do uzyskania na podstawie sprawozdań finansowych banków, a mianowicie: miarę nadzoru bankowego i miarę ryzyka ponoszonego przez bank. Dodatkowo rozszerzono listę potencjalnych zmiennych objaśniających o zmiany wielkości kapitałów własnych, wynikające głównie z fuzji i przejęć oraz o kraj pochodzenia właściciela większości udziałów banku (kapitał krajowy lub zagraniczny). Jako potencjalne zmienne objaśniające przyjęto następujące:

Realna stopa wzrostu PKB (zmienna **SPKB**). Kierunek wpływu tej zmiennej na wysokość współczynnika wypłacalności nie jest jednoznacznie określony.

Miara wielkości aktywów; początkowo wykorzystano wartość aktywów banku (w mln zł) w cenach stałych z 2000 r., jako bezwzględną miarę wielkości banku (zmienna **AB**). Oczekiwano ujemnej zależności pomiędzy wielkością banku a wielkością bufora kapitałowego. Ponieważ jednak szereg **AB** okazał się niestacjonarny (jako jedyny z uwzględnionych w badaniu) przyjęto dwie zmienne zero-jedynkowe reprezentujące wielkość banku: zmienną **SMA** przyjmującą wartość 1, kiedy wartość aktywów banku nie przekracza 0,5% aktywów sektora bankowego i zmienną **BIG**, przyjmującą wartość 1, kiedy wartość aktywów przekracza 5% aktywów sektora.

Koszt pozyskania kapitału zewnętrznego mierzony rentownością kapitału własnego ROE. Ponieważ w analizowanym okresie zmieniały się przepisy podatkowe [Chmielewski i Krześniak 2004] do modelu wprowadzono stopę zwrotu z kapitału własnego brutto definiowaną jako stosunek zysku brutto do kapitałów własnych banku (zmienna **ROEB**). Oczekuje się dodatniej zależności pomiędzy

rentownością banku a wysokością utrzymywanej nadwyżki kapitału, przy założeniu, że wraz ze wzrostem kosztu pozyskiwania kapitału zewnętrznego banki będą dążyły do utrzymywania wyższych rezerw kapitałowych na wypadek pojawienia się nieoczekiwanych okazji inwestycyjnych.

Zmiany struktury kapitałowej takie jak fuzje i przejęcia, będące częstym zjawiskiem w systemie bankowym w Polsce w badanym okresie; do modelu włączono dodatkowo zmienną **SK** zdefiniowaną jako stopę przyrostu kapitału własnego w danym okresie. Przewiduje się, że przyrosty kapitału nie będą od razu przekładały się na wzrost akcji kredytowej, oczekuje się więc dodatniego wpływu zmiennej **SK** na wysokość bufora kapitałowego w pierwszym okresie, wygasającego w kolejnych.

Ponieważ wiele spośród banków działających w Polsce jest własnością podmiotów zagranicznych prowadzących politykę ujednolicania zarządzania ryzykiem w podległych jednostkach, celowe wydaje się wprowadzenie dodatkowej zmiennej reprezentującej kraj pochodzenia posiadacza większościowego pakietu udziałów banku. Dodano zmienną **KZ** przyjmującą wartość 0, kiedy większość udziałów banku pozostaje w rękach podmiotu krajowego oraz wartość 1, kiedy większość udziałów banku pozostaje w rękach podmiotu zagranicznego. Kierunek zależności łączącej zmienną **KZ** z ilością nadwyżkowego kapitału utrzymywanego przez bank jest ex ante trudny do określenia.

Wysokość nadwyżki kapitałowej utrzymywanej przez bank w poprzednim okresie. Oczekuje się, że wartość tego parametru będzie dodatnia i mniejsza od 1.

Ze względu na wykorzystywanie w modelu danych kwartalnych wprowadzono też trzy zmienne zero-jedynkowe dla drugiego, trzeciego i czwartego kwartału (odpowiednio **Q2**, **Q3** oraz **Q4**).

Jako wyjściowy przyjęto model z rozłożonymi opóźnieniami w postaci:

$$\begin{aligned}
 BUF_{it} = & R_i + \alpha_1 BUF_{i,t-1} + \alpha_2 SPKB_t + \alpha_3 SPKB_{t-1} + \alpha_4 SMA_{it} + \alpha_5 BIG_{it} + \\
 & + \alpha_6 ROEB_{it} + \alpha_7 ROEB_{i,t-1} + \alpha_8 SK_{it} + \alpha_9 SK_{i,t-1} + \alpha_{10} KZ_{it} + \\
 & + \alpha_{11} KZ_{i,t-1} + \alpha_{12} Q2 + \alpha_{12} Q3 + \alpha_{12} Q4 + \varepsilon_{it}
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Przyjęte indeksy i oraz t oznaczają odpowiednio bank i okres. Zmienna  $R_i$  reprezentuje indywidualny parametr banku wpływający na wysokość utrzymywanej nadwyżki kapitałowej. Pozostałe oznaczenia zmiennych jak wyżej.

## METODY ESTYMACJI

Do oszacowania parametrów równania wykorzystano dwa podejścia. W pierwszym założono ustalone efekty indywidualne (fixed effect – FE) i przyjęto równanie w postaci:

$$y_{it} = \alpha_i + x_{it}' \beta + \varepsilon_{it} \quad (4.1)$$

W drugim przypadku założono, że wszystkie jednostki są jednorodne pod względem cech nieujętych w modelu, lecz mających wpływ na zmienną objaśnianą (pooled) i przyjęto równanie w postaci:

$$y_{it} = \beta_0 + x_{it}'\beta + \varepsilon_{it} \quad (4.2)$$

W kolejnym kroku dokonano wyboru jednego z dwóch przyjętych wyżej założeń w oparciu o test istotności parametrów indywidualnych. Postawiono hipotezę zerową, że w równaniu (4.1) wszystkie parametry  $\alpha_i$  są sobie równe. Wykorzystano test Walda w postaci:

$$F = \frac{(S_0^2 - S_1^2)/V1}{S_1^2/V2} \quad (4.3)$$

Gdzie  $S_0^2$  i  $S_1^2$  to sumy kwadratów reszt dla modeli prawidłowych według hipotezy zerowej ( $S_0^2$ ) i alternatywnej ( $S_1^2$ ).  $V1$  to liczba dodatkowych warunków liniowych nałożonych na model w hipotezie zerowej (w stosunku do alternatywnej), a  $V2$  to liczba stopni swobody modelu prawidłowego według hipotezy alternatywnej. Przy prawdziwości hipotezy zerowej statystyka ta ma rozkład F-Snedecora o  $V1$ ,  $V2$  stopniach swobody [Greene 2003]. Należy przy tym pamiętać, że dla modelu panelowego o  $K$  parametrach, w którym analizowanych jest  $N$  jednostek przez  $T$  okresów liczba stopni swobody wynosi  $N \cdot T - N - K - 1$  dla modelu ze stałą oraz  $N \cdot T - N - K$  dla modelu bez stałej.

Po wybraniu jednej z form równania (pooled lub fixed effect) dokonano eliminacji zmiennych statystycznie nieistotnych z wykorzystaniem metody regresji krokowej wstecz.

Ponieważ opóźniona zmienna endogeniczna jest dołączona do zestawu regresorów, do oszacowania równań regresji wykorzystano podwójną metodę najmniejszych kwadratów i metodę zmiennych instrumentalnych. Pozwala to na uniknięcie obciążenia estymatora w modelu panelowym, w którym występuje zależność pomiędzy zmienną objaśniającą a składnikiem losowym [Witkowski 2004], pod warunkiem, że zmienna przyjęta jako instrument będzie nieskorelowana ze składnikiem losowym. W opracowaniu przyjęto, że dla opóźnionej zmiennej egzogenicznej instrumentem będzie kolejne opóźnienie tej zmiennej. Pozostałe zmienne same mogą być dla siebie instrumentami.

## WYNIKI ESTYMACJI

Oszacowano równanie (3.1) zakładając początkowo, że banki są jednorodne pod względem ponoszonego ryzyka – model w postaci (4.1). Uzyskane oszacowania parametrów, błędy standardowe i prawdopodobieństwo, że oszacowana wartość parametru wynosi zero zostały przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki estymacji modelu (3.1) przy założeniu, że banki są jednorodne pod względem cech nie ujętych w modelu

Zmienna objaśniająca	Współczynnik	Błąd standardowy	<i>p-value</i>
R	0,040	0,085	0,640
BUF <sub>i, t-1</sub>	0,873	0,030	0,000
SPKB <sub>t</sub>	0,005	0,021	0,795
SPKB <sub>t-1</sub>	-0,036	0,021	0,091
SMA <sub>it</sub>	0,089	0,055	0,011
BIG <sub>it</sub>	-0,020	0,054	0,712
ROEB <sub>it</sub>	1,111	0,129	0,000
ROEB <sub>i, t-1</sub>	0,361	0,154	0,020
SK <sub>it</sub>	0,680	0,090	0,000
SK <sub>i, t-1</sub>	-0,193	0,095	0,044
KZ <sub>it</sub>	-0,303	0,131	0,021
KZ <sub>i, t-1</sub>	0,324	0,131	0,014
Q2	0,173	0,061	0,005
Q3	0,048	0,061	0,435
Q4	0,133	0,060	0,028

Zródło: Obliczenia własne na podstawie danych ze sprawozdań kwartalnych banków (SAB-Q) udostępnianych publicznie za pośrednictwem KPWiG.

Powyższy model wyjaśnia 80% zmienności nadwyżek kapitałowych utrzymywanych przez banki. Współczynnik determinacji  $R^2$  wynosi 0,806, a skorygowany współczynnik determinacji 0,798. W modelu tym nieistotny statystycznie dla poziomu istotności 5% okazał się wpływ następujących zmiennych na wysokość bufora kapitałowego: stopy wzrostu PKB i opóźnionej stopy wzrostu PKB, zmiennych charakteryzujących wielkość banku – SK i BIG oraz kwartalnej zmiennej zero-jedynkowej dotyczącej trzeciego kwartału. Wartość statystyki Durбина-Watsona wynosi 2,081, co świadczy o braku autokorelacji pierwszego rzędu [Welfe 1995]. Suma kwadratów reszt wynosi 55,42.

Przed przystąpieniem do usuwania z modelu zmiennych statystycznie nieistotnych oszacowano ten sam model zakładając, że banki różnią się między sobą poziomem ponoszonego ryzyka – wzór (4.2). Uzyskane oszacowania przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wyniki estymacji modelu (3.1) przy założeniu, że banki różnią się pod względem cech nie ujętych w modelu

Zmienna objaśniająca	Współczynnik	Błąd standardowy	<i>p-value</i>
R	0,036	0,099	0,719
BUF <sub>i, t-1</sub>	0,789	0,047	0,000
SPKB <sub>t</sub>	0,019	0,021	0,380
SPKB <sub>t-1</sub>	-0,044	0,021	0,041
SMA <sub>it</sub>	0,220	0,121	0,070
BIG <sub>it</sub>	-0,098	0,082	0,231
ROEB <sub>it</sub>	1,105	0,128	0,000
ROEB <sub>i, t-1</sub>	0,449	0,157	0,005
SK <sub>it</sub>	0,677	0,090	0,000
SK <sub>i, t-1</sub>	-0,132	0,097	0,174
KZ <sub>it</sub>	-0,271	0,132	0,040
KZ <sub>i, t-1</sub>	0,381	0,133	0,004
Q2	0,166	0,061	0,007
Q3	0,047	0,060	0,434
Q4	0,125	0,059	0,035

Oszacowania efektów indywidualnych (wielkość  $R_i$  dla poszczególnych banków:

BH	BOS	BPH	BRE	DBPBC	DZB
0,164	0,169	0,049	-0,049	-0,073	-0,238
FOR	ING	KB	MILL	NORD	PEKAO
-0,110	-0,022	-0,017	-0,026	0,125	0,048

Źródło: Jak w tabeli 1.

Model ten wyjaśnia ponad 80% zmienności nadwyżek kapitałowych utrzymywanych przez banki. Współczynnik determinacji  $R^2$  wynosi 0,819, a skorygowany współczynnik determinacji 0,805. Wartość statystyki Durbina-Watsona wynosi 2,010 (nie występuje autokorelacja pierwszego rzędu). W modelu z ustalonymi efektami indywidualnymi dla poziomu istotności 5% nieistotne okazały się: stopa wzrostu PKB w bieżącym okresie, zmienne dotyczące wielkości banku (SMA i BIG), opóźniona zmienna SK oraz kwartalna zmienna zero-jedynkowa dotycząca trzeciego kwartału. Suma kwadratów reszt wynosi 51,83.

W celu sprawdzenia, czy prawdziwe jest założenie o stałości parametru  $R_i$  dla poszczególnych banków przeprowadzono test istotności efektów indywidualnych. Wartość statystyki F (wzór 4.3) wynosi 2,13, a wartość krytyczna 1,82 dla poziomu istotności 5%. Hipoteza zerowa o stałości efektów indywidualnych dla poszczególnych banków powinna być odrzucona, prawidłowy jest model z ustalonymi efektami indywidualnymi (model z tabeli 2).

W kolejnym kroku usuwano z modelu z ustalonymi efektami indywidualnymi zmienne nieistotne statystycznie z wykorzystaniem metody regresji krokowej wstecz. Ostateczną postać modelu zawiera tabela 3.

Tabela 3. Postać końcowa modelu

Zmienna objaśniająca	Współczynnik	Błąd standardowy	<i>p-value</i>
R	0,169	0,066	0,011
BUF <sub>i, t-1</sub>	0,795	0,044	0,000
SPKB <sub>t-1</sub>	-0,033	0,009	0,001
ROEB <sub>it</sub>	1,108	0,128	0,000
ROEB <sub>i, t-1</sub>	0,497	0,146	0,001
SK <sub>it</sub>	0,679	0,091	0,000
Q2	0,145	0,051	0,005
Q4	0,101	0,050	0,046

Oszacowania efektów indywidualnych (wielkość  $R_i$  dla poszczególnych banków:

BH	BOS	BPH	BRE	DBPBC	DZB
0,026	0,079	-0,028	-0,129	0,107	-0,011
FOR	ING	KB	MILL	NORD	PEKAO
-0,045	-0,040	-0,078	-0,075	0,267	-0,084

Źródło: Jak w tabeli 1.

Powyższy model wyjaśnia ponad 80% zmienności bufora kapitałowego utrzymywanego przez banki (współczynnik determinacji  $R^2$  wynosi 0,811, a skorygowany współczynnik determinacji 0,801).

## WNIOSKI

Zgodnie z oszacowanym modelem na wysokość utrzymywanej przez banki komercyjne nadwyżki kapitałowej wpływają: wysokość tej nadwyżki w poprzednim okresie, stopa wzrostu PKB w poprzednim okresie, bieżąca i opóźniona stopa zwrotu z kapitału własnego oraz zmiana wyposażenia kapitałowego banku i dwie kwartalne zmienne zero-jedynkowe, odpowiednio dla drugiego i czwartego kwartału. Istotne okazały się również cechy indywidualne banków.

Uzyskane wartości oszacowań parametrów są zgodne z oczekiwaniami. Parametr 0,795 dla opóźnionej zmiennej objaśniającej świadczy o tym, że wysokość nadwyżki kapitałowej w bieżącym okresie zależy istotnie od wysokości tej nadwyżki w poprzednim okresie. Ujemna wartość parametru przy opóźnionej zmiennej SPKB świadczy o tym, że w okresach przyspieszonego wzrostu gospodarczego banki przeznaczają zgromadzony wcześniej kapitał na zwiększanie akcji kredytowej. Potwierdzone zostało też spostrzeżenie, że banki wykazują skłonność do utrzymywania wyższego bufora kapitałowego wtedy, kiedy wyższy

jest koszt pozyskiwania dodatkowego kapitału (świadczy o tym dodatni parametr przy zmiennej ROEB dotyczącej bieżącego i poprzedniego okresu). Przyrost kapitału własnego nie przekłada się od razu na zwiększenie akcji kredytowej, a jedynie zwiększa nadwyżkę kapitałową, o czym świadczy dodatni parametr przy zmiennej SK. Nieistotne okazały się: wpływ kraju pochodzenia posiadacza większościowego pakietu udziałów banku (zmienna KZ) oraz wielkość banku (zmienne SMA i BIG) na wysokość bufora kapitałowego.

Skonstruowany model pozwolił też na uszeregowanie banków notowanych na GPW według nie ujętych w modelu cech wpływających na wysokość utrzymywanej nadwyżki kapitału, co można utożsamiać z ponoszonym ryzykiem i umiejętnością zarządzania nim. Wyższe ryzyko ponosiły BRE Bank S.A. oraz Bank Polska Kasa Opieki S.A., a niższe NORDEA BANK POLSKA S.A. i Deutsche Bank PBC S.A.

#### LITERATURA:

- Ayuso J., Pérez D., Saurina J. 2002 Are capital buffers pro-cyclical? Evidence from Spanish panel data, Banco de España, Madrit.
- Chmielewski T., Krześniak A. 2004 Indywidualne charakterystyki wpływające na rentowność banków w Polsce w: Raport o stabilności systemu finansowego 2003, NBP, Warszawa: s. 131-140.
- Greene W. H. 2003 Econometric Analysis, Prentice Hall, New Jersey.
- Lindquist K. 2003 Banks' buffer capital: How important is risk?, Norges Bank, Oslo.
- Richardson J., Stephenson M. 2000 Some aspects of regulatory capital, FSA Occasional Paper, London.
- Welfe A. 1995 Ekonometria. Metody i ich zastosowanie, PWE, Warszawa.
- Witkowski B. 2004 Podstawowe metody analizy danych panelowych, materiały szkoleniowe NBP, Warszawa.

#### **The Application of Panel Data Model for Buffer Capital Research in Commercial Banks in Poland**

**Summary:** Panel data is data set that combines cross sections and time series. In the study panel data model was applied for buffer capital research in commercial banks in Poland. Buffer capital was defined as a difference between banks solvency ratio and required solvency ratio divided by required solvency ratio. It has been stated that following factors influence the amount of buffer capital: level of buffer capital in previous period, lagged rate of GDP growth, current and lagged rate of the return on equity and rate of equity capital growth.

**Key words:** panel data model, buffer capital, commercial banks.

Henryk Gurgul, Paweł Majdosz  
Katedra Ekonomii i Ekonometrii, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie  
e-mail: h.gurgul@neostrada.pl, pmajdosz@go2.pl

## IDENTYFIKACJA KLASTRÓW W OPARCIU O STRUKTURĘ NAKŁADÓW I WYNIKÓW

**Streszczenie:** W artykule tym omówiono najczęściej stosowane w praktyce metody identyfikowania klastrów na podstawie tablic input-output oraz zaproponowano metodę triangulizacji, która umożliwia wykrywanie powiązań istniejących między dobrze zdefiniowanymi klastrami lub między sektorami należącymi do klastrów i spoza nich. Zastosowanie metody triangulizacji zilustrowano na przykładzie tablic przepływów międzygałęziowych dla polskiej gospodarki w 2000 roku w agregacji 55 x 55 sektorów.

**Słowa kluczowe:** Model nakładów i wyników, klastry, metoda triangulizacji.

### WPROWADZENIE

Klastry (grupy, skupienia) przedsiębiorstw są nieodłącznym elementem krajobrazu każdej współczesnej gospodarki. W niektórych wypadkach ich powstanie jest uwarunkowane szczególnymi czynnikami, nazwijmy je naturalnymi, takimi jak: terytorialna bliskość określonych podmiotów, co umożliwia np. lepsze zsynchronizowanie dostaw oraz elastyczne dostosowywanie rodzaju i struktury dostaw do potrzeb odbiorcy. Zawsze jednak przynależność określonego przedsiębiorstwa do klastra stwarza duże szanse na redukcję kosztów prowadzenia działalności, zmniejszenie ryzyka i niepewności [zob. np. Antonelli, 1999; Krugman, 1991; Krugman i Venables, 1996; Porter, 1998]. Ważna jest ponadto rola struktur klastrowych w procesie transferu nowych technologii, wiedzy i innowacji produktowych wewnątrz gospodarki [zob. np. Hauknes, 1998].

Istotą klastra jest szczególny rodzaj powiązania, istniejący między przedsiębiorstwami wchodzącymi w jego skład. Relacje między przedsiębiorstwami mogą być dwojakiego rodzaju. Pierwszy typ powiązań wynika ze stosowania tej samej technologii. W drugim wypadku chodzi natomiast o zależność typu kupujący-sprzedawca. Od stopnia wzajemnego powiązania przedsiębiorstw wewnątrz klastra zależy z kolei siła efektów związanych z upowszechnianiem się, wspomnianych wyżej, innowacji technologicznych i produktowych.

To wyjaśnia powody, dla których model nakładów i wyników (ang. *input-output model*), ujmujący wzajemne powiązania między poszczególnymi sektorami z tytułu produkcji oraz zużycia dóbr i usług na cele produkcyjne, stanowi ważne narzędzie empirycznego badania klastrów istniejących w gospodarce. Empiryczne dowody na to, że powiązania, wyrażone w tablicach input-output, przedstawiają zarazem obraz dyfuzji innowacji w gospodarce znaleźć można w pracy



DeBressona [1996]. Do podobnych wniosków doszedł również Hauknes [1998]. Omówienie dwóch innych problemów, istotnie związanych z identyfikowaniem klastrów na podstawie tablic input-output, którymi jednak nie będziemy się tutaj szczegółowo zajmować, zostało zamieszczone w pracy Hoena [2002]. Skonstatujmy tylko, że chodzi tu o wykorzystanie wiedzy na temat klastrów istniejących w gospodarce w procesie agregowania tablic przepływów międzygałęziowych oraz wizualizacji struktury gospodarki danego kraju.

W niniejszej pracy przedstawiono najczęściej stosowane w praktyce metody identyfikacji klastrów na podstawie tablic input-output oraz zaproponowano metodę triangulizacji, która umożliwi wykrywanie powiązań istniejących między dobrze zdefiniowanymi klastrami lub między sektorami należącymi do klastrów i spoza nich. Zastosowanie metody triangulizacji zilustrowano na przykładzie tablic przepływów międzygałęziowych dla polskiej gospodarki w 2000 roku. Analiza porównawcza dowiodła, że metoda triangulizacji dostarcza pełniejszego obrazu rzeczywistych powiązań istniejących w gospodarce, a ponadto rozwiązanie uzyskane za pomocą tej metody jest co najmniej tak samo dobre, jak w wypadku zastosowania alternatywnej metody diagonalizacji.

## METODYKA IDENTYFIKOWANIA KLASTRÓW

Jakkolwiek znaczenie klastrów w kompleksowej analizie gospodarki jest bezsporne, wybór empirycznej metody ich identyfikacji pozostaje już jednak sprawą badacza. Podejmując decyzję co do wyboru konkretnej metody winien on uwzględnić w szczególności cel badania. Pierwotnie zdefiniowany przedmiot badania będzie bowiem określać, które spośród czterech najważniejszych zmiennych, charakteryzujących siłę powiązań między sektorami w gospodarce, zostaną ostatecznie użyte jako podstawa metody identyfikacji klastrów. Zmienne, o których mowa wyżej, to: a) wartość strumieni popytu pośredniego, b) współczynniki nakładów bezpośrednich, c) współczynniki pełnych nakładów, d) współczynniki struktury podziału.

Niech  $\mathbf{Z} = [z_{ij}]$  oznacza macierz przepływów międzygałęziowych, gdzie  $z_{ij}$  reprezentuje wartość popytu pośredniego  $j$ -tej gałęzi na produkty  $i$ -tej gałęzi, zaś  $\mathbf{x} = [x_i]$  – wektor produkcji globalnej. Pozostałe trzy miary współzależności, o których mowa wyżej, definiuje się następująco:  $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$  (macierz współczynników nakładów bezpośrednich),  $\mathbf{D} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  (macierz współczynników pełnych nakładów),  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{Z}$  (macierz współczynników struktury podziału), gdzie „daszek” umieszczony nad wektorem symbolizuje macierz diagonalną odpowiednich wymiarów, ze wskazanym wektorem na głównej przekątnej.

Najprostszą, i najczęściej stosowaną w praktyce, metodę identyfikowania klastrów, którą w dalszej części pracy będziemy nazywać metodą maksimów (ang.

*maximization method*), można scharakteryzować w kilku punktach: 1) spośród elementów odpowiedniej macierzy, usytuowanych poza główną przekątną, wybieramy ten, któremu odpowiada najwyższa wartość, 2) współrzędne tego (maksymalnego) elementu określają sektory przeznaczone do połączenia (tworzące klastery), 3) po połączeniu (towarzyszy temu zmniejszenie wymiaru rozważanej macierzy o jeden) powtarzamy punkty 1 do momentu, gdy zostanie osiągnięta, z góry założona przez badacza, liczba klastrów.

Metoda maksimów ma dwie oczywiste wady. Po pierwsze, metoda korzysta wyłącznie z jednej macierzy, tj. macierzy przepływów międzygałęziowych, współczynników bezpośrednich lub pełnych nakładów albo macierzy współczynników struktury podziałów. Nie jest natomiast możliwe równoczesne uwzględnienie dwóch lub nawet wszystkich wyżej wspomnianych macierzy. Należy przy tym oczekiwać, że ze względu na różną ekonomiczną interpretację każdej z tych macierzy, zastosowanie metody maksimów będzie za każdym razem generować inne wyniki [zob. Hoen, 2002]. Druga wada metody maksimów sprowadza się do konieczności arbitralnego ustalenia liczby klastrów.

Metodą pozbawioną tych wad jest metoda restrykcji (ang. *restricted maximization method*). Istota tej metody polega na tym, że nie są brane pod uwagę wszystkie elementy odpowiednich macierzy, lecz jedynie te, które spełniają określone restrykcje. Ze względu na fakt, że nie są w zasadzie znane rozkłady elementów rozważanych macierzy, które mogłyby posłużyć do formalnej weryfikacji ich statystycznej istotności, w praktyce, w oparciu o daną macierz (np.  $\mathbf{A}$ ) wyznacza się nową macierz ( $\mathbf{A}^r$ ), taką że:

$$a_{ij}^r = \begin{cases} a_{ij} & \text{gdy } a_{ij} > \beta n^{-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \\ 0 & \text{gdy } a_{ij} \leq \beta n^{-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \end{cases},$$

gdzie  $\beta$  jest pewną stałą (np.  $\beta = 5$ ), zaś  $n$  oznacza liczbę wierszy (kolumn) macierzy. Wyznaczenie macierzy restrykcji zwykle stanowi punkt wyjścia do drugiego etapu, w ramach którego stosuje się metodę maksimów, w celu zgrupowania niezerowych elementów macierzy w klastry. Istnieje jednak wariant tej metody, opierający się wyłącznie na macierzach restrykcji [zob. Eding i in., 2001].

Odpowiednio zdefiniowane restrykcje mogą dotyczyć więcej niż jednej macierzy, co stanowi istotny postęp w stosunku do metody maksimów. Metoda restrykcji nie wymaga ponadto arbitralnego ustalenia liczby klastrów. Jeżeli jednak, ze względu na przedmiot badania, zachodzi konieczność wyróżnienia z góry określonej liczby klastrów w gospodarce, jest to osiągnięte w drodze odpowiedniego dostosowania stałej  $\beta$ .

Kolejna metoda, znana jako metoda diagonalizacji (ang. *diagonalization method*), została zaproponowana przez Hoena [2002]. W pierwszym etapie tej

metody, dla wybranej macierzy (np.  $\mathbf{Z}$ ), wyznaczana jest macierz restrykcyj ( $\mathbf{Z}^r$ ), taka że:

$$z_{ij}^r = \begin{cases} z_{ij} & \text{gdy } z_{ij} > q_{1-\alpha}^Z \wedge a_{ij} > q_{1-\alpha}^A \wedge b_{ij} > q_{1-\alpha}^B \\ 0 & \text{gdy } z_{ij} \leq q_{1-\alpha}^Z \vee a_{ij} \leq q_{1-\alpha}^A \vee b_{ij} \leq q_{1-\alpha}^B \end{cases},$$

gdzie  $q_{1-\alpha}^X$  oznacza kwantyl rzędu  $1-\alpha$ , obliczony na podstawie wszystkich elementów macierzy  $\mathbf{X}$ . Następnie, podejmuje się próbę sprowadzenia macierzy restrykcyj do postaci blokowo-diagonalnej. Każdy wyróżniony blok stanowi grupę sektorów silnie powiązanych między sobą i jednocześnie niepowiązanych, przy danym poziomie istotności  $\alpha$ , z pozostałymi sektorami gospodarki (klastry).

Metoda diagonalizacji wymaga jedynie określenia poziomu istotności  $\alpha$ , a jego modyfikacja pozwala osiągnąć z góry założoną liczbę rozpoznanych klastrów. Hoen [2002] prezentuje wyniki, które sugerują ponadto, że metoda jest niewrażliwa na wybór macierzy, będącej przedmiotem analizy. W tej samej pracy znaleźć można algorytm służący do sprowadzenia macierzy restrykcyj do postaci blokowo-diagonalnej.

W odniesieniu do metody diagonalizacji można jednak sformułować także uwagi krytyczne. W pierwszym etapie tej metody, podobnie zresztą jak w metodzie restrykcyj, na wartość poziomu krytycznego, który jest wykorzystywany przy konstruowaniu macierzy restrykcyj, mają wpływ wszystkie elementy odpowiednich macierzy, także te położone na głównych przekątnych. Nie ma to oczywiście wpływu na otrzymane wyniki, gdy celem badania jest porównanie struktury gospodarki tego samego kraju w dwóch okresach lub dwóch gospodarek krajów o ugruntowanej gospodarce rynkowej, w których relacja elementów diagonalnych do pozostałych elementów utrzymuje się, w przybliżeniu, na tym samym poziomie. Zauważono jednak, że cechą charakterystyczną gospodarek w okresie transformacji jest, typowa dla systemu socjalistycznego, dominacja elementów diagonalnych, świadcząca o dużym zużyciu produktów sektorów na własne cele produkcyjne [Ćmiel i Gurgul, 2002; Gurgul i Majdosz, 2005]. W takim wypadku zastosowanie jednakowego poziomu istotności  $\alpha$  będzie, w oczywisty sposób, prowadzić do zawyżenia poziomu krytycznego w tej grupie krajów.

Ważniejsze jednak jest to, że metoda diagonalizacji, ze względu na fakt, iż pomija wartość danego elementu macierzy restrykcyj (zadowalając się wyłącznie stwierdzeniem, że jest to wartość większa od zera), jest niezdolna do wykrycia powiązań istniejących między dwoma, dobrze zdefiniowanymi, klastrami. Stanowi to istotne ograniczenie stosowalności metody diagonalizacji np. do analizy procesu dyfuzji innowacji w gospodarce w oparciu o strukturę klastrową, w wypadku której, jak dowodzi Hauknes [1998], powiązania między dobrze zdefiniowanymi klastrami nie mogą być pomijane.

Zaproponowana w niniejszej pracy metoda triangulizacji uwzględni wspomnianą wyżej cechę powiązań międzysektorowych, co czyni z niej szczególnie użyteczne narzędzie w analizie roli klastrów w procesie upowszech-

niania się innowacji w gospodarce. Bez względu jednak na przedmiot badania, metoda triangulacji dostarcza obrazu klastrowej struktury gospodarki o większej przejrzystości, w porównaniu z tradycyjnie stosowanymi metodami.

Pierwszy etap metody triangulacji jest taki sam jak w wypadku, przedstawionej wyżej, metody diagonalizacji. W oparciu o przyjęty poziom istotności  $\alpha$ , wyznacza się zatem macierz restrykcji ( $\mathbf{Z}^r$ ). Jeżeli to konieczne, zbiór elementów służących do wyznaczenia odpowiednich kwantyli należy ograniczyć do elementów położonych poza główną przekątną. Macierz restrykcji poddaje się następnie transformacji, tworząc nową macierz  $\mathbf{E} = [e_{ij}]$ , taką że:

$$e_{ij} = \begin{cases} \max(z_{ij}^r, z_{ji}^r), & \forall i > j \\ 0 & \forall j > i \end{cases}$$

Następnie sprowadza się macierz  $\mathbf{E}$  do postaci, która w wypadku braku powiązań między sektorami tworzącymi odrębne klastry (lub między sektorami z klastrów i spoza klastrów), będzie tożsama z postacią blokowo-trójkątną. Istotne powiązania między różnymi klastrami (lub między sektorami wchodzącymi w skład klastrów i spoza klastrów) będą natomiast reprezentować niezerowe elementy, zlokalizowane poza trójkątnymi blokami.

W metodzie triangulacji dany sektor jest włączany w skład tego klastra, z którym ma najsilniejsze powiązanie (zarówno z punktu widzenia sprzedawcy, jak i nabywcy). Jest to kluczowa modyfikacja w stosunku do metody diagonalizacji, dzięki czemu możliwe staje się identyfikowanie dobrze zdefiniowanych klastrów, w warunkach istnienia powiązań między pojedynczymi sektorami, wchodzącymi w skład różnych klastrów. Warto zauważyć, że stosując metodę diagonalizacji otrzymalibyśmy w tym wypadku zamiast np. dwóch odrębnych klastrów powiązanych między sobą, jeden klastr, co w istotny sposób przyczyniłoby się do zamazania rzeczywistego obrazu powiązań, istniejących między sektorami w gospodarce.

## CHARAKTERYSTYKA DANYCH

W badaniu wykorzystano tablice przepływów międzygałęziowych dla 2000 roku, wyrażone w cenach bazowych. Warto w tym miejscu zauważyć, że bilanse przepływów międzygałęziowych, publikowane przez Główny Urząd Statystyczny (GUS), są opracowywane co kilka lat, ostatnio – w odstępach pięcioletnich. Użyte w pracy tablice są zatem najnowszymi, dostępnymi danymi w tym zakresie. Przepływów z tytułu zużycia pośredniego nie korygowano o wielkość importu, co oznacza, że przedmiotem zainteresowania są relacje między sektorami, bez względu na fakt, czy produkcja dostarczana jest przez producentów krajowych, czy zagranicznych.

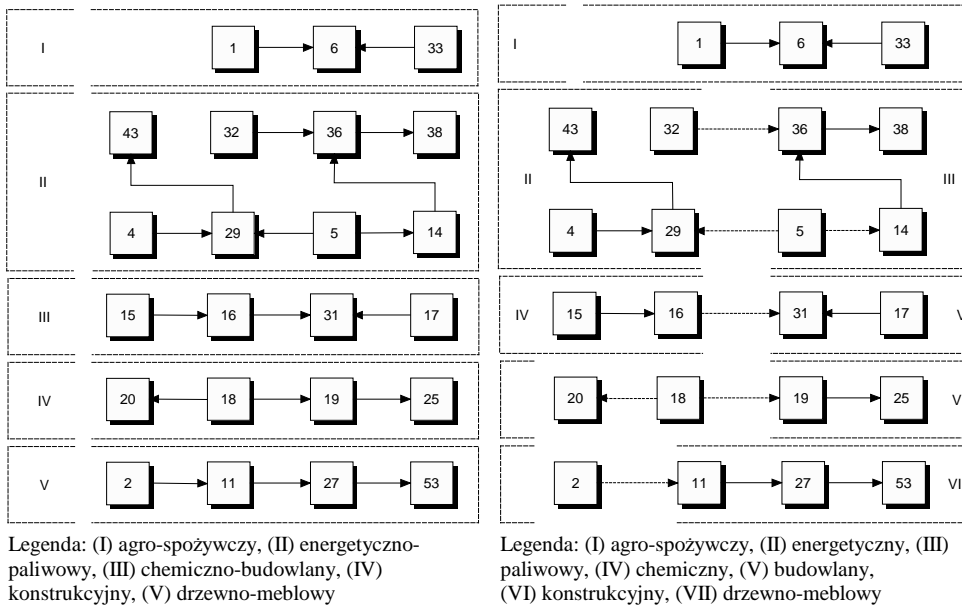
Bilans przepływów międzygałęziowych dla 2000 roku został opracowany w układzie 55 x 55 gałęzi. Liczba sektorów rzeczywiście wykorzystanych w ba-

daniu była jednak mniejsza o jeden, z powodu wykluczenia sektora gospodarstw domowych (zob. załącznik A). Przykłady zaczerpnięte z literatury przedmiotu [zob. np. Hoen, 2002] wydają się wskazywać, że nawet przy tak małej liczbie wyróżnionych sektorów możliwe jest formułowanie ważnych wniosków na temat klastrowej struktury badanej gospodarki. Oczywistą konsekwencją będzie w tym wypadku drastyczne zmniejszenie przeciętnej liczby sektorów, tworzących klastry (problem tzw. małych klastrów).

## WYNIKI EMPIRYCZNE

Aby pokazać różnice w zastosowaniu metody diagonalizacji i triangulizacji, wyznaczono klastry w oparciu o macierz przepływów międzygałęziowych, używając za każdym razem tego samego poziomu istotności  $\alpha = 0,03$ . Stosowano przy tym praktyczną regułę, że za klastery może uchodzić trzy lub więcej sektorów połączonych ze sobą. W ten sposób starano się uniknąć problemu tzw. małych klastrów (dwuelementowych), który przybiera na sile, gdy liczba wyróżnionych sektorów w gospodarce jest relatywnie mała. Od zasady tej zrobiono wyjątek tylko w wypadku metody triangulizacji, aby zilustrować zmiany w strukturze klastrów, jakie zaszły w porównaniu do metody diagonalizacji. Otrzymane wyniki zostały zaprezentowane na rysunku 1.

Stosując metodę diagonalizacji wyróżniono pięć klastrów. Największy, pod względem liczebności, jest klastery energetyczno-paliwowy. Dwa sektory wydobywcze („Węgiel i torf” (4) oraz „Ropa naftowa, gaz i rudy metali” (5)) dostarczają surowca niezbędnego do produkcji koksu i ropy naftowej (14) oraz zaopatrzenia w energię elektryczną, gaz i gorącą wodę (29). Głównymi odbiorcami tych produktów są z kolei sektor usług związanych z nieruchomościami (43) oraz sektor świadczący usługi w zakresie transportu lądowego i rurociągowego (36). Dla prawidłowego funkcjonowania tego ostatniego ważna jest podaż sektora handlu pojazdami mechanicznymi i ich naprawy (32). Z kolei świadczone przez ten sektor usługi stanowią ważny nakład w sektorze usług turystycznych. Najmniejszy, spośród wyróżnionych, jest klastery agro-spożywczy (patrz uwaga na temat klastrów dwuelementowych). Składają się na niego tylko trzy sektory, tworzące klasyczny łańcuch: produkty rolnictwa i łowiectwa (1) są przetwarzane na produkty spożywcze i napoje (6), a następnie dystrybuowane (33).



Rysunek 1. Klastry w polskiej gospodarce w 2000 roku: zastosowanie metody diagonalizacji (po lewej) i metody triangulacji (po prawej).

Identyfikacja klastrów za pomocą metody triangulacji ujawniła jednak, że nie wszystkie przepływy z tytułu zużycia produkcyjnego, mimo dużej jednostkowej wartości w relacji do sumy tego typu przepływów w gospodarce, pozostają tak samo ważne z punktu widzenia kupującego i sprzedającego. Jedynym klastrzem, którego skład nie uległ zmianie po zastosowaniu metody triangulacji jest klaster agro-spożywczy. W wypadku pozostałych obserwujemy albo podział na dwa odrębne klastry, aczkolwiek połączone ze sobą (niekiedy pośrednio), albo zmniejszenie znaczenia (i w konsekwencji także liczności klastra) któregoś z sektorów. Poprzednio najliczniejszy klaster składał się w istocie z klastra energetycznego (4, 29, 43) i – w pewnym sensie odrębnego – klastra paliwowego (14, 36, 38). Tym, co łączy oba klastry, jest sektor ropy naftowej, gazu ziemnego i rudy metali (5), który dostarcza niezbędnego surowca w produkcji obu klastrów, ale sam nie należy do żadnego z nich. Podobne zmiany zaszły w klastrze trzecim, w którego strukturze możemy obecnie wyróżnić klaster chemiczny i budowlany. W tym drugim wypadku, okazało się, że rzeczywiste znaczenie wyrobów z gumy i tworzyw sztucznych (16) dla sektora robót budowlanych (31) jest mniejsze niż sugerowała to metoda diagonalizacji.

Można zatem sformułować wniosek, że metoda triangulacji pozwala na lepszy wgląd w rzeczywistą klastrową strukturę gospodarki, gdyż jest w stanie zidentyfikować powiązania między odrębnymi klastrami, które w metodzie diagonalizacji prowadzą do utworzenia jednego, zbiorczego klastra. Należy

ponadto oczekiwać, że metoda triangulizacji dostarczy rozwiązania co najmniej tak dobrego, pod względem wartości przeciętnego powiązania wewnątrz klastrów i poza klastrami, jak metoda diagonalizacji. Aby się o tym przekonać, w tabeli 1 przedstawiono charakterystyki wartości przepływów produktów i usług z tytułu zużycia produkcyjnego w ramach każdej z zastosowanych metod.

Tabela 1. Wartość przepływów z tytułu zużycia pośredniego (w mln zł)

	Kwartył 1.	Średnia	Mediana	Kwartył 3.	Odchylenie std.
<b>Metoda diagonalizacji</b>					
Wewnątrz klastrów:	1 087,84	4 087,90	4 042,94	6 274,11	3 632,11
Między klastrami*	23,06	778,08	112,40	489,24	2 336,73
Klastry do pozostałych*	2,71	102,72	14,98	67,34	300,61
Wewnątrz pozostałych*	0,34	132,11	5,11	30,58	767,22
<b>Metoda triangulizacji</b>					
Wewnątrz klastrów:	1 468,99	4 158,19	4 112,98	6 587,88	3 439,80
Między klastrami*	25,89	895,05	121,60	541,45	2 652,98
Klastry do pozostałych*	3,58	151,51	21,79	98,21	534,03
Wewnątrz pozostałych*	0,60	153,56	6,26	39,97	785,70

\* uwzględniono także klastry dwuelementowe.

Źródło: obliczenia własne.

Zgodnie z oczekiwaniami, średnia wartość powiązań między sektorami w ramach wyróżnionych klastrów jest nieznacznie wyższa w wypadku metody triangulizacji. Dla pięciu klastrów zidentyfikowanych przy użyciu metody diagonalizacji przeciętna wartość przepływów wewnątrz klastra wynosi 4088 mln zł, podczas gdy analogiczna wartość w wypadku metody triangulizacji to 4158 mln zł. Znak asymetrii w przepływach (różnica średniej i mediany) waha się w ramach poszczególnych klastrów, przy czym jej siła (najprostsza miara siły asymetrii to stosunek różnicy średniej i mediany do odchylenia standardowego) jest niewielka. Średnia wartość przepływów pomiędzy sektorami należącymi do różnych klastrów jest nieznacznie wyższa w wypadku drugiej metody (odpowiednio 778 mln zł i 895 mln zł), co jest jednak zupełnie zrozumiałe, gdyż stosując metodę triangulizacji, część przepływów, uprzednio klasyfikowanych jako należące do klastra, wyraża powiązania między klastrami lub między sektorami należącymi do klastrów i spoza nich. Średnia siła powiązań klastrów z resztą gospodarki oraz siła powiązań między sektorami spoza klastrów jest porównywalna dla obu metod.

## WNIOSKI

Porównanie wyników otrzymanych przy użyciu metody diagonalizacji i zaproponowanej metody triangulizacji dostarcza dowodów na to, iż użycie tej ostatniej daje lepszy wgląd w rzeczywistą strukturę klastrową gospodarki. Stopień realizacji celu, mierzony siłą powiązań wewnątrz zidentyfikowanych klastrów

w relacji do siły tychże powiązań między sektorami nienależącymi do klastrów, jest przy tym co najmniej tak wysoki jak w wypadku zastosowania metody diagonalizacji.

## LITERATURA

- Ćmiel, A., Gurgul, H. (2002) Application of Maximum Entropy Principle in Key Sector Analysis, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 42, 1361-76.
- Antonelli, C. (1999) *The Microdynamics of Technological Change* (London, Routledge).
- DeBresson, C. (1996) *Economic Interdependence and Innovative Activity: An Input-Output Analysis* (Cheltenham, Edward Elgar).
- Eding, G. J., Oosterhaven, J., Stelder, D. (2001) Clusters, Linkages and Regional Spillovers: Methodology and Policy Implications for the two Dutch Mainports and the Rural North, *Regional Studies*, 35 (9), 809-22.
- Gurgul, H., Majdosz, P. (2005) Key Sector Analysis: A Case of the Transited Polish Economy, *Managing Global Transitions*, 3 (1), 95-111.
- Hauknes, J. (1998) Norwegian Input-Output Clusters and Innovation Patterns, *STEP Report Series*, No. R-15
- Hoen, A. (2002) Identifying Linkages with a Cluster-based Methodology, *Economic Systems Research*, 14 (2), 131-45.
- Krugman, P. (1991) *Geography and Trade* (Cambridge MA, MIT Press).
- Krugman, P., Venables, A.J. (1996) Integration, Specialization, Adjustment, *European Economic Review*, 40, 959-68.
- Porter, M. E. (1998) On Competition (Boston, Harvard Business Review).

## ZAŁĄCZNIK A. LISTA SEKTORÓW W AGREGACJI 54 X 54

Numer	Charakterystyka sektora	Numer	Charakterystyka sektor
1	Produkty rolnictwa i łowiectwa	28	Usł. odzyskiwania mater. z odpadów
2	Produkty leśnictwa	29	Energia elektrycz., gaz, gorąca woda
3	Produkty rybołówstwa i rybactwa	30	Woda zimna i jej rozprowadzanie
4	Węgiel i torf	31	Roboty budowlane
5	Ropa naftowa i gaz ziemny, rudy metali, produkty kopalne pozostałe	32	Hand. pojaz. i ich napr., sprzed. paliw
6	Produkty spożywcze i napoje	33	Handel hurtowy i komisowy
7	Wyroby tytoniowe	34	Handel detaliczny
8	Wyroby włókiennicze	35	Usługi hoteli i restauracji
9	Odzież i wyroby futrzarskie	36	Usługi transp. lądowego i rurociąg.
10	Skóry i wyroby ze skór	37	Usługi transp. wodn. i lotniczego
11	Drewno i wyroby z drewna	38	Usługi turystyczne
12	Papier i wyroby z papieru	39	Usługi pocztowe i telekomunikacyjne
13	Druki i nośniki informacji	40	Usługi pośrednictwa finansowego
14	Koks i produkty ropy naftowej	41	Usługi ubezpieczeniowe
15	Chemikalia i wyroby chemiczne	42	Usługi pomocnicze finansowe



16	Wyroby z gumy i tworzyw sztucznych	43	Usługi związane z nieruchomościami
17	Wyr. z pozost. surowców niemetal.	44	Wynajem maszyn i urządzeń
18	Metale	45	Usługi informatyczne
19	Wyroby metalowe gotowe	46	Usługi naukowo-badawcze
20	Maszyny i urządzenia	47	Usługi pozostałe dla dział. gosp.
21	Maszyny biurowe i komputery	48	Usługi administracji publicznej
22	Maszyny i aparatura elektryczna	49	Usługi edukacji
23	Sprzęt rtv i telekomunikacyjny	50	Usługi ochrony zdrowia
24	Instrumenty medyczne i precyzyjne	51	Usługi komunalne
25	Pojazdy mechaniczne	52	Usługi organizacji członkowskich
26	Sprzęt transportowy pozostały	53	Usł. kulturalne, rekreacyjne i sportowe
27	Meble i produkty pozostałe	54	Usługi pozostałe

### Input-Output Table Based Method of Cluster Identification

**Summary:** An idea beyond the triangulization method is that an intermediate demand should be categorized as an intra-cluster if it is large enough not only from economy-wide perspective. Also it should be considered as a significant one by both buyer and seller. Doing so, the triangulization method provides a better insight into the actual structure of economy by distinguishing between three types of links, namely intra-cluster flows, flows which take place between two sectors belonging to different clusters, and flows from sector within cluster to sector outside of clusters. It turned out that the triangulization method leads to the solution which is, at least, as good as those of the diagonalization method. In addition, the solution obtained by using this method is irrespective of applying the intermediate demand matrix, input coefficient matrix, or output coefficient matrix. On the other hand, when applying the Leontief inverse, the identified clusters are different compared to those in the case where we used one of the above-mentioned matrices. It is worth noting that clusters seem to be a quite important in the Polish economy. The sectors belonging to the clusters created approximately a 70 per cent of gross output in 2000, and a 60 per cent of value added, final consumption expenditures, import and export in the same year. However, this conclusion should be drawn with care due to the fact that the high aggregation (55 x 55 sectors) was used in this study. Therefore, this part of our investigation should be repeated in the future at low level of data aggregation as far as possible.

**Key words:** Input-output model, clusters, triangulization method.

Ewa Jałowiecka, Piotr Jałowiecki  
Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW  
e-mail: pjalowiecki@mors.sggw.waw.pl

## PROGNOZA PRODUKCJI I SPOŻYCIA PAPIEROSÓW W POLSCE DO 2008 ROKU

**Streszczenie:** Rynek wyrobów tytoniowych w Polsce będąc znaczącym źródłem dochodów budżetowych państwa (7-7,5%) jest jedną z najważniejszych gałęzi gospodarki. Polski rynek wyrobów tytoniowych to przede wszystkim rynek papierosów stanowiących około 90% produkcji. W drugiej połowie lat 90-tych ubiegłego wieku przeprowadzono w Polsce prywatyzację praktycznie całości przemysłu tytoniowego, wskutek czego w chwili obecnej 95-98% udziału w rynku wyrobów tytoniowych posiada sześć zagranicznych koncernów tytoniowych. Systematyczny wzrost wysokości akcyzy na wyroby tytoniowe związany z koniecznością dostosowania się do minimalnych stawek obowiązujących w Unii Europejskiej spowodował w ostatnich latach znaczący wzrost cen papierosów, szczególnie w porównaniu ze wschodnimi sąsiadami Polski. Jest to główna przyczyna przemytu papierosów, którego szacowana wielkość stanowi od 13 do 16% udziału w rynku [Ratajczak 2006]. Analiza zmian wysokości produkcji i spożycia papierosów w Polsce w ostatnich latach na tle danych z lat 1970-2004 wskazuje na wyraźną tendencję spadkową produkcji papierosów w okresie prywatyzacji i zmiany struktury udziałów polskiego przemysłu tytoniowego w latach 1995-2002. W kolejnych latach daje się zaobserwować niewielką, lecz systematyczną tendencją wzrostową produkcji papierosów, natomiast tendencją spadkową wysokości spożycia papierosów, chociaż słabszą niż w poprzednich latach, nie uległa zmianie. W całym rozpatrywanym okresie lat 1970-2004 zarówno wysokość produkcji jak i spożycia papierosów wykazuje częste zmiany trendu. Wyznaczone przez autorów prognozy produkcji i spożycia papierosów w Polsce w latach 2005-2008 zdają się potwierdzać tendencje wzrostową produkcji i spadkową spożycia papierosów zaobserwowane w ostatnich latach. Przyczyn takiego stanu rzeczy można upatrywać z jednej strony w przenoszeniu w ostatnich latach dużej części produkcji zagranicznych koncernów tytoniowych do Polski z uwagi na niższe jej koszty, a z drugiej strony w stałym wzroście cen papierosów.

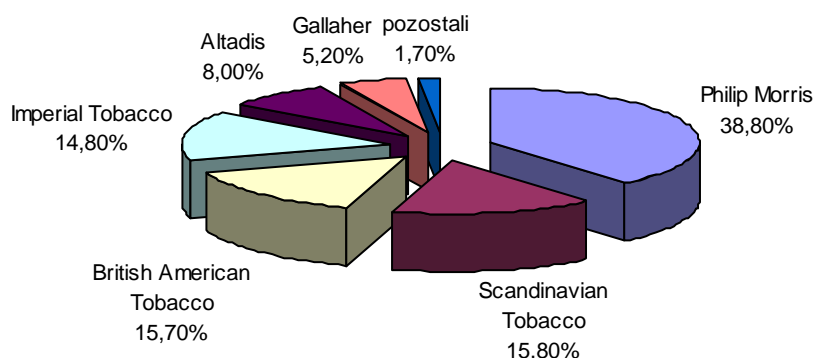
**Słowa kluczowe:** produkcja papierosów, spożycie papierosów, prognozowanie ekonomiczne, metoda adaptacyjna.

## RYNEK WYROBÓW TYTONIOWYCH

Przemysł tytoniowy w Polsce jest ważną gałęzią gospodarki narodowej będąc znaczącym źródłem dochodów państwa. Stanowiąc znaczące źródło zatrudnienia i zarobków, przemysł tytoniowy generuje obecnie 7-7,5% wartości wszystkich dochodów budżetowych państwa i 7% całkowitej wartości dodanej w gospodarce [Liberska 2003, Olejniczak 2004, 2005, Zdanowicz i in. 2006].

Rozpatrując sześć głównych kategorii wyrobów tytoniowych: papierosy, cygara, cygaretki, tytoń papierosowy, tytoń fajkowy oraz tabakę, należy stwierdzić, że segmentem zdecydowanie dominującym w Polsce są papierosy stanowiące 90% udziału w rynku. Spośród pozostałych pięciu kategorii produktów tytoniowych, jedynym znaczącym na polskim rynku jest segment tytoniu papierosowego (7-8% udziału w rynku), natomiast pozostałe posiadają znaczenie marginalne [Zdanowicz i in. 2006].

W połowie lat 90-tych ubiegłego wieku przeprowadzono w Polsce zakrojoną na szeroką skalę prywatyzację przemysłu tytoniowego. W wyniku tego procesu udziały w największych polskich wytwórniach papierosów zostały sprzedane inwestorom zagranicznym. Proces ten został zakończony w latach 2000-2001, a podział rynku wyrobów tytoniowych w Polsce przybrał obecny kształt (rysunek 1). Dominuje na nim sześciu głównych producentów, wśród których zdecydowanym liderem jest Philip Morris (ponad 1/3 udziału w rynku), a pozostali to Scandinavian Tobacco, British American Tobacco Imperial Tobacco (dawniej Reemtsma), Altadis oraz Gallaher. Wymienieni producenci osiągnęli łącznie w latach 2003-2004 produkcję na poziomie 95-96% papierosów legalnie sprzedawanych w Polsce. W chwili obecnej wielkość ta wzrosła jeszcze do 97-98% udziału w rynku, przede wszystkim za sprawą transferu do Polski znaczącej części produkcji kolejnego zagranicznego koncernu tytoniowego - Gallaher, którego udziały w rynku legalnie sprzedawanych papierosów wzrosły z 2,9% w styczniu 2004 roku do 5,2% w styczniu 2005 roku, osiągając według niektórych oszacowań wielkość 8% w połowie tego roku [Olejniczak 2004, Stępień 2005, Zdanowicz i in. 2006].



Rysunek 1. Udziały koncernów tytoniowych w rynku legalnie sprzedawanych papierosów w Polsce w pierwszym kwartale 2005 roku.

W chwili obecnej jedyną w zasadzie formą własności wśród podmiotów gospodarki tytoniowej są spółki handlowe. Udział Skarbu Państwa w wymienionych sześciu największych przedsiębiorstwach tytoniowych jest znikomy, ograniczając się do 3-5%. Jedynie Zakłady Tytoniowe w Lublinie S.A. posiadające 1% udziału w rynku są w 100% własnością Skarbu Państwa. Warto zaznaczyć, że 30% sprywatyzowanych w latach 90-tych spółek otrzymali bezpłatnie uprawnieni do tego pracownicy i plantatorzy [Papuga 2002].

Rynek wyrobów tytoniowych w Polsce jest regulowany przez Ustawę o "Organizacji rynków owoców i warzyw, rynku chmielu, rynku tytoniu oraz rynku suszu paszowego", która została wprowadzona w życie z dniem 29 grudnia 2003 roku. Zgodnie z tą ustawą organizacja rynku tytoniu obejmuje limitowanie produkcji tytoniu, określa konieczność rejonizacji upraw oraz podstawowe założenia umów kontraktacyjnych.

W 1993 roku w Polsce zostały wprowadzone podatek VAT oraz akcyza od sprzedaży wyrobów tytoniowych, na którą składa się stawka kwotowa i procentowa. W kolejnych latach wysokość podatku akcyzowego systematycznie wzrastała, co było związane między innymi z jego dostosowywaniem do wielkości obowiązujących w państwach Unii Europejskiej. W chwili obecnej, w Polsce obowiązuje stawka kwotowa w wysokości 72,12 PLN (około 18 EUR) za 1000 sztuk papierosów oraz stawka procentowa w wysokości 31,30%. Do końca 2008 roku Polska musi osiągnąć minimalny poziom obowiązujący w Unii Europejskiej w wysokości 64 EUR za 1000 sztuk i 57% wysokości ceny.

Stały i znaczący wzrost podatku akcyzowego oznacza zdecydowane podwyżki cen papierosów w Polsce. Szacuje się, że do końca 2008 roku cena paczki papierosów wzrośnie średnio o 5 PLN, czyli o prawie 100% obecnej wartości. Wysokość akcyzy w państwach sąsiadujących z Polską od wschodu: Białorusią, Rosją i Ukrainą jest zdecydowanie niższa. W chwili obecnej stawka kwotowa wynosi około 1,87 EUR za 1000 sztuk, a stawka procentowa 8% [Zdanowicz i in. 2006].

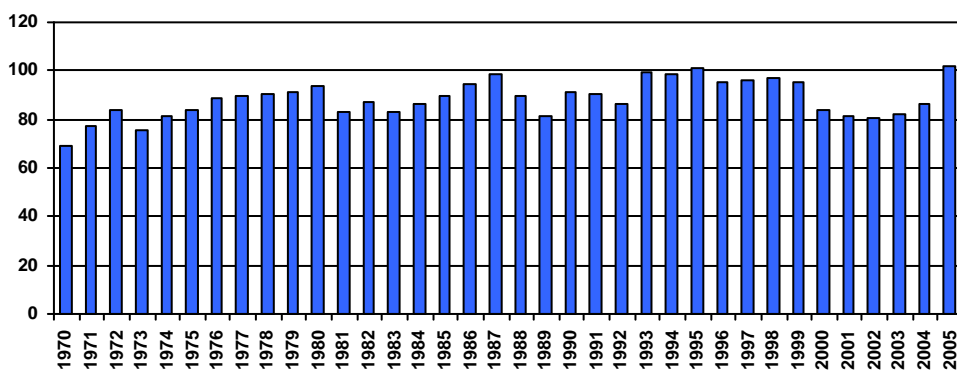
W rezultacie niskie ceny papierosów przyczyniają się do ich przemytu zza wschodniej granicy. W latach poprzedzających akcesję Polski do Unii Europejskiej udział w rynku papierosów pochodzących z przemytu jest szacowany na 13 do 16%. Skala zjawiska była i nadal jest wyjątkowo znacząca w czterech wschodnich województwach: Lubelskim, Podkarpackim, Podlaskim i Warmińsko-Mazurskim, gdzie udział w rynku papierosów bez banderoли Ministerstwa Finansów RP wynosił średnio 50% [Lublin 2000]. Po przystąpieniu Polski do Unii Europejskiej wraz z wprowadzeniem ograniczeń wizowych dla obywateli państw z poza Unii Europejskiej, wielkość udziału w rynku papierosów przemycanych spadła do 13-16% [Ratajczak 2006]. Prognozy skali przemytu na lata następne, uwzględniające stały roczny wzrost akcyzy o 6,52% zakładają stały spadek ilości przemycanych papierosów, niemniej w 2015 roku nadal będzie to ok. 9-10% udziału w rynku [Zdanowicz i in. 2006].

## PRODUKCJA PAPIEROSÓW W POLSCE W LATACH 1970-2004

Produkcja papierosów w Polsce po drugiej wojnie światowej systematycznie wzrastała z 25,3 mld sztuk w 1950 roku, przez 44,1 mld sztuk w 1960 roku, do poziomu 69,2 mld sztuk w 1970 roku [Bujanowski 1967, 1970].

W latach następnych wielkość produkcji papierosów podlegała dosyć nieregularnym wahaniom osiągając maksymalny poziom 101 mld sztuk w 1995 roku. W okresie prywatyzacji polskiego przemysłu tytoniowego, w latach 1995-2002 można zaobserwować wyraźny spadek produkcji papierosów do wysokości 80,9 mld sztuk. W ostatnich latach po ostatecznym ukształtowaniu się podziału polskiego rynku tytoniowego pomiędzy sześciu największych producentów można zaobserwować wzrost produkcji papierosów do poziomu 86,6 mld sztuk w 2004 roku (rysunek 2).

Dane udostępnione przez GUS dla 2005 roku wykazują skokowy wzrost wysokości produkcji papierosów w Polsce do rekordowego poziomu 102 mld sztuk. Niemniej jako dane dotyczące roku poprzedniego mają one charakter jedynie szacunkowy i będą poddawane korekcie między innymi o dane na temat eksportu papierosów. Z tego powodu dane o produkcji papierosów w Polsce w 2005 roku nie zostały uwzględnione w procesie prognozowania.



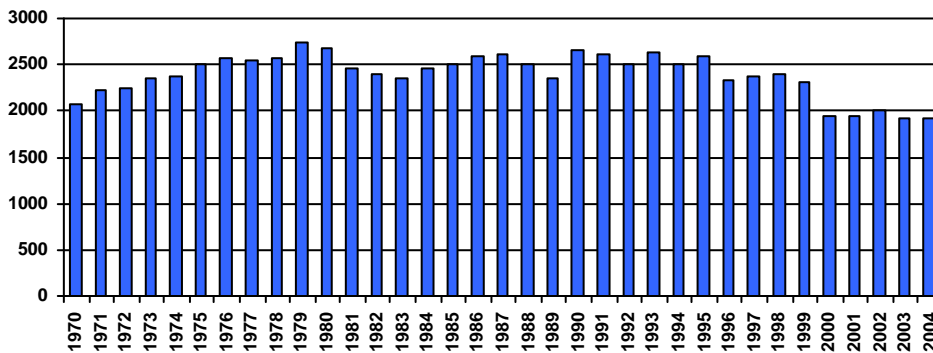
Rysunek 2. Zmiany wielkości produkcji papierosów w Polsce w latach 1970 – 2005 (w miliardach sztuk)

## SPOŻYCIE PAPIEROSÓW W POLSCE W LATACH 1970-2004

Pierwsze dane na temat wielkości spożycia papierosów w Polsce w latach powojennych pochodzą z 1949 roku, gdy statystyczny mieszkaniec naszego kraju wypalał 893 papierosy rocznie. W kolejnych latach zaznaczyła się zdecydowana i stała tendencja wzrostowa spożycia papierosów osiągając poziom 1500 sztuk rocznie w drugiej połowie lat 50-tych i 2000 sztuk rocznie pod koniec lat 60-tych.

Oznaczało to wzrost spożycia papierosów aż o ponad 230% w porównaniu z końcem lat 40-tych [Didkowska i in. 1999].

W latach 70-tych wysokość spożycia papierosów początkowo podlegała stałemu, choć nieco wolniejszemu niż w poprzednich okresach wzrostowi, osiągając rekordową wysokość 2741 sztuk na osobę w 1979 roku. W kolejnych latach, aż do połowy lat 90-tych poziom spożycia papierosów podlegał nieregularnym wahaniom oscylując na poziomie 2500-2650 sztuk na osobę. Od 1995 roku zaznacza się tendencja spadkowa wysokości spożycia papierosów, która w 2003 roku osiągnęła od końca lat 60-tych poziom 1920 sztuk na osobę (rysunek 3).



Rysunek 3. Zmiany wielkości rocznego spożycia papierosów w Polsce w latach 1970 – 2004 (w sztukach na 1 osobę)

## PROGNOZY PRODUKCJI I SPOŻYCIA PAPIEROSÓW

Na podstawie danych na temat wielkości produkcji i spożycia papierosów w Polsce w latach 1970-2004 podjęto próbę określenia spodziewanego kierunku zmian tych wielkości w latach 2005-2008 przy pomocy odpowiednio dobranych metod matematyczno-statystycznych. Prognozy produkcji i spożycia papierosów zostały zbudowane przy użyciu metody wyrównywania wykładniczego szeregu czasowego bez uwzględniania wahań sezonowych [Brown 1959, Zadora 1969, Zeliaś i in. 2003]. W oparciu o dane rzeczywiste obliczono wartości wygładzone zgodnie z równaniami (1).

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = y_1 \\ \hat{y}_t = \alpha \cdot y_t + (1 - \alpha) \cdot \hat{y}_{t-1} \end{cases} \text{ dla } t > 1 \quad (1)$$

gdzie:  $y_t$  - wartość rzeczywista w okresie  $t$ ,  $\hat{y}_t$  - wartość wygładzona w okresie  $t$ ,  $\alpha$  - stała wygładzania ( $\alpha \in (0,1)$ ).

We wzorze (1) jako ocenę pierwszej wartości trendu przyjęto wartość rzeczywistą w pierwszym okresie [Farnum i in. 1989, Makridakis i in. 1989]. Z kolei wartość stałej wygładzania  $\alpha$  została wyznaczona doświadczalnie metodą kolejnych przybliżeń empirycznych, na podstawie porównania zgodności prognoz wygasłych zbudowanych przy założonych różnych wartościach stałej  $\alpha$  z wartościami rzeczywistymi [Gardner 1985]. Prognozę dla okresu  $T$  zbudowano na podstawie obliczonych wartości wygładzonych zgodnie ze równaniem (2).

$$y_T^p = \hat{y}_n + h \cdot \Delta \hat{y}_n \quad (2)$$

gdzie:  $\hat{y}_n$  - najnowsza dostępna ocena wartości trendu,  $h$  - realne wyprzedzenie czasowe prognozy,  $\Delta \hat{y}_n$  - różnica ostatnich dostępnych wartości wygładzonych.

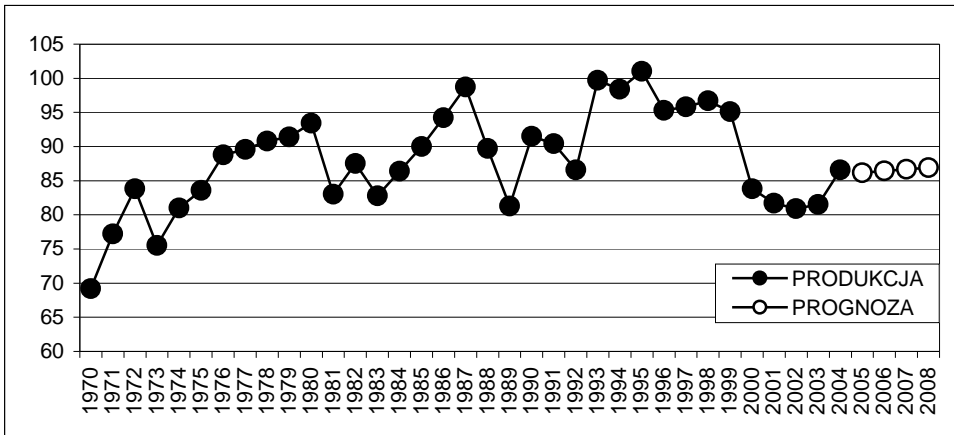
Jako główne kryterium oceny prognoz przyjęto wartości pierwiastka względnego błędu predykcji ex-post (wzory 3 i 4).

$$S_p = \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \sum_{t \in I_{ep}} (y_t - y_t^p)^2} \quad (3)$$

$$V_{s_p} = \frac{S_p}{|\bar{y}_{I_{ep}}|} \quad (4)$$

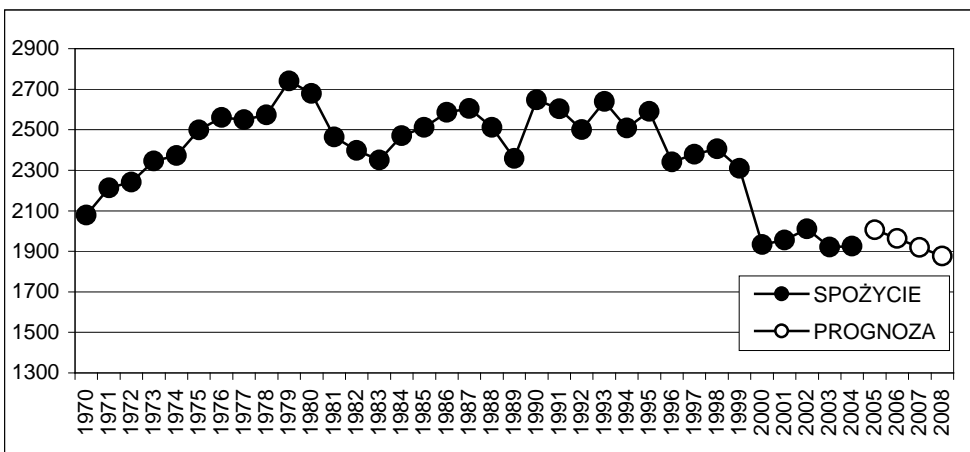
Za prognozy dopuszczalne uznano te, dla których wartość względnego błędu predykcji ex-post nie przekroczyła 10% wartości rzeczywistych [Borkowski i in. 2003, Zeliaś i in. 2003].

Prognoza produkcji papierosów na lata 2005-2008 została zbudowana przy wyznaczonej eksperymentalnie wartości stałej wygładzania  $\alpha = 0,27$ , dla której wartość względnego błędu predykcji ex-post była minimalna i wynosiła 7,00%. Według prognozy zbudowanej na podstawie 35-letniego szeregu czasowego w omawianym okresie produkcja papierosów będzie wykazywała niewielką tendencję wzrostową osiągając na koniec prognozowanego okresu wielkość 86,9 mld szt. papierosów rocznie.



Rysunek 4. Prognoza produkcji i spożycia papierosów w latach 2005-2008

Prognoza spożycia papierosów na lata 2005-2008 została zbudowana przy wyznaczonej eksperymentalnie wartości stałej wygładzania  $\alpha = 0,26$ , przy której wartość względnego błędu predykcji ex-post była najmniejsza i wynosiła 6,45%. Według prognozy zbudowanej na podstawie 35-letniego szeregu czasowego w omawianym okresie spożycie papierosów będzie wykazywało tendencję spadkową osiągając pod koniec prognozowanego okresu wielkość 1876 szt. papierosów na osobę rocznie.



Rysunek 5. Prognoza spożycia papierosów w Polsce w latach 2005-2008



## PODSUMOWANIE

Stabilizacja, a następnie niewielki wzrost produkcji papierosów w Polsce w ostatnich latach potwierdzony wyznaczonymi prognozami na lata 2005-2008 jest najprawdopodobniej konsekwencją dwóch czynników:

- wynegocjowanie korzystnych limitów produkcyjnych tytoniu dla Polski w ramach Unii Europejskiej, które znacznie przekraczają obecny poziom.
- przenoszenie do Polski dużej części produkcji przez międzynarodowe koncerny tytoniowe (British American Tobacco, Gallaher) z uwagi na niższe koszty produkcji niż w innych państwach Unii Europejskiej.

Z kolei spadek spożycia papierosów w Polsce również potwierdzony wyznaczonymi prognozami na lata 2005-2008 jest spowodowany najprawdopodobniej przez kilka czynników, spośród których do najważniejszych można zaliczyć:

- wzrost cen papierosów spowodowany przede wszystkim stałym zwiększaniem wysokości stawek akcyzowych na wyroby tytoniowe.
- związany ze wzrastającymi cenami papierosów przemyt papierosów z Białorusi, Rosji (Obwód Kaliningradzki) i Ukrainy, którego udział w rynku jest szacowany w chwili obecnej na ok. 13-16%.
- zakaz reklamy wyrobów tytoniowych w Polsce, który w ostatnich latach jest szczególnie rygorystycznie egzekwowany w środkach masowego przekazu.
- upowszechnianie się świadomości szkodliwych skutków zdrowotnych palenia papierosów, a w konsekwencji pojawienie się „mody” na niepalenie, również wśród osób palących w przeszłości.

## LITERATURA

- Borkowski B., Dudek H., Szczesny W. (2003) Ekonometria–wybrane zagadnienia, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa
- Brown R.G. (1959) Statistical Forecasting for Inventory Control, McGraw-Hill, New York
- Bujanowski K. (1967) Ekonomiczne problemy produkcji tytoniu, PWRiL, Warszawa
- Bujanowski K. (1970) Produkcja i obrót tytoniem w Polsce, PWRiL, Warszawa
- Didkowska J., Wojciechowska U., Katoński W. (1999) Spożycie tytoniu w Polsce w latach 1923 - 1995. W: Katoński W., Przewoźnik K.: Palenie tytoniu w Polsce: postawy, następstwa zdrowotne i profilaktyka, Centrum Onkologii, Instytut im. Marii Skłodowskiej - Curie, Warszawa
- Farnum N.R., Santon L. (1989) Quantitative Forecasting Methods. PWS-KENT Publishing Company, Boston
- Gardner E.S. Jr. (1985) Exponential Smoothing. The of Art. J. of Forecasting, 4
- Liberska A. (07/2003) Rynek wyrobów tytoniowych - raport. Poradnik handlowca

- Makridakis S., Wheelwright S. (1989) *Forecasting Methods for Management*. Fifth Edition. John Wiley & Sons Inc., New York
- Olejniczak R. (2004) Rynek wyrobów tytoniowych-raport. *Poradnik handlowca*, 7
- Olejniczak R. (2005) Rynek wyrobów tytoniowych-raport. *Poradnik handlowca*, 6
- Papuga J. (10/2002) Branża tytoniowa, *BOSS Rolnictwo*
- Stępień A. (30/09/2005) Sukces zależy od pracowników. *Przegląd gospodarczy Plus*
- Zadora K. (1969) O predykcji szeregów czasowych metodą wyrównywania wykładniczego. *Przegląd Statystyczny*, 2
- Zakłady Tytoniowe w Lublinie S.A.: Materiały ze strony internetowej <http://www.ztl.lublin.pl>
- Zdanowicz J., Ratajczak J. (02/2006) Rynek wyrobów tytoniowych w Polsce - raport. *Poradnik handlowca*
- Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. (2003) *Prognozowanie ekonomiczne - teoria, przykłady, zadania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa

### **Forecast about production and consumption of cigarettes in Poland until 2008.**

**Summary:** One of the most important branches in Poland is the tobacco industry, which brings about 7-7.5% of Polish budget incomes. The cigarettes are the main part of its production (about 90%). In the second half of 90's, almost the whole Polish tobacco industry was privatized. Nowadays, the six biggest foreign concerns control about 95-98% of production of cigarettes in Poland. In the last years, the excise on the tobacco products has been growing systematically in consequence of necessity to fit its rate to excise levels in the rest of the EU countries. This is the reason of fast increase in cigarettes prices, particularly in comparison to eastern neighbour states of Poland. One of the consequences of this process is smuggling cigarettes out of eastern borders. At present from 13 to 16% of cigarettes smoked in Poland are of illegal origin. Analysis of changes in production and consumption of cigarettes in Poland in the last years shows the distinctly descendent trend of production in the years 1995-2002, during the privatization of Polish tobacco industry. In the next years, production of cigarettes has been systematically growing. Consumption of cigarettes in Poland has been diminishing systematically from the first half of 90's. In the whole analyzed period 1970-2004 production and consumption have not exerted a distinct trend, and the trends have been changing very often. Prepared prognosis of production and consumption of cigarettes in Poland for the years 2005-2008 confirms ascendent trend of production, and descendent trend of consumption observed in the last years. On the one hand the most important reason of this processes might be transfer of huge part of production of foreign tobacco concerns to Poland, and on the other hand constant appreciation of cigarette prices in Poland side in last years.

**Key words:** production of cigarettes, consumption of cigarettes, economic forecasting, adaptive method.

Andrzej Karpio, Krzysztof Karpio  
Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW  
email: andrzej\_karpio@sggw.pl, karpio@mors.sggw.waw.pl

## ANALIZA TRENDÓW NA GIEŁDZIE PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE

**Streszczenie:** W pracy zaprezentowano technikę analizy trendów krótkookresowych, która nie korzysta z metod analizy technicznej. Celem pracy było ustalenie, czy wzrost (spadek) ceny jakiegoś waloru nie wpływa na to, że cena ta „chętniej” wzrasta (spada) na kolejnym notowaniu. Takie zachowanie powodowałoby, że fluktuacje cen byłyby większe niż w przypadku zmian nieskorelowanych. Ideą pracy jest konstrukcja hipotetycznych kursów i porównanie ich z kursami rzeczywistymi. Kursy teoretyczne są tak skonstruowane, że nie zawierają żadnych korelacji. W kursach teoretycznych i rzeczywistych zlicza się ilości przypadków gdy cena wzrosła lub spadła na dwóch kolejnych notowaniach. Bada się jak często występuje utrzymanie trendu wzrostowego lub spadkowego w stosunku do wszystkich notowań. Autorzy starają się odpowiedzieć na pytanie: Czy istnieją istotne różnice pomiędzy ilościami trendów dla spółek notowanych na GPW i występujących w sztucznie skonstruowanych notowaniach? Badania dotyczą trzech wybranych okresów obejmujących lata 2000 – 2005.

**Słowa kluczowe:** analiza techniczna, notowania giełdowe, trend wzrostowy, trend spadkowy.

### WSTĘP

Pojęcie trendu jest podstawą zastosowań analizy technicznej do inwestowania w papiery wartościowe, w szczególności w akcje notowane na rynku giełdowym. Najczęściej podstawą podejmowania decyzji jest wiara, że ów trend rzeczywiście występuje. Jednak kwestią podstawową jest horyzont inwestycyjny. Zatem gracze giełdowi długoterminowi interesują się zmianami cen akcji w perspektywie lat, natomiast na drugim biegunie mamy do czynienia z inwestowaniem w terminie kilkudniowym. Nie przesądzając o słuszności decyzji podejmowanych w oparciu o analizę techniczną, zainteresowaniem autorów niniejszej pracy jest analiza trendu krótkookresowego, ale bez uciekania się do metod stosowanych we wspomnianej dziedzinie. Nie korzysta się z żadnych technik analizy technicznej, w rodzaju zliczania prawidłowych i błędnych sygnałów kupna i sprzedaży generowanych przez różnorodne wskaźniki. Idea pracy, wzorowana na technikach stosowanych przez fizyków (Lyons, 1990, Feynman 2005), polega na porównaniu rozkładów dla danych doświadczalnych z rozkładami otrzymanymi tą samą metodą lecz z danych sztucznie wygenerowanych. W pracy porównano częstości

występowania wzrostów lub spadków cen na dwóch kolejnych notowaniach dla cen akcji notowanych na warszawskiej GPW oraz dla kursów teoretycznych. Kursy teoretyczne lub inaczej wzorcowe skonstruowano tak aby nie zawierały żadnych korelacji jedno-sesyjnych.

## OPIS METODY

W pracy porównywano zmiany cen dla rzeczywistych kursów giełdowych ze zmianami cen dla kursów „wzorcowych”, które były tak skonstruowane, że nie zawierały żadnych korelacji. Innymi słowy, w kursie teoretycznym wzrost lub spadek ceny nie wpływał na zmianę ceny na kolejnym notowaniu. Notowania akcji traktowane są jako tzw. ciąg pierwotny, na bazie którego konstruuje się ciąg wtórny. Podczas konstruowania ciągu wtórnego w pierwszym kroku tworzy się rozkład dziennych zmian cen (różnic kursów). Jest to rozkład często wykorzystywany w analizie danych giełdowych, np. przyjmuje się, że jego szerokość określa ryzyko podejmowane podczas inwestycji w dany walor. Rozkład różnic kursów często traktuje się jako charakterystyczny dla danej spółki. Następnie przyjmuje się arbitralnie przyjętą liczbę jako pierwszą wartość ceny kursu teoretycznego i losuje się zmiany cen z otrzymanego w poprzednim kroku rozkładu. Na poniższych równaniach przedstawiono procedurę konstrukcji ciągu wtórnego oznaczonego  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , gdzie  $N$  oznacza ilość notowań – ilość wyrazów ciągu pierwotnego, a 0,5 jest arbitralnie wybraną wartością pierwszego notowania. Liczby  $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$  są to różnice kolejnych notowań wylosowane z rozkładu otrzymanego w poprzednim kroku.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0,5 \\
 x_2 &= 0,5 + t_1 \\
 x_3 &= x_2 + t_2 \\
 &\dots \\
 x_i &= x_{i-1} + t_{i-1} \\
 &\dots \\
 x_N &= x_{N-1} + t_{N-1}
 \end{aligned} \tag{1}$$

W tak uzyskanym ciągu wtórnym zlicza się ilości trendów zdefiniowanych przez następujące po sobie wzrosty kursów, oznaczane symbolem gg, spadki kursów (dd), wzrost poprzedzony spadkiem (dg) oraz spadek poprzedzony wzrostem (gd). Ilości tak zdefiniowanych sekwencji zmian w ciągu wtórnym porównuje się z ich ilością w ciągu pierwotnym, czyli w notowaniach danego waloru. Na tej podstawie możemy wnioskować o jedno-sesyjnych trendach

w zachowaniu się cen akcji. Ciąg wtórny tworzony jest poprzez szereg niezależnych losowań, zatem nie zawiera jedno-sesyjnych korelacji. Jest on natomiast oparty na rozkładzie różnic kursów ciągu pierwotnego. Jeżeli zdefiniowane wyżej sekwencje gg i dd występują częściej w ciągu pierwotnym niż wtórnym to spółka ma tendencję do utrzymywania trendu zmiany cen. W przeciwnym przypadku, pojawia się skłonność do odwracania trendu, po spadku kursu następuje wzrost, a po wzroście – spadek. Jeżeli ilość sekwencji gg i dd jest w granicach błędu statystycznego taka sama dla obu ciągów, to oznacza, że brak jest korelacji jednosesyjnych. Wzrost lub spadek ceny na jednym notowaniu nie wpływa na prawdopodobieństwo wystąpienia wzrostu lub spadku na kolejnym. Procedura została przeprowadzona dla wszystkich spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w okresie od 2000r. do końca 2005r.

## ANALIZA DLA KURSÓW AGORY I ŻYWCA

W celu przesłedzenia zaproponowanej metody badania występowania trendów wybrano dwie spółki: Agorę i Żywiec. Dla pierwszej z nich, spośród 1454 dziennych notowań w okresie od 15 03 2000r. do 31 12 2005r. wybierano trójki kolejnych cen i zliczono przypadki, w których kurs zmieniał się, tzn. nie było dwóch sąsiednich jednakowych wartości. Pozostałe przypadki odrzucano. Spośród tych trójek notowań, które pozostały zliczano ilość wystąpień każdej z czterech możliwości: kolejne wzrosty (gg), kolejne spadki (dd) oraz spadek – wzrost (dg) i wzrost – spadek (gd). Uzyskane wyniki przedstawia tabela.

Tabela 1. Rozkład trendów dla spółki Agora

Agora		
Trend	Ilość trójek	Częstość wystąpień (%)
gg	301	23,26
gd	320	24,73
dg	314	24,27
dd	359	27,74

Źródło: opracowanie własne.

Wynika z niej, że prawdopodobieństwo utrzymania trendu (gg lub dd) jest równe 51%, a prawdopodobieństwo zmiany (gd lub dg) 49%. W dalszym kroku, na podstawie notowań Agory, traktowanych jako ciąg pierwotny konstruujemy ciąg wtórny, tworząc rozkład różnic kolejnych notowań. Z niego losujemy 1454 liczby i kolejno dodajemy do siebie zaczynając od arbitralnie przyjętej wartości początkowej. Otrzymany ciąg fikcyjnych notowań ma taki sam rozkład różnic jak ciąg pierwotny czyli rzeczywistych notowań. Dla ciągu wtórnego rozkład trendów, analogiczny do tego, który otrzymano dla wyżej przedstawia tabela.

Tabela 2. Rozkład trendów w ciągu wtórnym dla spółki Agora

Agora – ciąg wtórny			
Trend	Ilość trójek	Częstość wystąpień (%)	Błąd (%)
gg	307	23,87	1,36
gd	317	24,65	1,38
dg	323	25,12	1,46
dd	339	26,36	1,39

Źródło: opracowanie własne

Procedurę liczenia błędów zaczerpnięto ze standardowych metod stosowanych w fizyce doświadczalnej (Feynman 2005), gdzie korzysta się ze wzoru:

$$\sigma(N_x) = \sqrt{N_x} \quad (2)$$

Gdzie  $N_x$  oznacza ilość występujących rodzajów trendów.

Błąd częstości występowania trendów określonego typu wynosi:

$$\sigma\left(\frac{N_x}{N}\right) = \frac{\sqrt{N_x}}{N} \quad (3)$$

Gdzie  $N$  – ilość trójek notowań, wielkość nie obciążona błędem

Dla rozważanego ciągu wtórnego prawdopodobieństwo utrzymania trendu jest równe  $50,23\% \pm 1,98\%$ , natomiast zmiany trendu  $49,77\% \pm 1,97\%$ . Porównajmy ze sobą na przykład częstości utrzymania trendu w obu ciągach obliczając stosunek:

$$s = \frac{|n_p - n_w|}{\sigma} \quad (4)$$

Gdzie:  $n_p$  jest częstością utrzymania trendu w ciągu pierwotnym, a  $n_w$  w ciągu wtórnym,  $\sigma$  jest błędem.

Jeżeli  $s \leq 1$  to przyjmujemy, że prawdopodobieństwa utrzymania trendu dla ciągów pierwotnego i wtórnego, w granicach błędu, są jednakowe. Jeśli zajdzie nierówność przeciwna, to pojawia się statystycznie istotna różnica pomiędzy tendencjami do utrzymania trendu w ciągu pierwotnym i wtórnym. Dla Agory otrzymujemy następującą wartość:  $s = 0,39$ .

Drugą badaną spółką był Żywiec. Wzięto pod uwagę ten sam okres notowań i uzyskano następujące wyniki. Prawdopodobieństwa utrzymania i zmiany trendu w ciągu pierwotnym były równe odpowiednio:  $44,78\%$  i  $55,22\%$  natomiast w ciągu wtórnym wyniosły:  $49,36\% \pm 2,39\%$  i  $50,64\% \pm 2,42\%$ . Porównanie tendencji utrzymania trendu w ciągach pierwotnym i głównym

proceeds to a value  $s = 1,92$ . The obtained results indicate that in the studied period the Żywiec stock belonged to the group of stocks, in which the maintenance of the trend (upward or downward) occurred significantly less frequently in the primary than in the secondary. This indicates that after an increase in the price, a decrease is more likely to occur, and vice versa - after a decrease, an increase is more likely. This is a situation exactly opposite to that which occurred in the case of Agory, where no clear trend was observed. In other words, changes in the price of the stock in two consecutive days do not allow us to conclude about an increase or decrease in the price in the following day.

## WYNIKI DLA SPÓŁEK GIEŁDOWYCH

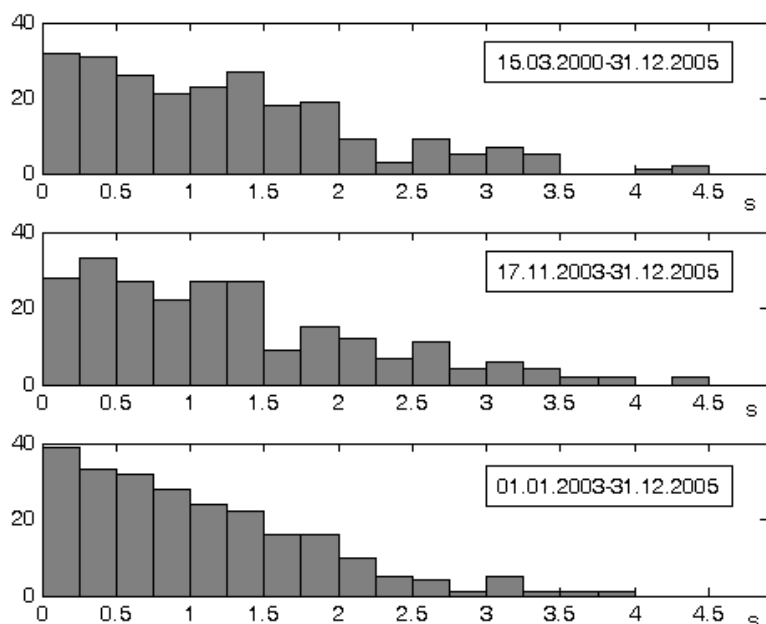
Above, two stocks were presented, whose prices showed opposite trends. Next, in an analogous way, the behavior of all stocks listed on the GPW in Warsaw was studied. For the study, three periods corresponding to different market behaviors were selected, namely: 15 03 2000r. – 31 12 2005r., 17 11 2000r. – 31 12 2005r. and 01 01 2003r. – 31 12 2005r. The WIG index chart with marked periods shows the following picture.



Rysunek 1. Wykres indeksu WIG20 w okresie 1 01 2003 - 31 12 2005r

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z [www.bossa.pl](http://www.bossa.pl)

Pierwszy okres obejmuje zarówno długotrwałą hossę jak i bessę panującą na warszawskiej giełdzie. Początek drugiego okresu pokrywa się z momentem wprowadzenia systemu obrotu WARSET, natomiast okres trzeci obejmuje trzyletnią hossę panującą na polskiej giełdzie i kontynuowaną do początku maja 2006r. Jednak rok bieżący nie jest uwzględniony w badaniach. Uzyskane wyniki przedstawiają histogramy.



Rysunek 2. Rozkłady wartości parametru  $s$  dla spółek notowanych na GPW w Warszawie  
Źródło: opracowanie własne.

Na osi pionowej zaznaczono ilości spółek, a na poziomej wartości współczynnika  $s$ . W pierwszym okresie (15 03 2000r. – 31 12 2005r.) udział spółek, dla których nie zaobserwowano efektu utrzymywania trendu wzrostowego lub spadkowego ( $s \leq 1$ ) wyniósł 46,22%. W kolejnych okresach miał on wartości, odpowiednio: 17 11 2000r. – 31 12 2005r. – 46,64%, 1 01 2003 – 31 12 2005r. - 55,46%. W trzecim okresie, pokrywającym się z hossą na GPW w Warszawie, nastąpił wzrost ilości spółek wykazujących tendencję do utrzymywania trendu. W pozostałych przypadkach większość walorów charakteryzowała się skłonnością do odwracania trendu zmian. Należy zauważyć, że wprowadzenie systemu WARSET (17 11 200r.) nie miało wpływu na uzyskane wyniki.

Warto zwrócić uwagę, że we wszystkich badanych okresach występują walory o bardzo dużej tendencji do utrzymywania trendów zmian, ich współ-



czynniki  $s$  sięgają wartości 4-4,5. Przyjęta metodologia nie rozstrzyga czy mamy do czynienia z utrzymywaniem trendu wzrostowego, czy spadkowego. Z inwestycyjnego punktu widzenia może to nie mieć znaczenia. Przy wzroście zarabia się poprzez zajęcie pozycji długiej, a przy spadkach – krótkiej. Jednak trzeba pamiętać, że na polskiej giełdzie krótka sprzedaż dotyczy jedynie spółek o dużej płynności, co uprzywilejowuje zakup akcji, czyli grę na wzrost. Z drugiej strony histogramy wskazują na stosunkowo dużą ilość spółek o współczynniku  $s$  bliskim zeru, czyli takich, których kolejne wzrosty i spadki rozłożone są przypadkowo.

Zaprezentowane rozważania mają charakter wstępny. W dalszych badaniach autorzy zamierzają zająć się trendami długookresowymi oraz wpływem wartości zmian cen na przyszłe notowania. Interesujące byłoby powtórzenie opisanej procedury dla poszczególnych branż.

## LITERATURA

- R., P. Feynman, (2005) Feynmana wykłady z fizyki, PWN,  
L. Lyons, (1990) Statistics for nuclear and particle physicists, Cambridge University Press.

### **The Analysis of Trends on Warsaw Stock Exchange.**

**Summary:** In this paper the technique of analysis of short term trends which does not use methods of technical analysis was present. The goal of this paper was to investigate whether the increase of price makes that price will more favorable rise during following session. The idea of procedure is the generation of theoretical prices and comparison them with the real ones. The series of theoretical prices was constructed in such a way that they do not contain any correlations. In both cases, theoretical and real prices we observe rising and falling trend. The authors try to answer the question: Are there any significant difference between the numbers of trends for real and theoretical prices? The studies were performed for three ranges of dates covered by years 2000 to 2005.

**Key words:** technical analysis, prices of stock, rising trend, falling trend

Krzysztof Karpio<sup>1</sup>, Piotr Łukasiewicz<sup>1</sup>, Arkadiusz Orłowski<sup>1,2</sup>  
<sup>1</sup>Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW, <sup>2</sup>Instytut Fizyki PAN  
e-mail: karpio@mors.sggw.waw.pl, plukasiewicz@mors.sggw.waw.pl  
orlow@ifpan.edu.pl

## ZMIANY W SPOŻYCIU W KRAJACH EUROPEJSKICH ANALIZA TAKSONOMICZNA

**Streszczenie:** przeprowadzono badanie, którego celem było wykrycie zmian w spożyciu żywności w grupie 37 krajów europejskich. Wykorzystano dane *FAO* z lat 1993 i 2003 dotyczące spożycia produktów w 14 podstawowych grupach żywnościowych. Do klasyfikacji państw zastosowano aglomeracyjną metodę Warda. W odróżnieniu od innych podobnych badań, analizę taksonomiczną przeprowadzono na wspólnym zbiorze obiektów klasyfikacji dla badanych lat. Badanie wykazało istnienie trwałych wzorców konsumpcji w większości krajów europejskich.

**Słowa kluczowe:** konsumpcja żywności, analiza skupień.

### WSTĘP

Zagadnienia spożycia żywności i zmian w strukturze konsumpcji w krajach europejskich są szeroko dyskutowane w literaturze polskiej. Borkowski i in. [2003] badają spożycie żywności w 25 krajach Unii Europejskiej oraz analizują tendencje zmian profilu konsumpcji w latach 1993-2001. Stosując gradacyjną analizę odpowiedności i skupień autorzy dokonali podziału badanych krajów na trzy jednorodne grupy, które „ukazują regionalne zróżnicowanie struktury spożycia uwarunkowane przede wszystkim warunkami klimatycznymi i nawykami kulinarnymi”. Badania pokazały również dość stabilny profil konsumpcji w wyróżnionych grupach w badanym okresie. Borkowski i in. [2004] wskazują na duże różnice między nowymi, a starymi krajami Unii Europejskiej. Autorzy wykazują, że w takich krajach jak Polska, Czechy, Słowacja, czy Węgry współczynniki dochodowej elastyczności konsumpcji są na wysokim poziomie, który zbliżony jest do poziomu z lat 1970-80 dla krajów Unii Europejskiej. W kolejnej pracy Dudek i in. [2006] stosują aglomeracyjne metody analizy skupień do wyodrębnienia grup krajów charakteryzujących się podobnym profilem konsumpcji. Bazując na danych *FAO* z 2000 roku dla 39 krajów europejskich autorzy wyodrębnili sześć skupień krajów o podobnej strukturze spożycia. Analogiczne badanie przeprowadzone na danych z 1993 roku pokazało, że w okresie 1993-2003 nie nastąpiły większe zmiany w rozmieszczeniu krajów między skupieniami. Wynik wskazuje na istnienie trwałych wzorców konsumpcji.

W niniejszej pracy proponujemy nieco inne podejście do problemu klasyfikacji krajów i badania zróżnicowania spożycia. Wykorzystujemy najnowsze dane *FAO* z 2003 roku oraz dane historyczne z roku 1993 i konstruujemy jeden zbiór obiektów klasyfikacji w postaci połączonych zbiorów państw z obu okresów. Na tak utworzonym zbiorze obiektów dokonujemy grupowania wykorzystując aglomeracyjną metodę Warda.

Interesować nas będą przede wszystkim zmiany zróżnicowania spożycia w pojedynczych krajach jakie miały miejsce na przestrzeni 11 lat. Szukamy odpowiedzi na trzy następujące pytania:

- Czy w roku 2003 spożycie w danym kraju jest bardzo podobne do tego z roku 1993?
- Jak duży jest stopień tego podobieństwa?
- Czy wzorzec konsumpcji uległ zmianie i w 2003 roku jest podobny do wzorca charakterystycznego dla innych krajów?

## DANE EMPIRYCZNE I METODA BADAWCZA

Badanie oparto na danych *FAO* (*Food and Agriculture Organization of the United Nations*) z lat 1993 i 2003 dotyczących spożycia produktów żywnościowych zaklasyfikowanych do 14 podanych niżej grup. Dane odnoszą się do 37 krajów europejskich (patrz rysunek 1) w dwóch okresach czasu i dotyczą spożycia produktów (w kg na osobę) w następujących kategoriach:

- $x_1$  – produkty zbożowe (bez piwa),
- $x_2$  – oleje zwierzęce,
- $x_3$  – owoce i przetwory (bez wina),
- $x_4$  – ryby i owoce morza,
- $x_5$  – jaja,
- $x_6$  – ziemniaki,
- $x_7$  – podroby,
- $x_8$  – mleko i produkty mleczne (bez masła),
- $x_9$  – mięso,
- $x_{10}$  – cukier i słodziki,
- $x_{11}$  – używki (kawa, herbata),
- $x_{12}$  – rośliny strączkowe,
- $x_{13}$  – warzywa,
- $x_{14}$  – oleje roślinne.

Podstawowe informacje o zmiennych  $x_1, x_2, \dots, x_{14}$  zamieszczone zostały w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości podstawowych miar statystycznych dla rozpatrywanych zmiennych.

Miara	Zmienna													
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$
<i>min</i>	74,0	0,7	26,3	0,7	3,6	15,4	0,8	102,0	16,4	15,2	0,0	0,0	38,3	2,6
<i>max</i>	234,1	28,0	182,1	92,0	20,7	180,0	12,4	377,8	122,0	61,4	14,4	8,8	275,7	28,1
$\bar{x}$	133,1	11,9	87,5	20,8	11,1	83,7	4,1	217,9	70,9	39,3	6,4	2,8	107,3	13,2
<i>s</i>	32,8	6,6	35,7	19,1	3,3	35,7	2,1	66,6	23,3	10,9	4,1	2,0	44,3	5,9
<i>V</i>	0,25	0,56	0,41	0,92	0,30	0,43	0,53	0,31	0,33	0,28	0,65	0,74	0,42	0,45
$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna, <i>s</i> – odchylenie standardowe, <i>V</i> – klasyczny współczynnik zmienności														

Źródło: obliczenia własne.

Jak już wspomniano wcześniej klasyfikacja dotyczyła 37 krajów europejskich, z których każdy scharakteryzowany został za pomocą 14 cech, będących wartościami wymienionych wyżej zmiennych  $x_1, x_2, \dots, x_{14}$ . Ponieważ dane o spożyciu dotyczyły dwóch okresów, roku 1993 oraz roku 2003, ostateczny zbiór  $\Omega$  obiektów klasyfikacji liczył 74 elementy. Zbiór  $\Omega$  można formalnie zapisać w postaci  $\Omega = \{k_1^{93}, k_2^{93}, \dots, k_{37}^{93}\} \cup \{k_1^{03}, k_2^{03}, \dots, k_{37}^{03}\}$ , gdzie  $k_j^{93}$  oznacza spożycie w danym kraju z roku 1993, a  $k_j^{03}$  analogiczne dane z roku 2003 ( $j = 1, 2, \dots, 37$ ).

W analizie wielowymiarowej rzeczą ważną jest ujednoczenie poziomu zmienności lub zakresu zmienności cech. Zmienne przyjmujące duże wartości mają znacznie większy wpływ na odległość między obiektami niż zmienne o mniejszych wartościach. W niektórych przypadkach cechy o względnie małych wartościach mogą w ogóle nie mieć wpływu na klasyfikację obiektów. Transformacja zmiennych powoduje więc, że wszystkie cechy stają się w tym samym stopniu „ważne”. W niniejszym badaniu zastosowano dwie metody transformacji zmiennych. Pierwsza to standaryzacja, która powoduje, że średnia każdej cechy jest równa zero, a odchylenie standardowe równe jeden. Druga metoda, unitaryzacja, przeskalowuje wartości każdej cechy do przedziału  $[0; 1]$ , przy czym zero odpowiada minimalnej, a jeden maksymalnej wartości danej cechy [Ostasiewicz 1999, Sobczak i in. 1985].

W niniejszej pracy do klasyfikacji obiektów zastosowano hierarchiczną aglomeracyjną metodę Warda, która wykorzystana była również przez Dudek i in. [2006]. Dystans pomiędzy obiektami mierzony był za pomocą metryki euklidesowej. Badania Dudek pokazały, że spośród sześciu rozpatrywanych metod aglomeracyjnych, różniących się sposobem pomiaru odległości między skupieniami, jedynie metoda Warda dawała w wyniku stosunkowo niewielką liczbę jednorodnych skupień. Aglomeracyjne metody taksonomiczne oraz algorytm grupowania hierarchicznego opisane są szczegółowo np. w pracy Ostasiewicza

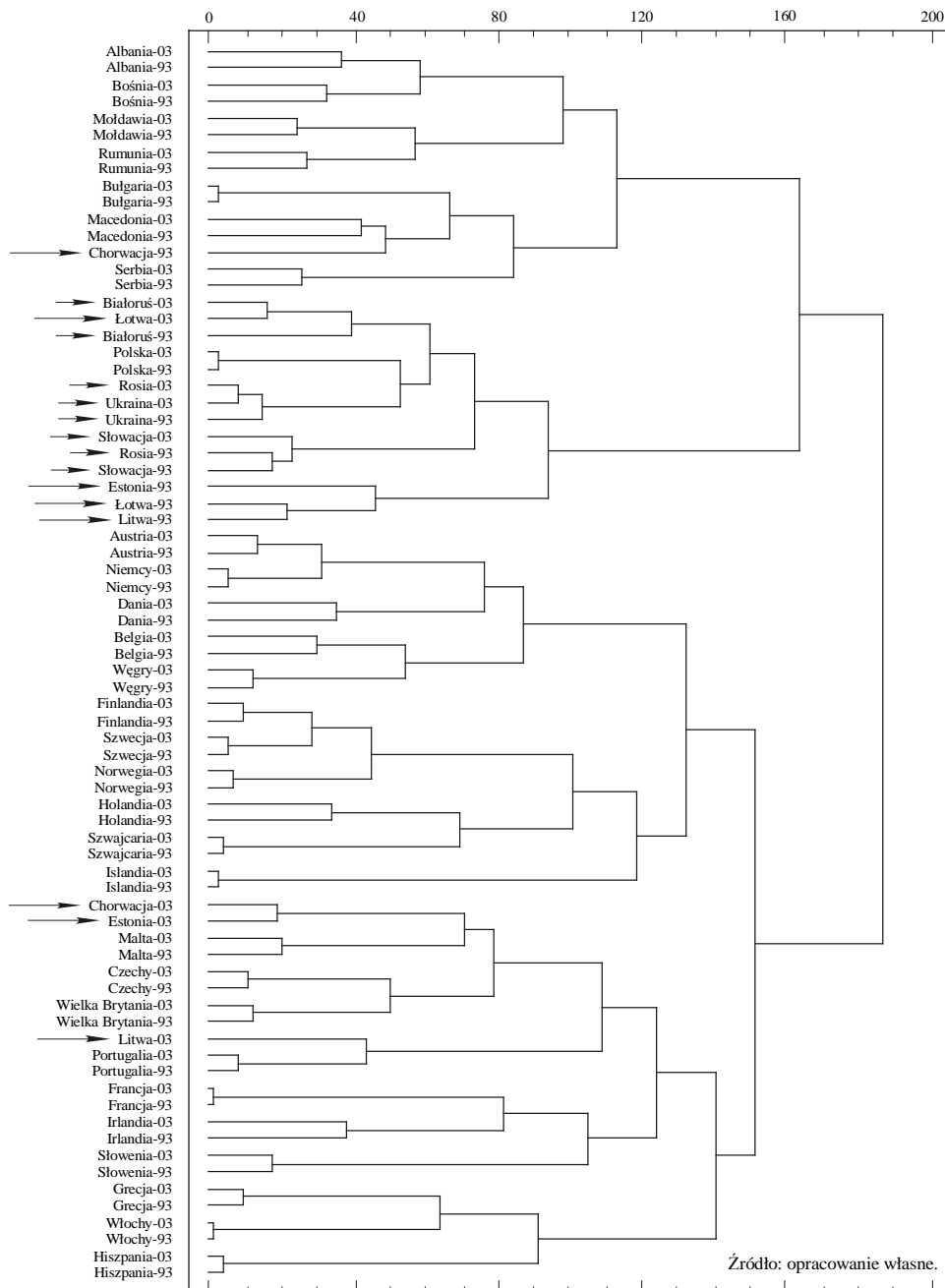
[1999]. Wspomniemy tutaj jedynie, że w przypadku metod aglomeracyjnych proces klasyfikacji  $n$  obiektów rozpoczyna się od utworzenia  $n$  jednoelementowych skupień, które w kolejnych  $n - 1$  krokach łączone są w następne skupienia, aż do uzyskania jednego skupienia zawierającego wszystkie obiekty. Rezultat grupowania można przedstawić za pomocą grafu lub drzewa hierarchicznego (dendrogramu).

## WYNIKI BADANIA

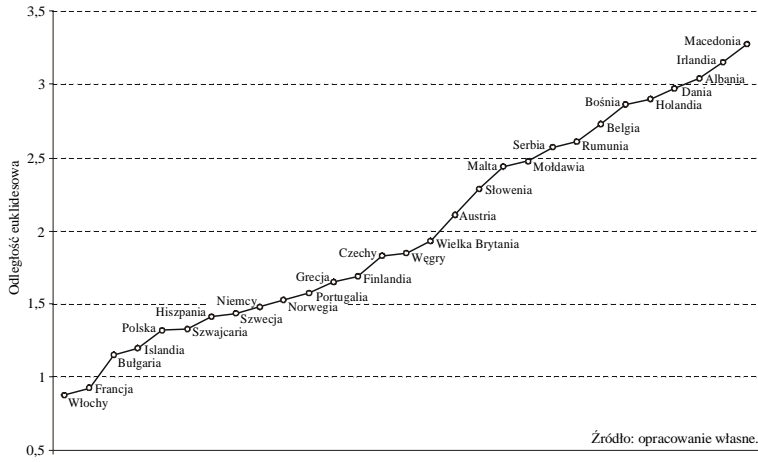
Wyniki grupowania przy zastosowaniu standaryzacji oraz unitaryzacji cech okazały się prawie identyczne. W tej części przedstawiamy wyniki uzyskane po uprzedniej standaryzacji cech natomiast różnice omawiamy w podsumowaniu. Rysunek 1 przedstawia dendrogram ukazujący kolejne etapy klasyfikacji 74 obiektów metodą Warda. Analiza dendrogramu wskazuje, że można wyróżnić trzy następujące grupy krajów:

*Grupa A:* 29 krajów, w których na przestrzeni 11 lat nie dokonały się większe zmiany w konsumpcji żywności. Są to więc kraje charakteryzujące się trwałymi wzorcami konsumpcji. Na drzewie hierarchicznym są to obiekty  $k_j^{93}$  i  $k_j^{03}$ , które sklasyfikowane zostały w pary (np. Albania 93 – Albania 03). W *Grupie A* można wyróżnić dwie podgrupy:

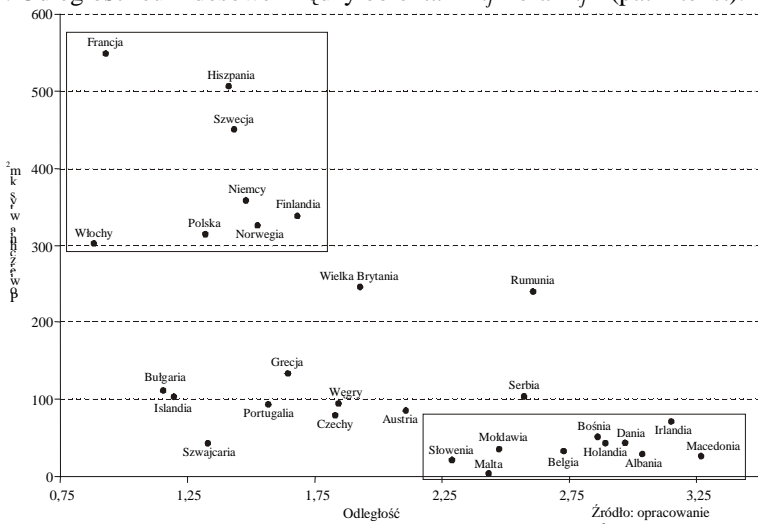
- 1) wszystkie stare kraje Unii Europejskiej oraz
- 2) nowopowstałe kraje: Mołdawię, Czechy oraz grupę krajów byłej Jugosławii: Bośnię i Hercegowinę, Macedonię, Serbię i Czarnogórę oraz Słowenię. W celu dokładniejszego zbadania zróżnicowania tej grupy krajów, dla każdej pary ( $k_j^{93}$ ,  $k_j^{03}$ ) wyznaczono odległości euklidesowe między obiektami  $k_j^{93}$  i  $k_j^{03}$ . Odległości te przedstawiono na rysunku 2. Najmniejsze odległości, świadczące o bardzo trwałych wzorcach konsumpcji, charakteryzują kraje o ugruntowanej i znanej kuchni (Włochy, Francję) oraz kraje o kuchni specyficznej (charakterystycznej): Islandię, Polskę, Bułgarię. Nieco większe odległości obserwujemy dla innych krajów śródziemnomorskich: Hiszpanii, Portugalii i Grecji, krajów skandynawskich: Szwecji, Norwegii i Finlandii oraz Szwajcarii i Niemiec. Największe odległości charakteryzują „młode” kraje: Słowenię, Mołdawię, Serbię i Czarnogórę, Bośnię i Hercegowinę, Macedonię oraz małe kraje będące pod wpływem dużych sąsiadów: Belgię, Holandię, Danię i Irlandię. Na rysunku 3 pokazany został związek pomiędzy wyznaczonymi odległościami, a powierzchnią państw. Kraje o większej powierzchni charakteryzują się trwałymi i silnymi wzorcami konsumpcji. Trwałe, ale słabsze wzorce konsumpcji charakteryzują przede wszystkim nowe państwa europejskie o małej powierzchni.



Rysunek 1. Kolejne etapy grupowania 74 krajów metodą Warda (cechy standaryzowane). Krótką strzałką oznaczono kraje, których spożycie uległo niewielkim zmianom, natomiast długą strzałką wskazano kraje o znacznych zmianach w spożyciu.



Rysunek 2. Odległości euklidesowe między obiektami  $k_j^{93}$  oraz  $k_j^{03}$  (patrz tekst).



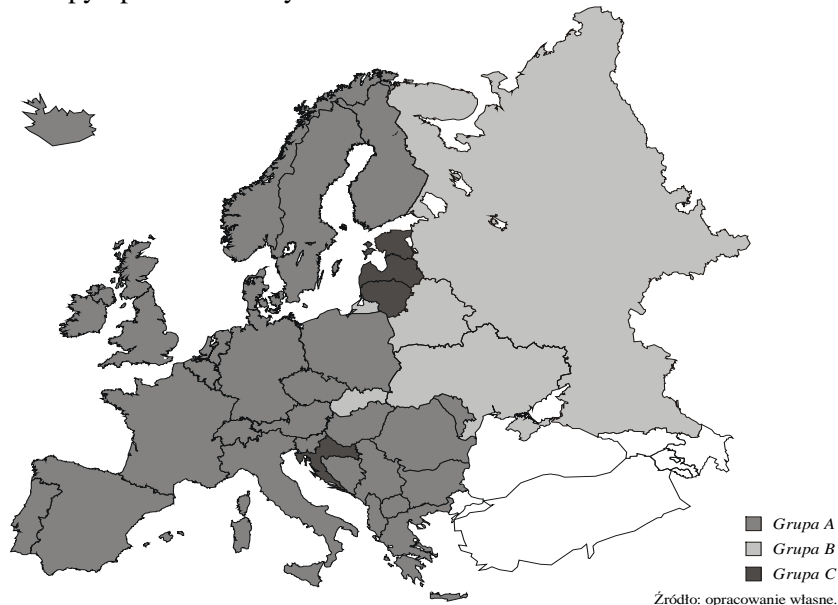
Rysunek 3. Państwa o trwałych wzorcach konsumpcji. Oś pionowa: powierzchnia państwa, oś pozioma: zmiana spożycia każdego z krajów w okresie 1993 – 2003 jako odległość euklidesowa w metodzie Warda (patrz tekst).

*Grupa B:* kraje, których spożycie uległo pewnym zmianom, ale zmiany te są niewielkie. Są to nowopowstałe państwa: Białoruś, Rosja, Ukraina i Słowacja. Na rysunku 1 kraje te wskazano za pomocą krótkich strzałek. W przypadku Białorusi, Ukrainy i Słowacji zmiany w spożyciu są nieznaczne. Nieco większe różnice obserwujemy w przypadku Rosji. W 1993 roku pod względem spożycia Rosja była zbliżona do Słowacji, w 2003 roku jest najbardziej podobna do Ukrainy.

*Grupa C:* kraje, których spożycie w okresie 1993-2003 uległo dużym zmianom. Są to Chorwacja oraz nowe kraje nadbałtyckie – Estonia, Łotwa i Litwa.

Na rysunku 1 kraje te oznaczono je za pomocą długich strzałek. Estonia, Łotwa i Litwa to nowi członkowie Unii Europejskiej i jednocześnie kraje o najprężniej rozwijających się gospodarkach w Europie. Szybkim zmianom gospodarczym towarzyszą więc duże zmiany w konsumpcji żywności. W 1993 roku spożycia w tych krajach były zbliżone do siebie (trójelementowe skupienie na rysunku 1). W przypadku Chorwacji w 1993 roku profil spożycia był podobny do profili Macedonii, Bułgarii oraz Serbii. W okresie 1993-2003 największe zmiany nastąpiły w Estonii i w Chorwacji (pod względem spożycia w 2003 roku kraje te były podobne do Malty) oraz na Litwie (w 2003 roku podobnej do Portugalii). Na Łotwie profil spożycia w 2003 roku stał się podobny do Białorusi.

Poszczególne kraje z wyróżnionych *Grup A, B i C* zaznaczone zostały na mapie Europy i pokazane na rysunku 4.



Rysunek 4. Podział krajów na trzy grupy w zależności od wielkości zmian w spożyciu na przestrzeni lat 1993-2003. *Grupa A*: stabilny wzorzec konsumpcji, *Grupa B*: niewielkie zmiany na tle innych państw, *Grupa C*: znaczne zmiany w spożyciu.

## WNIOSKI KOŃCOWE

1. W przypadku większości starych krajów europejskich obserwujemy trwałe i silne wzorce konsumpcji. Kraje duże, tj. Francja, Hiszpania, Szwecja, Niemcy, Polska i in. charakteryzują się najtrwalszymi wzorcami konsumpcji żywności. Mniejsze kraje, tj. Belgia, Holandia, Dania, Albania cechują trwałe, ale słabsze wzorce.



2. Wśród nowych państw europejskich (wykluczając Czechy) można wyróżnić trzy grupy. Chorwacja, Estonia, Łotwa i Litwa charakteryzują się dużymi i wyraźnymi zmianami w spożyciu, Białoruś, Rosję, Ukrainę i Słowację cechują niewielkie zmiany, natomiast Słowacja, Mołdawia, Serbia i Czarnogóra, Bośnia i Hercegowina oraz Macedonia charakteryzują się trwałymi, ale słabszymi niż w przypadku starych krajów wzorcami konsumpcji.
3. Transformacja cech za pomocą unitaryzacji nie zmienia w istotny sposób struktury taksonomicznej. Różnice dotyczyły jedynie trzech państw: Bośni, Białorusi i Łotwy. Podział na grupy przedstawiał się następująco: *Grupa B* – Bośnia i Hercegowina, Łotwa, Słowacja, Rosja, Ukraina, *Grupa C* – Chorwacja, Estonia, Litwa, *Grupa A* – pozostałe kraje.

## LITERATURA

- Borkowski B., Dudek H., Szczesny W. (2003) Regionalne zróżnicowanie poziomu i profilu konsumpcji w krajach europejskich, Roczniki Nauk Rolniczych, Seria G, Tom 90, Zeszyt 2, str. 7 – 16
- Borkowski B., Dudek H., Szczesny W. (2004) Elastyczność dochodowa popytu na dobra konsumpcyjne w krajach OECD, Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych – IV, Wyd. SGGW, str. 42-50
- Dudek H., Orłowski A. (2006) Clustering of European countries with respect to food consumption, XXII Konferencja Wielowymiarowa Analiza Statystyczna, Łódź (w druku)
- Ostasiewicz W. (1999) Statystyczne metody analizy danych, Wyd. AE we Wrocławiu, Wrocław
- Sobczak W., Malina W. (1985) Metody selekcji i redukcji informacji, WNT, Warszawa
- Food and Agriculture Organization of the United Nations, <http://www.fao.org/>

### **Changes in consumption in european countires – taxonomical analysis**

**Summary:** The studies were carried out to discover changes in profile of consumption for 37 European countries. Data of FAO for years 1993 and 2003, containing consumption of products in 14 basic group of food were used. The classification was made using the Ward method. The taxonomical analysis was performed on the one set of objects, for years 1993 and 2003 merged together as opposite to other similar studies. The analysis showed the existence in majority of European countries the stable patterns of consumption.

**Key words:** food consumption, cluster analysis.

Andrzej Karpio<sup>1</sup>, Dorota Żebrowska-Suchodolska<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW

<sup>2</sup> Wyższa Szkoła Finansów i Zarządzania w Białymstoku

e-mail: andrzej\_karpio@sggw.pl, zdorota@o2.pl

## RYZIKO SYSTEMATYCZNE SPÓŁEK Z INDEKSU WIG20 A KONIUNKTURA GIEŁDOWA

**Streszczenie:** W prezentowanej pracy autorzy starają się odpowiedzieć na pytanie: Czy statystyczne własności estymatorów parametrów modelu jednowskaźnikowego zależą od trendów na giełdzie? W tym celu podzielono okres pięciu lat na dwa podokresy. Następnie zbudowano model jednowskaźnikowy dla każdego z nich estymując parametry strukturalne klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. Przeprowadzono również statystyczną weryfikację modeli. W końcowej części dokonano rozkładu ryzyka akcji na dwie składowe: systematyczną i specyficzną oraz przeanalizowane je dla różnej koniunktury giełdowej. Przedmiotem rozważań są spółki z indeksu WIG20.

**Słowa kluczowe:** model jednowskaźnikowy, współczynnik beta, ryzyko, ryzyko systematyczne, ryzyko specyficzne.

### WSTĘP

Model jednowskaźnikowy jest dobrze znanym sposobem opisu zachowania się procentowych zmian cen spółek giełdowych. Jego niewątpliwą zaletą jest prostota. Niestety, jednak posiada on również słabe strony. Jedną z nich są często występujące negatywne wyniki weryfikacji modelu, co nawiasem mówiąc, doprowadziło do powstania bardziej wyrafinowanych niż KMNK metod estymacji parametrów [Brzeszczański i in. 2002]. W niniejszej pracy postanowiono odpowiedzieć na pytanie: Czy własności statystyczne estymatorów parametrów strukturalnych modelu jednowskaźnikowego zależą od koniunktury giełdowej? W tym celu podzielono okres od 7 lipca 2000r. do 30 września 2005r. na dwa podokresy, charakteryzujące się tendencją spadkową i wzrostową polskiego rynku akcji. Następnie zbudowano model dla obu okresów i porównano wyniki weryfikacji modelu. Należy dodać, że z punktu widzenia inwestycyjnego, model jednowskaźnikowy pozwala dokonać rozkładu ryzyka całkowitego, mierzonego odchyleniem standardowym stóp zwrotu, na część systematyczną i specyficzną. Pierwszy składnik opisuje korelację z rynkiem, którego zachowanie mierzone jest wybranym indeksem giełdowym, w niniejszej pracy jest nim WIG20. Jego znajomość jest podstawą doboru akcji do portfela inwestycyjnego i ma istotny wpływ na osiągane stopy zwrotu, bowiem w portfelu wieloskładnikowym znaczenie ryzyka specyficznego szybko maleje do zera. Między innymi z tych

powodów znajomość współczynników beta, poparta pewnością że mają one dobre własności statystyczne, jest podstawą podejmowania decyzji inwestycyjnych przez instytucjonalnych uczestników rynku akcji. Dlatego znajomość odpowiedzi na postawione wcześniej pytanie wydaje się autorom wystarczająco ważnym powodem bliższego przyjrzenia się sprawdzalności modelu jednowskaźnikowego, z punktu widzenia własności statystycznych współczynnika beta estymowanego klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, bez uciekania się do bardziej zaawansowanych technik.

## UWAGI O MODELU JEDNOWSKAŹNIKOWYM

Punktem wyjściowym rozważań prowadzonych w dalszej części pracy jest model jednowskaźnikowy Sharpe'a. Podstawowym równaniem jest związek pomiędzy procentowymi zmianami cen akcji i indeksu giełdowego. Przyjmuje się, że ma on postać równania regresji liniowej:

$$r_{At} = \alpha_A + \beta_A r_{Mt} + \varepsilon_{At} \quad (2.1)$$

gdzie wskaźnik  $A$  numeruje rozważane walory rynkowe,  $r_{At}$  jest procentową zmianą jego ceny w chwili  $t$ ,  $r_{Mt}$  - jest procentową zmianą indeksu giełdowego, a  $\varepsilon_t$  - składnikiem losowym. W praktyce, dysponując próbą można zapisać analogiczne równanie, a estymatory parametrów oznaczyć tymi samymi symbolami, ale z daszkami. Mamy więc odpowiednio:  $\hat{\alpha}_A$ ,  $\hat{\beta}_A$  i  $e_{At}$  - reszta. Estymatory znajduje się korzystając z klasycznej metody najmniejszych kwadratów [Welfe, 2003]. Jedną z korzyści wynikających z modelu jednowskaźnikowego jest rozkład wariancji procentowych zmian akcji na dwa składniki zadane równaniem:

$$\hat{\sigma}_A^2 = \hat{\beta}_A^2 \sigma_M^2 + \hat{\sigma}_{Ae}^2 \quad (2.2)$$

gdzie  $\sigma_M^2$  oznacza wariancję stopy zwrotu indeksu rynku,  $\hat{\sigma}_{Ae}^2$  - estymator wariancji składnika losowego,  $\hat{\beta}_A$  - estymowaną wartość parametru  $\beta_A$ . Wzór ten wskazuje, iż ryzyko całkowite akcji  $\hat{\sigma}_A^2$  jest sumą dwóch składników: ryzyka systematycznego (niedywersyfikowalnego)  $\hat{\beta}_A^2 \sigma_M^2$  i ryzyka specyficznego (dywersyfikowalnego)  $\hat{\sigma}_{Ae}^2$ . Ryzyko systematyczne mierzone jest współczynnikiem  $\hat{\beta}_A$ , gdyż drugi czynnik, wariancja indeksu giełdowego, jest taki sam dla wszystkich walorów. W przypadku, gdy współczynnik beta jest mniejszy od jedności, ryzyko systematyczne inwestycji w ten papier wartościowy jest mniejsze od ryzyka rynkowego mierzonego wariancją indeksu. Wówczas akcje nazywa się defensywnymi. Natomiast, gdy współczynnik  $\beta_A$  jest większy od jedności, ryzyko

systematyczne inwestycji jest większe od ryzyka rynkowego, a papier taki jest papierem agresywnym. Należy pamiętać, że w modelu jednowskaźnikowym ryzyko specyficzne, którego miarą jest  $\hat{\sigma}_{Ae}^2$ , może być bardzo duże, co w standardowej analizie regresji mogłoby zdyskwalifikować model, ze względu na bardzo małą wartość współczynnika determinacji. Jednak celem omawianego modelu jest wydzielenie, spośród wszystkich czynników mających wpływ na zmianę cen akcji, jedynie koniunktury giełdowej mierzonej zmianami indeksu. Dlatego duży udział ryzyka specyficznego w ryzyku całkowitym nie ma znaczenia dla jakości budowanego modelu ekonometrycznego. Ponadto, przy budowaniu portfela złożonego z dużej ilości akcji, ryzyko specyficzne dąży do zera [Elton i in. 1998]. W praktyce portfel złożony z kilkunastu akcji jest praktycznie pozbawiony ryzyka specyficznego. Jednak trzeba pamiętać, że model jednowskaźnikowy buduje się w celu podejmowania decyzji inwestycyjnych mających przynieść zysk w przyszłości. Z tego powodu statystyczne własności estymowanych parametrów, wykorzystywane do prognozowania zmian cen akcji, nie są bez znaczenia dla inwestorów i dlatego pojawia się pytanie postawione we wstępie niniejszej pracy. Nie jest to jedyne zagadnienie, które należy rozważyć. Z innych można wymienić horyzont czasowy, w jakim należy estymować współczynniki beta, jednak odpowiedź na to pytanie wykracza poza ramy prezentowanych rozważań.

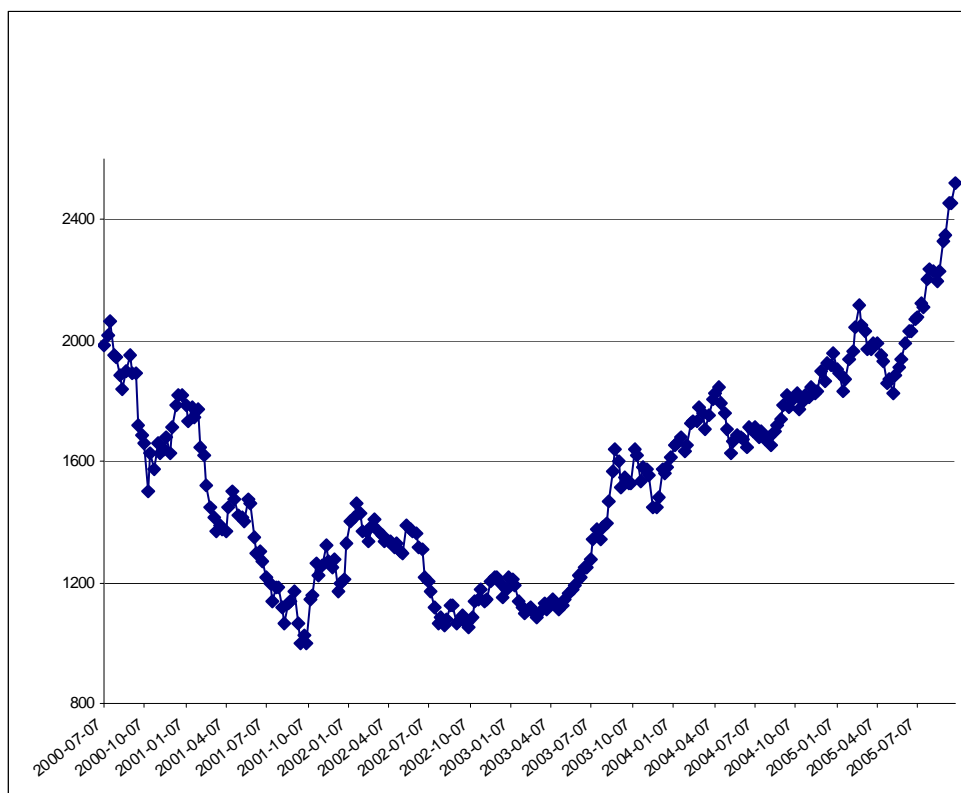
## WERYFIKACJA MODELU JEDNOWSKAŹNIKOWEGO

Przedmiotem rozważań było 17 spółek wchodzących w skład indeksu WIG 20 w okresie od 7 lipca 2000r. do 30 września 2005r. Podana liczba walorów wynika z tego, iż wszystkie te spółki wchodziły w skład indeksu przez cały pięcioletni okres. W rozważanym okresie dla każdego z nich zostały wzięte pod uwagę tygodniowe (od piątku do piątku) stopy zmian cen spółek obliczone według wzoru:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (3.1)$$

gdzie  $P_t$  - cena akcji w okresie  $t$ .

W analizowanym okresie można zaobserwować dużą zmienność zachowań się rynku, co widać na wykresie indeksu.



Rysunek. 1. Piątkowe ceny zamknięcia WIG20 w okresie od 7 lipca 2000r. do 30 września 2005r. Źródło: opracowanie własne

Od początku branego pod uwagę okresu indeks powoli spadał aż do osiągnięcia minimum 5 października 2001r. Od tego momentu nastąpiła nieznaczna poprawa sytuacji, co jednak było bardzo krótkotrwałe, bowiem w II półroczu 2002r. wystąpiła kolejna tendencja spadkowa. Następnie od marca 2003r. aż do końca rozpatrywanego okresu można zauważyć szybki wzrost indeksu. Dlatego, w dalszych rozważaniach datą rozgraniczająca tendencję spadkową od wzrostowej będzie 7 marzec 2003r.

Estymatory parametrów strukturalnych linii regresji uzyskano klasyczną metodą najmniejszych kwadratów (KMNK). Wyniki podaje poniższa tabela.

Tabela 1. Wyniki estymacji parametrów strukturalnych dla całego okresu i obu podokresów.

spółka	$\alpha_A$	$\beta_A$	$\alpha_A$		$\beta_A$	
	cały okres	cały okres	I	II	I	II
AGORA	-0,193	1,106	0,096	-0,073	1,445	0,804
BPHPBK	0,384	0,818	0,413	0,103	0,632	1,046
BRE	0,038	0,854	0,439	0,105	0,862	0,895
BZWBK	0,371	0,852	0,480	-0,246	0,622	1,132
COMPLAND	-0,098	0,998	0,482	-0,454	0,981	0,970
DĘBICA	0,212	0,332	0,013	-0,055	0,406	0,322
KĘTY	0,287	0,404	-0,138	0,286	0,450	0,647
KGHM	0,135	1,129	-0,379	0,285	1,138	1,314
NETIA	-0,802	1,526	-3,544	0,039	1,468	0,748
ORBIS	-0,011	0,817	-0,480	-0,020	0,797	0,848
PEKAO	0,399	0,875	0,935	-0,142	0,651	1,105
PKNORLEN	0,381	0,906	0,588	0,422	0,962	1,041
POLIMEXMS	0,592	0,412	-0,574	1,850	0,423	0,355
PROKOM	-0,231	1,177	-0,133	-0,620	1,192	1,093
SOFTBANK	-0,344	1,375	-0,982	0,178	1,363	0,917
ŚWIECIE	0,287	0,399	0,373	-0,559	0,275	0,822
TPSA	-0,114	1,218	-0,379	0,017	1,033	0,973

Zródło: opracowanie własne

W wyniku estymacji parametru beta można wyróżnić spółki, których współczynniki beta należą do przedziału od zera do jedności. Wymienić tu można: Dębicę, Świecie, Kęty, Polimexms, Orbis, BPHPBK, BZWBK, BRE, Pekao, PKNORLEN, oraz Compland. Można więc stwierdzić, iż stopy zwrotu tych akcji w niewielkim stopniu reagują na zmiany rynku. W przypadku jednak spółek Orbis, BPHPBK, BZWBK, BRE, Pekao, PKNORLEN, czy Compland mimo, iż współczynniki beta mieszczą się w rozpatrywanym przedziale, to otrzymane wyniki są bardzo bliskie górnej granicy tego przedziału. Trudno więc jednoznacznie określić defensywność czy agresywność tych spółek. Zmniejszenie bądź zwiększenie okresu badań może bowiem spowodować zmianę rodzaju akcji z defensywnej na agresywną. Wśród badanych spółek można też znaleźć spółki agresywne. Należą do nich: Agora, KGHM, Prokom, TPSA, Softbank i Netia. Współczynniki beta tych spółek są większe od jedności.

Tabela 2. Wyniki weryfikacji modelu jednowskaźnikowego dla całego okresu.

spółka	test Ljunga-Boxa		test White'a		test serii		test lambda-Kołmogorowa	
	st.	p	st.	p	st.	p	st.	p
AGORA	0,489	0,484	<u>16,234</u>	<u>0,000</u>	1,031	0,303	0,894	0,401
BPHPBK	0,656	0,418	<u>5,890</u>	<u>0,053</u>	0,424	0,671	0,880	0,421
BRE	0,456	0,499	3,545	0,170	1,516	0,130	0,528	0,943
BZWBK	1,499	0,221	0,628	0,730	0,243	0,808	0,816	0,519
COMPLAND	0,043	0,836	2,655	0,265	0,182	0,856	0,750	0,627
DĘBICA	3,054	0,081	0,408	0,816	1,031	0,303	1,164	0,133
KĘTY	0,764	0,382	3,993	0,136	0,061	0,952	0,946	0,333
KGHM	0,036	0,849	<u>16,246</u>	<u>0,000</u>	0,546	0,585	1,005	0,264
NETIA	0,431	0,511	1,678	0,432	0,303	0,762	<u>2,959</u>	<u>0,000</u>
ORBIS	0,637	0,425	3,187	0,203	1,273	0,203	0,774	0,587
PEKAO	4,550	<u>0,033</u>	<u>5,105</u>	<u>0,078</u>	0,182	0,856	0,866	0,442
PKNORLEN	<u>7,528</u>	<u>0,006</u>	0,285	0,867	0,788	0,431	0,873	0,431
POLIMEXMS	0,030	0,862	1,228	0,541	1,031	0,303	<u>2,280</u>	<u>0,000</u>
PROKOM	0,152	0,697	1,053	0,591	0,061	0,952	1,011	0,258
SOFTBANK	1,091	0,296	<u>5,881</u>	<u>0,053</u>	0,546	0,585	0,960	0,315
ŚWIECIE	0,142	0,706	0,101	0,951	0,424	0,671	<u>2,049</u>	<u>0,000</u>
TPSA	1,521	0,218	<u>28,797</u>	<u>0,000</u>	0,788	0,431	0,916	0,371

Źródło: opracowanie własne

Dokonano również weryfikacji modelu, badając autokorelację [Osińska, 2005], homoskedastyczność [Kufel, 2004], normalność [Chmielewski i in., 2003] i losowość reszt [Osińska, 2005] z wykorzystaniem oprogramowania Excel, Gretl, Statistica oraz SPSS. Jednorodność wariancji składnika losowego została zbadana testem White'a, w którym hipoteza zerowa zakłada występowanie homoskedastyczności, wobec hipotezy alternatywnej o heteroskedastyczności reszt. W przypadku testu Ljunga-Boxa hipotezą zerową jest brak autokorelacji I rzędu składnika losowego, przy hipotezie alternatywnej o istnieniu autokorelacji. Test serii służy do weryfikacji hipotezy zerowej o losowym charakterze reszt, wobec hipotezy alternatywnej o braku losowości. W przypadku zaś testu normalności reszt hipoteza zerowa zakłada, iż reszty mają rozkład normalny przy hipotezie alternatywnej o braku rozkładu normalnego reszt. Wyniki testów zostały przedstawione w tabeli 2, gdzie przypadki odrzucenia hipotezy zerowej oznaczono kursywą. Otrzymane w tabeli wyniki pokazują, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o losowości reszt. Jedynie dla spółek Pekao i Pknorlen pojawiła się autokorelacja. W kilku również przypadkach dla rozpatrywanego okresu występuje heteroskedastyczność, co może wpływać na ewentualną poprawność otrzymanych wyników. W przypadku zaś badania rozkładu normalnego charakteru reszt

zastosowanie różnych testów dało inne rezultaty, o czym może świadczyć bardziej silny charakter testów Jarque-Bera, Kołmogorowa-Lilleforsa, czy Shapiro-Wilka. Być może w przypadku tych testów powodem jest również zbyt mała ilość obserwacji. Na podstawie otrzymanych wyników trudno więc jednoznacznie stwierdzić o istnieniu czy też braku normalnego rozkładu składników losowych. W praktyce jednak taka normalność występuje bardzo rzadko. Można jednak w wielu z tych przypadków, na podstawie wykresu, stwierdzić, iż rozkłady składników losowych są zbliżone do rozkładu normalnego. Należałoby się również zastanawiać, czy wydłużenie horyzontu czasu dałoby lepsze rezultaty, albo czy koniunktura giełdowa miałaby tu jakieś decydujące znaczenie. Dlatego też z rozpatrywanego okresu wydzielono dwa podokresy: pierwszy – od 7 lipca 2000r. do 5 października 2001r., drugi – od 7 marca 2003r. do 30 września 2005r. Dla każdego z nich zbudowany został model jednowskaźnikowy oraz dokonano jego weryfikacji, co zebrano w poniższej tabeli. Otrzymane wyniki są znacznie lepsze w przypadku tych dwóch podokresów. Autokorelacja została stwierdzona w trzech przypadkach I podokresu (dla spółek Orbis, Pekao, PKNORLEN), a brak losowości w dwóch przypadkach I podokresu (dla spółek Orbis i Pekao). Heteroskedastyczność wystąpiła również w mniejszej ilości przypadków. Nawet rozkład normalny składników losowych pojawił się w przypadku silnych testów, w których tego rozkładu nie było poprzednio. Po podziale bowiem, dla testu Jarque-Bera rozkładu normalnego nie miały spółki: BPHPBK, Kęty, Netia, Polimexms, Świecie dla obu podokresów, BZWBK, Pekao dla I podokresu, oraz Compland, Dębica, PKNORLEN, Prokom, Softbank dla II podokresu. Dla testu Shapiro-Wilka, z kolei, rozkładu normalnego reszt nie wykazywały spółki: Kęty, Netia, Polimexms, Świecie dla obu podokresów, BZWBK, Pekao, PKNORLEN dla I podokresu i BPHPBK, BRE, Compland, Dębica, Prokom, Softbank dla II podokresu. W przypadku zaś testów słabszych, o ile rozkład normalny reszt występował już dla spółek całego okresu, to po wyszczególnieniu dwóch podokresów zwiększyła się jeszcze ich ilość. I tak dla testu zgodności  $\chi^2$ , gdzie brak rozkładu normalnego można było zauważyć dla spółek BZWBK, Dębica, Netia, PKNORLEN, Polimexms, Prokom, Świecie i TPSA, to po wyszczególnieniu podokresów stwierdzono jej brak jedynie dla Polimexms, Świecie w obu podokresach, BZWBK, Netii, Prokom w I podokresie i BPHPBK, BRE, Dębicy w II podokresie. Z kolei dla testu  $\alpha$ -Kołmogorowa, gdzie dla całego okresu normalnego rozkładu nie stwierdzono dla spółek Netia, Polimexms i Świecie, to po podziale jego brak występował jedynie dla Polimexms w II podokresie i Świecie w podokresie I.



Tabela 3. Wyniki weryfikacji modelu jednowskaźnikowego dla obu podokresów

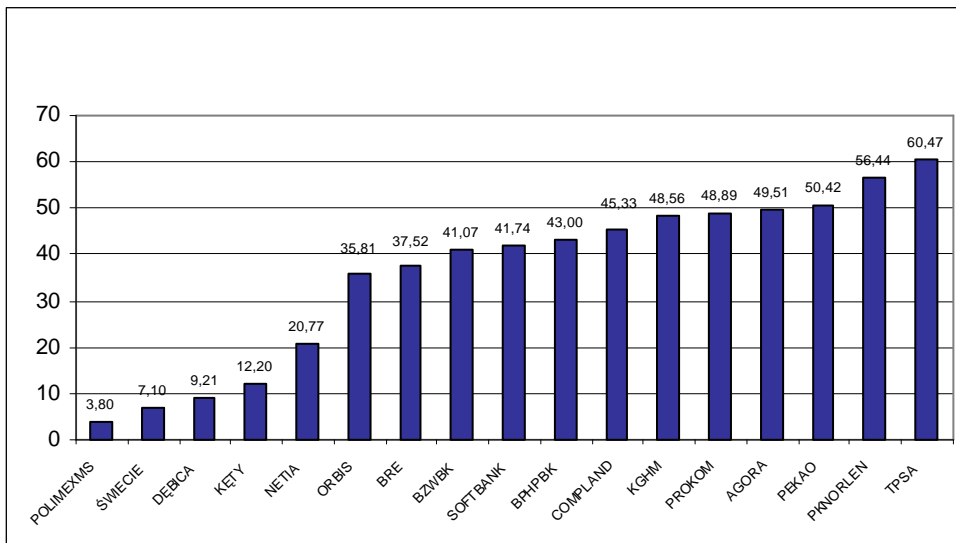
spółka	test Ljunga-Boxa				test White'a				test serii				test lambda-Kołmogorowa			
	I		II		I		II		I		II		I		II	
	st.	p	st.	p	st.	p	st.	p	st.	p	st.	p	st.	p	st.	p
AGORA	0,053	0,817	1,135	0,287	<u>12,081</u>	<u>0,002</u>	1,060	0,589	0,125	0,901	0,694	0,488	0,609	0,852	0,856	0,457
BPHPBK	1,369	0,242	0,908	0,341	0,744	0,689	<u>5,420</u>	<u>0,067</u>	0,125	0,901	1,387	0,165	0,736	0,650	0,982	0,290
BRE	0,005	0,944	0,150	0,699	0,520	0,771	<u>7,327</u>	<u>0,026</u>	0,625	0,532	0,694	0,488	0,667	0,765	0,712	0,691
BZWBK	0,164	0,685	1,718	0,190	0,543	0,762	1,570	0,456	1,008	0,314	0,000	1,000	0,986	0,286	0,666	0,766
COMPLAND	0,665	0,415	0,473	0,491	3,982	0,137	1,069	0,586	0,875	0,382	0,694	0,488	0,634	0,816	0,891	0,406
DEBICA	0,012	0,913	2,248	0,134	0,268	0,874	3,803	0,149	0,625	0,532	0,520	0,603	0,657	0,781	1,094	0,182
KĘTY	0,607	0,436	0,884	0,347	0,606	0,739	<u>6,884</u>	<u>0,032</u>	0,875	0,382	0,694	0,488	0,707	0,700	0,972	0,301
KGHM	0,077	0,782	0,307	0,579	0,089	0,956	0,510	0,775	0,875	0,382	0,520	0,603	0,610	0,851	0,469	0,981
NETIA	1,031	0,310	0,252	0,615	1,567	0,457	<u>9,351</u>	<u>0,009</u>	1,125	0,261	0,000	1,000	0,804	0,537	0,551	0,922
ORBIS	4,499	0,034	0,485	0,486	0,130	0,937	4,020	0,134	<u>3,125</u>	<u>0,002</u>	0,000	1,000	0,439	0,991	0,596	0,869
PEKAO	<u>5,061</u>	<u>0,025</u>	0,106	0,745	0,372	0,830	2,242	0,326	<u>1,875</u>	<u>0,061</u>	0,520	0,603	0,647	0,796	0,486	0,972
PKNORLEN	<u>5,029</u>	<u>0,025</u>	2,189	0,139	0,456	0,796	0,295	0,863	1,125	0,261	0,867	0,386	0,829	0,499	0,709	0,696
POLIMEXMS	0,584	0,445	0,246	0,620	3,461	0,177	1,663	0,435	0,125	0,901	0,867	0,386	0,887	0,410	<u>1,560</u>	<u>0,015</u>
PROKOM	0,599	0,439	0,023	0,879	0,811	0,667	0,675	0,713	0,375	0,708	0,347	0,729	0,870	0,435	0,796	0,551
SOFTBANK	1,780	0,182	0,753	0,386	0,312	0,856	<u>5,211</u>	<u>0,074</u>	0,875	0,382	0,694	0,488	0,683	0,740	0,641	0,806
ŚWIECIE	0,980	0,322	1,184	0,277	0,559	0,756	1,514	0,469	0,375	0,708	0,694	0,488	<u>1,496</u>	<u>0,023</u>	0,899	0,394
TPSA	0,135	0,714	1,349	0,245	0,444	0,801	0,428	0,807	0,625	0,532	1,387	0,165	0,755	0,618	0,399	0,997

Źródło: opracowanie własne

Na przykładzie każdego z testów badających normalny charakter składników losowych można zatem zauważyć znacznie lepsze dopasowanie do rozkładu normalnego po wyszczególnieniu dwóch podokresów, co pokazują zarówno wyniki statystyczne jak i wykresy rozkładów.

## RYZIKO SYSTEMATYCZNE DLA MODELU SHARPE'A

W tej części pracy korzysta się z otrzymanych wyników czyniąc kilka uwag na temat ryzyka systematycznego i specyficznego charakteryzującego rozważane walory w obu badanych okresach. Ze wzoru (2.2) obliczony został udział ryzyka systematycznego w ryzyku całkowitym dla całego rozważanego okresu. Przedstawiony jest on na rysunku 2.

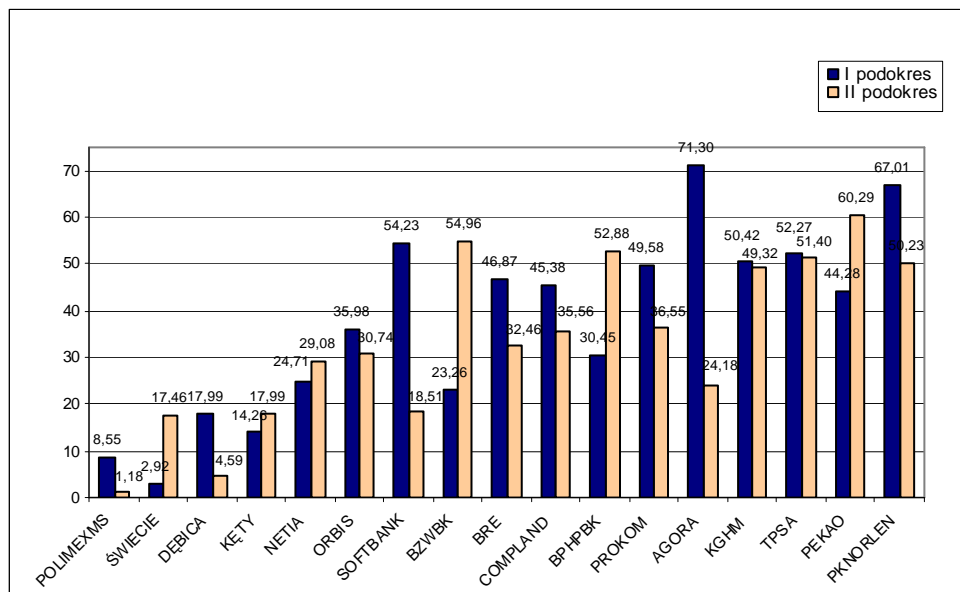


Rysunek. 2. Udział ryzyka systematycznego w ryzyku całkowitym (w %) w okresie od 7 lipca 2000r. do 30 września 2005r. Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie tego wykresu można zauważyć, że ryzyko systematyczne zmieniało się od poziomu 3,80% dla spółki Polimexms do 60,47% dla TPSA, dla której to spółki osiągnęło największą wartość. W okresie tym średni udział ryzyka systematycznego wynosił 35,99%. Najmniej ryzykowne okazały się spółki: Polimexms, Świecie, Dębica i Kęty. Wszystkie uzyskane wartości są duże, co może świadczyć o znacznej zmienności cen związanych ze zmianami zachodzącymi na WGPW. Oprócz tego można również stwierdzić, iż w większości spółek występuje przewaga ryzyka specyficznego nad ryzykiem systematycznym, co świadczy o dużym wpływie warunków działania spółki w danej branży. Ryzyko specyficzne związane jest bowiem zarówno z historycznymi, jak i spodziewanymi w przyszłości zdarzeniami dotyczącymi danej firmy, które można częściowo

kontrolować lub przewidywać [Głuchowski, 2001]. Źródłem takiego ryzyka może być sposób zarządzania firmą, konkurencja, dostępność surowców, płynność czy potencjalne bankructwo firmy. Przed wpływem tych czynników można w dużej mierze się zabezpieczyć chociażby poprzez dywersyfikację inwestycji i nie inwestowanie w spółki jednej branży. Wyjątkiem są tu spółki PKNORLEN, Pekao i TPSA, dla których udział ryzyka systematycznego w ogólnym ryzyku akcji przekracza 50%.

W przypadku rozważania dwóch podokresów udział ryzyka systematycznego przedstawiony jest na rysunku 3, w którym rozmieszczenie spółek jest zgodne z rosnącą wartością średniego udziału ryzyka niedywersyfikowalnego z obu podokresów.



Rysunek 3. Udział ryzyka systematycznego w ryzyku całkowitym dla dwóch podokresów (w %). Źródło: opracowanie własne.

Uzeregowanie spółek z rysunku 3 jest zbliżone do rozmieszczenia przedstawionego na rysunku 2. Jednak dla prawie połowy spółek średni udział ryzyka rynkowego był o kilka procent niższy dla obu podokresów niż dla całego rozpatrywanego okresu. Jeśli przyjrzymy się tylko pojedynczym podokresom, to te ryzyko jest dla nich zdecydowanie niższe lub zdecydowanie wyższe w stosunku do całego podokresu.

Na zakończenie można stwierdzić, że statystyczne własności parametrów strukturalnych modelu jednowskaźnikowego zależą od koniunktury giełdowej. Wynika stąd, iż wykorzystanie modelu do podejmowania decyzji inwestycyjnych musi uwzględniać sytuację aktualnie panującą na rynku. Stąd wynika dodatkowo kwestia horyzontu czasowego, jaki należy uwzględniać przy estymacji

współczynnika beta. Warto również odpowiedzieć na pytanie, czy otrzymane wyniki pozostaną słuszne dla spółek spoza indeksu. Widać zatem, że pytań jakie się nasuwają jest wiele, dlatego niniejszą pracę należy traktować jako sygnałną, zwiastującą dalsze „drażnienie” tematu.

## LITERATURA

- Brzeszczański J., Kelm R. (2002), *Ekonometryczne modele rynków finansowych*, WIG PRESS, Warszawa
- Chmielewski K. Berczyński S. (2002), *Statystyka matematyczna*, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin
- Elton E. J., Gruber M. J. (1998), *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG PRESS, Warszawa
- Głuchowski J. i in. (red.) (2001), *Leksykon finansów*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa
- Kufel T. (2004), *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu GRETL*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa
- Osińska M. (red.) (2005), *Wybrane zagadnienia z ekonometrii*, WSiE TWP, Olsztyn
- Welfe A. (2003), *Ekonometria*, PWE, Warszawa

### **The systematic risk for the stocks from index WIG20 and the stock exchange trends**

**Summary:** In this paper authors try to answer the question: Do the statistical properties of the estimators of parameters for single-index model depend on stocks exchange trends? The period of five years was divided on two sub periods. Then single-index model was built for both periods using mean squares method for finding estimators of structural parameters. The authors performed the statistical verification of the models, also. In the end they made the decomposition of the stocks risk into two parts: systematic and specific and analyzed them for different trend on stock exchange. Only stocks from WIG20 are under consideration.

**Key words:** single-index model, beta coefficient, risk, systematic risk, specific risk.

Agnieszka Kierys  
Projekt wsparcia ośrodków Agro-Info, Poznań  
Jan Saloni, Projekt Agrinpol, Warszawa

## **NARZĘDZIA INFORMATYCZNE W DZIAŁANIACH WSPIERAJĄCYCH ROZWÓJ OBSZARÓW WIEJSKICH PROWADZONYCH PRZEZ BIURO PROGRAMÓW WIEJSKICH, FUNDUSZU WSPÓŁPRACY**

**Streszczenie:** Wraz przystąpieniem Polski do Wspólnot Europejskich zwiększyło się zapotrzebowanie na informację. Obszary wiejskie stają przed szczególną szansą i wyzwaniem, co tym bardziej nakłada obowiązki informacyjne na instytucje związane z rozwojem wsi. Artykuł przedstawia narzędzia informatyczne wspierające działania na rzecz rozwoju obszarów wiejskich prowadzone przez Biuro Programów Wiejskich, Fundacji Fundusz Współpracy, takie jak baza danych przedsiębiorstw na obszarach wiejskich Agrinpol, baza działań wspierających obszary wiejskie Agro-info czy projekt grantów na szkolenia metodą e-learnigową.

**Słowa kluczowe:** Baza Agrinpol, baza Agro-Info, strona [www.agro-info.org.pl](http://www.agro-info.org.pl), granty, ośrodki informacji

### **PREZENTACJA PROGRAMU.**

Od początku swojego istnienia założona w 1990 roku Fundacja Fundusz Współpracy prowadzi programy wspierające rozwój obszarów wiejskich, a stopniowo w coraz szerszym stopniu posługuje się w nich narzędziami informatycznymi. W 2002 roku w strukturze Funduszu wyodrębnione zostało Biuro Programów Wiejskich, którego misja określona została jako wpieranie przemian i pomaganie mieszkańcom obszarów w przygotowaniu do członkostwa w Unii Europejskiej. Obecnie Biuro realizuje następujące programy:

- Agrolinia      wspierający społeczności wiejskie i organizacje działające na rzecz wsi, rozwój wiejskiej przedsiębiorczości i bankowość spółdzielczej;
- Agro-Smak 2    program wspierający ochronę i promocję produktów tradycyjnych i regionalnych oraz promocję oznaczeń geograficznych. Celem programu jest rozwój rynku produktów regionalnych i lokalnych o potwierdzonej jakości, zgodnie z polityką prowadzoną przez Komisję Europejską;
- Agro-Info      program, którego celem jest przygotowanie obszarów wiejskich do sprostania warunkom członkostwa Polski w Unii Europejskiej.

## BAZY DANYCH.

Biuro Programów Wiejskich poza działalnością polegającą na tworzeniu i utrzymywaniu własnych stron i serwisów internetowych, prowadzi w ich ramach dwie rozbudowane tematyczne bazy danych: bazę danych Agro-Info oraz bazę danych Agrinpol. Pierwsza – Agro-Info – jest bardziej ogólna, dotyczącą różnorodnych działań wsparcia obszarów wiejskich, druga dotyczy przedsiębiorczości wiejskiej i jest zbiorem pozytywnych przykładów tworzenia wiejskich przedsiębiorstw w oparciu przede wszystkim o pomysły mieszkańców terenów wiejskich, a szczególnie rolników. Bazy różnią się podejściem i sposobem zbierania danych. Choć obie oparte są na tym samym założeniu otwartego dostępu dla przedstawicieli prezentowanych w serwisie podmiotów, to pierwsza – Agro-info – zakładała przede wszystkim własne wpisy organizacji, druga – Agrinpol – budowana jest natomiast w oparciu o ankiety, choć istnieje również możliwość wpisania się bezpośrednio przez samych przedsiębiorców. Wynika to z założenia, że baza przedstawiać będzie nie dowolnych przedsiębiorców, a przypadki spełniających określone warunki i odpowiadające założeniom projektu. W praktyce technika zbierania danych w obu zbiorach uległa pewnemu upodobnieniu, gdyż w Agro-info, podjęte zostały działania uzupełniania danych przed administratorów, mające na celu osiągnięcie w wybranych aspektach pełnej informacji (dotyczyło to w największym stopniu dostępnej dla wsi pomocy finansowej, ale również publikacji dotyczących związanej z integracją europejską problematyki wiejskiej oraz w pewnym zakresie szkoleń), natomiast do bazy Agrinpol coraz częściej wpisują się sami przedsiębiorcy, traktując bazę jako metodę promocji (zarówno jako formę własnej strony www lub prezentacji<sup>1</sup>, jak i rodzaj internetowego katalogu<sup>2</sup>, w którym warto umieścić swoje, choćby podstawowe dane).

W obu wypadkach jednak zgromadzone w bazach dane stanowią rodzaj subiektywnego wyboru przykładów stanowiących wypadkową założeń mówiących o tym, jakiego rodzaju informację warto są zaprezentowania w bazach oraz woli samych mających być zaprezentowanymi podmiotów do udzielenia informacji na swój temat. Należy więc je odróżnić od zbiorów informacji, utworzonych w wyniku działania ustawowego obowiązku przekazywania informacji<sup>3</sup>, informacje uzyskiwane w ramach prowadzonych działań i w istocie bezpośrednio ich dotyczących<sup>4</sup> oraz informacji statystycznych uzyskiwanych w wyniku prowadzonych badań na reprezentatywnych próbach.

---

<sup>1</sup> Założenie podawania w materiałach i informacjach reklamowych firmy bezpośredniego adresu do swojego opisu.

<sup>2</sup> Założenie, że informacja będzie przez internautów odnajdowana przede wszystkim poprzez wyszukiwarki.

<sup>3</sup> Np. informacje przekazywane organom skarbowym.

<sup>4</sup> Np. informacje dotyczące dopłat bezpośrednich i upraw, których dotyczą.

Baza danych Agrinpol przedstawia przykłady pozarolniczej działalności gospodarczej na wsi prowadzonej przez rolników lub ludzi odchodzących od rolnictwa. Jest z jednej strony zbiorem pomysłów, a z drugiej zachętą dla mieszkańców wsi, pokazując możliwości uzyskania dodatkowego źródła dochodu lub wręcz innego źródła dochodów wobec dotychczasowego prowadzenia gospodarstwa rolnego lub ewentualnie z pracy w gospodarstwie. Baza ma pokazywać przykłady uzyskania dochodu w dużej części w oparciu o dotychczasowe, posiadane już zasoby i możliwości, stwarzane przez warunki i lokalizację. Możliwości, które przy ich umiejętnym wykorzystaniu oraz zaangażowaniu, a czasem również zewnętrznemu wsparciu doradczemu i finansowemu pozwalają stopniowo rozwinąć stabilną działalność gospodarczą: agroturystykę z usługami towarzyszącymi w przypadku regionów atrakcyjnych przyrodniczo, historycznie lub folklorystycznie; produkcję i serwowanie produktów regionalnych w przypadku regionów o rozwiniętej turystyce; małe przetwórstwo rolno-spożywcze w regionach, gdzie występuje nie tylko rolnictwo wielkotowarowe oraz istnieją rynki zbytu na jakościowe produkty spożywcze; usługi rekreacyjne, turystyczne i turystyki kwalifikowanej w regionach lub gospodarstwach stwarzających dogodne warunki.

Projekt Agrinpol realizowany był w dwóch etapach, które mimo tej samej tematyki i podobieństwa podejścia merytorycznego różnią się organizacją i sposobem rozwiązania technicznego, co jest w pewnym stopniu ilustracją szybkości postępu i zmian technologicznych. W pierwszej edycji projektu baza tworzona było w procesie zbierania danych, a następnie umieszczania ich i przetwarzania w zamkniętej bazie danych na jednym niedostępnym w sieci komputerze. Zbiór ten po zamknięciu etapu zbierania danych został przetworzony na postać możliwą do publikacji w internecie (html) i umieszczony na stronach Programu Agrolinia<sup>5</sup>. W drugiej edycji baza danych tworzona była w sposób całkowicie interaktywny. Uruchamiana była od początku, jako baza ogólnodostępna, zbierane opisy umieszczane były bezpośrednio w internetowej bazie, a przedstawiani przedsiębiorcy mieli od początku możliwość wprowadzania korekt lub uzupełnień do swoich opisów, podobnie jak nie opisani w bazie przedsiębiorcy mieli możliwość bezpośredniego wpisania się i przedstawienia informacji o swojej działalności i ofercie.

W pierwszej edycji projektu dane zbierane były w 11 województwach pomiędzy 2000 a 2002 rokiem we współpracy z Ośrodkami Doradztwa Rolniczego. Zebrane zostało wówczas ponad 1300 opisów działalności gospodarczej na wsi, które są cały czas dostępne w internetowej bazie danych [www.agrinpol.pl](http://www.agrinpol.pl)<sup>6</sup> (efektem projektu było również kilkanaście regionalnych i ogólnopolskich publikacji). Od 2004 trwa druga edycja projektu, w ramach której

---

<sup>5</sup> BPW powstało w 2002 roku, a wcześniej funkcjonowało jako Biuro Programu Agrolinia 2000.

<sup>6</sup> Lub bezpośrednio: [www.cofund.org.pl/agrolinia2000/agrinpol/agrinpol0.html](http://www.cofund.org.pl/agrolinia2000/agrinpol/agrinpol0.html)

zbierane są opisy uruchomionych przez rolników wiejskich przedsiębiorstw z całej Polski. Zbierane są nowe przykłady działalności gospodarczej, częściowo aktualizowane i uzupełniane dotychczasowe. Całość danych prezentowana jest w serwisie o nowych wygodniejszych i elastyczniejszych funkcjach. Poza samą prezentacją ilustrowanych danych, baza oferuje rozbudowane i wygodne możliwości wyszukiwania według dowolnego kryterium (np.: nazwa przedsiębiorstwa, nazwisko przedsiębiorcy prowadzącego działalność gospodarczą itp.) wybranego z rozwijanego menu, etapów zbierania danych (Agrinpol I i Agrinpol II), rodzaju prowadzonej działalności (26 kategorii), geograficznego (województwo, powiat). Baza zawiera również element prezentacji zebranych danych na interaktywnej internetowej mapie Polski<sup>7</sup>. Oferuje możliwość oglądania lokalizacji opisanych w bazie przedsiębiorstw na mapie, przybliżania od poziomu całej Polski do poziomu poniżej pojedynczej gminy, wybierania bezpośrednio prezentacji przedsiębiorstw w interesującej nas lokalizacji, ale też wyszukiwania miejscowości lub pomiarów odległości pomiędzy obiektami na mapie.

Baza Agrinpol jest nadal aktualizowana, a obecnie znajduje się w niej 2 959 opisów przedsiębiorstw, w tym 1 790 zebranych w ramach drugiej edycji projektu Agrinpol.

Ogólnodostępna baza danych Agro-Info [www.agro-info.org.pl](http://www.agro-info.org.pl)<sup>8</sup> gromadzi informacje na temat działań dowolnych podmiotów – organizacji, samorządów i firm prywatnych – wspomagających polską wieś w jej przystosowania do działania po przystąpieniu Polski do Wspólnot Europejskich – sprostania obowiązkom i wykorzystanie możliwości. Baza wstępnie uruchomiona została w kwietniu 2002 będąc wówczas elementem licznych działań przygotowujących wieś do członkostwa.

Działania w bazie Agro-info prezentowane są jako ogólny opis organizacji (dane teleadresowe, informacja o charakterze prowadzonej działalności) oraz towarzyszące im w dowolnej ilości opisy projektów – formularze-załączniki przedstawiające konkretne projekty realizowane przez organizację (szkolenia, centra informacji, publikacje, czasopisma, udzielaną pomoc finansową, projekty naukowe i badawcze, inne projekty). Załączniki przedstawiające kolejne realizowane projekty, uzupełniane są na bieżąco, natomiast informacje z bazy co do zasady nie są usuwane, a po pewnym czasie załączniki opisujące poszczególne projekty stają się wpisami archiwalnymi i są dostępne po kliknięciu przycisku *pokaż starsze opisy*, którego wybranie pozwala obejrzeć informacje historyczne.

Baza danych oferuje liczne możliwości wyszukiwania informacji. Podstawowym mechanizmem jest wyszukiwanie uproszczone według fragmentu nazwy lub opisu. Zaawansowane wyszukiwanie organizacji i projektów, w którym wybrać można obszar geograficzny (województwo, powiat), możemy też wybrać

---

<sup>7</sup> Bezpośredni link: [www.agrinpol.pl/mapa\\_polski](http://www.agrinpol.pl/mapa_polski)

<sup>8</sup> [www.agro-info.org.pl](http://www.agro-info.org.pl) -> lewe menu, zakładka *Baza danych* lub [www.agro-info.org.pl/baza](http://www.agro-info.org.pl/baza)



dowolne pola bazy (kod pocztowy, e-mail, nazwisko osoby kierującej organizacją, itp.) lub dowolny z sześćdziesięciu siedmiu obszarów tematycznych. Oddzielna opcja zaawansowanego wyszukiwania projektów pozwala wyszukiwać informację poprzez kryteria, którymi mogą być nazwa projektu, tematyka, grupa odbiorców lub kluczowe dla nas słowo ale też specyficzne kryteria dla rodzaju projektu (np.: w przypadku pomocy finansowej - rodzaj: pożyczki, dotacje, inne; w przypadku publikacji i czasopism - obszar dystrybucji; w przypadku punktów informacyjnych i szkoleń - osoby doradców i wykładowców). W ten sposób można odnaleźć np. ofertę dostępnych jeszcze dotacji dla przedsiębiorców wiejskich. Baza oferuje również funkcję szukania wśród wszystkich pól wszystkich projektów.

Obecnie w bazie danych Agro-info znajdują się opisy 1 366 organizacji i 4 397 prowadzonych przez nie projektów (1 522 szkoleń, 373 centrów i punktów zajmujących się działalnością informacyjną<sup>9</sup>, 1 122 – publikacji, 214 – czasopism i publikacji regularnych, 960 – opisów oferowanej pomocy finansowej, 256 - projektów naukowych i innych). Serwis Agro-info zawiera również moduł angielski i istnieje możliwość przeszukiwania angielskich nazw organizacji.

Biuro programów wiejskich jako członek Forum Aktywizacji Obszarów Wiejskich prowadzący jego sekretariat i stronę internetową utworzyło również bazę danych partnerstw lokalnych. Obecnie w bazie prezentowane są 124 partnerstwa z całej Polski. W bazie znaleźć można dane kontaktowe partnerstwa, informacje o partnerach, podstawowych działaniach, a także udziale w programie LEADER+.

Jako element dalszego zwiększania dostępności i wygody korzystania z serwisów w najbliższej przyszłości obie bazy zostaną zintegrowane za pośrednictwem będącej obecnie elementem serwisu Agrinpol interaktywnej mapy Polski, na której prezentowane będą dane obu baz, a także wybrane ich elementy (np. oddzielnie oglądać będzie można mapę z zaprezentowanymi tylko organizacjami prowadzącymi szkolenia lub tylko siecią ośrodków informacji).

## NARZĘDZIA PROJEKTU SIECI OŚRODKÓW AGRO-INFO.

W ramach projektu wsparcia sieci ośrodków informacji dla obszarów wiejskich, stworzona została sieć 57 ośrodków Agro-Info. W sieci znalazły się formalnie funkcjonujące w ramach struktur jednostek samorządowych, ale też fundacji i stowarzyszeń działających na rzecz rozwoju obszarów wiejskich. Główne zadania sieci polegają na szerzeniu informacji zarówno o możliwościach jakie daje członkostwo Polski w Unii Europejskiej, jak również dostarczaniu informacji na temat sposobów dywersyfikacji źródeł dochodów. Dzięki

---

<sup>9</sup> Ta kategoria zawiera również informacje o tym, czy opisywane centrum należy do którejś z sieci centrów informacji. Szczegółowe opis jednej z nich – organizowanej i wspieranej przez Biuro Programów Wiejskich Agrolinia Sieci Ośrodków Agro-Info w dalszej części artykułu.

dofinansowaniu otrzymywanemu z budżetu programu Agro-Info, jak i grantów innych instytucji, organizowane są szkolenia dla różnych grup odbiorców: samorządowców, organizacji wiejskich, lokalnych liderów i oczywiście dla rolników.

Jako jedna z form udzielanego przez program Agro-Info wsparcia Ośrodki Informacji Europejskiej zostały wyposażone w dostęp do bazy Axio, zawierającej informacje o wszystkich dostępnych w Polsce dotacjach i kredytach preferencyjnych. Dzięki niej pracownicy Ośrodków mieli dostęp do danych o ponad 500 liniach finansowych wraz z dokumentami źródłowymi (regulaminami, wzorami wniosków itd.). Dostęp do tej bazy użytkownicy mieli za pośrednictwem strony [www.firmy prowadzącej bazę](http://www.firmy prowadzącej bazę).

Strona internetowa Biura Programów Wiejskich [www.agro-info.org.pl](http://www.agro-info.org.pl), jest miesięcznie odwiedzana jest przez około 16 000 osób. Odnajdujący stronę Agro-info trafiają na nią najczęściej poprzez wyszukiwarki internetowe po wpisaniu słów kluczy, którymi są najczęściej faow, agro-info, leader oraz agrolinia. Zdecydowana jednak większość odwiedza stronę poprzez bezpośrednie wpisanie w okno adresu w przeglądarce adresu strony [www.agro-info.org.pl](http://www.agro-info.org.pl) lub wybranie tego adresu z menu *Ulubione*. Oznacza to, że strona internetowa stała się dla dużej części jej użytkowników stałym źródłem pozyskiwania informacji na temat projektów realizowanych ze środków wspólnotowych.

Jednym z ważnych elementów tej strony są otwarte i zamknięte fora dyskusyjne. Do otwartego forum dyskusyjnego mają dostęp wszyscy odwiedzający stronę internetową. Zostały jednak utworzone dwa zamknięte fora dyskusyjne:

- dla sieci Ośrodków Agro-Info,
- forum animatorów i trenerów Fundacji Aktywizacji Obszarów Wiejskich.
- 

Oba są moderowane przez specjalistów, którzy mają za zadanie odpowiadać na pytania. w ciągu 24 godzin, dzięki czemu jest to niezwykle pomocne narzędzie dla osób zajmujących się na co dzień zawodowo problematyką obszarów wiejskich. Dostęp do zamkniętych forów został ograniczony ze względu na specyfikę często wymienianych tam informacji, w tym również organizacyjnych. Przeciętny użytkownik wewnętrznego forum dyskusyjnego odwiedza je codziennie.

Projekt Agro-Info uruchomił w czerwcu nową edycję grantów dla Ośrodków, która ma na celu zainicjowanie wśród działających na obszarach wiejskich organizacji sieci Ośrodków prowadzenia szkoleń metodą e-learningową. Jednostki te do tej pory realizowały szkolenia metodami tradycyjnymi, prowadząc kilkudniowe szkolenia, często wyjazdowe. Formuła ta, z jednej strony efektywna, jest z drugiej znacząco droga. Poza oczywistymi spodziewanymi efektami dotyczącymi obniżenia kosztów przeprowadzenia szkoleń, spodziewana jest również popularyzacja technologii informatycznych, między innymi takich jak Voice over Internet Protocol (VoIP). Zdobyć nowych doświadczeń

szkoleniowych przez pracowników Sieci, pozwoli im również w późniejszym okresie samemu prowadzić szkolenia tą metodą. Konkurs w założeniach nie stawia ograniczeń dotyczących samej tematyki organizowanych szkoleń, które ze względu na zróżnicowanie zapotrzebowania, wynikające z ogólnopolskiego charakteru sieci i różnych zarówno możliwości ośrodków jak i potrzeb klientów dotyczących konkretnej wiedzy i informacji. Konkursu zakłada natomiast, że Ośrodki będą przy realizacji szkoleń wykorzystywać między innymi platformy do nauczania metodą e-learnigową, posiadane w infrastrukturze Ośrodków Doradztwa Rolniczego.<sup>10</sup>

## ZAKOŃCZENIE

Barierą, która w dużym stopniu uniemożliwia rozprzestrzenianie informacji kanałem elektronicznym, jest niski poziom wykorzystania technologii informacyjno-telekomunikacyjnych na wsi. W roku 2004 na wsi tylko 15% gospodarstw domowych posiadało dostęp do internetu, przy czym tylko 9% korzystało z łącza szerokopasmowego (powyżej 128kb/s). Wskaźnik ten zdeterminowany jest głównie przez zbyt wysokie koszty zarówno samego sprzętu, jak i dostępu do sieci. Dla tego tak ważne jest, aby mieszkańcy obszarów wiejskich mieli możliwość korzystania nieodpłatnie z infrastruktury informatycznej w szkolnych salach komputerowych, bibliotekach czy domach kultury. Oczywiście można zastanawiać się nad możliwościami współfinansowania lub finansowania dostępu do internetu przez gminy i powiaty. Firmy oferujące tego typu usługę, nie chcą inwestować w infrastrukturę na obszarach wiejskich ze względu na zbyt małą gęstość zaludnienia oraz zbyt niskie dochody gospodarstw domowych. Wdrożenie projektów mających na celu stworzenie możliwości dostępu do internetu za niskie opłaty jest niezwykle kuszące dla samorządowców, jest jednak trudne zarówno jako inwestycja finansowa jak i pod względem technicznymi i organizacyjnym. Dlatego stopniowe różnorodne działania prowadzone przez Biuro Programów Wiejskich Funduszu Współpracy mają szanse efektywnego przyczynienia do rozwoju wykorzystania nowych technologii na obszarach wiejskich, gdzie w miarę tania dostępu i jednocześnie zwiększania świadomości i woli mieszkańców wsi, będzie on w coraz większym stopniu narzędziem wyrównywania różnic technologicznych pomiędzy miastem a wsią.

## LITERATURA:

Główny Urząd Statystyczny, Wykorzystanie Technologii informacyjno-telekomunikacyjnych w przedsiębiorstwach i gospodarstwach domowych w 2004 r., Warszawa, 2004

Polska strategia w procesie kształtowania polityki Unii Europejskiej wobec obszarów wiejskich i rolnictwa, red. J. Wilkin, M. Bład, D. Klepacka, Warszawa 2006

---

<sup>10</sup> W Sieci Agro-Info, znajdują się 3 Ośrodki, które już posiadają taką infrastrukturę.

Polska wieś w Europie, Baza danych Agro-Info, Fundacja Fundusz Współpracy, Warszawa 2005

Pomysły na przedsiębiorczość na wsi, Fundacja Fundusz Współpracy, Warszawa 2004

Przykłady przedsięwzięć pozarolniczych na obszarach wiejskich, Fundacja Fundusz Współpracy, Poznań 2001

**Summary:** Polish accession to the EU caused an increase need for information. Rural areas in particular face a difficult challenge and a great opportunity. Therefore joining the EU gives even bigger role to institutions supporting rural development to provide accurate information. The article describes the information technology tools that aid the development of rural areas implemented by Bureau for Rural Programmes of Cooperation Found Foundation, such as Agrinpol database of farmers' enterprises, the Agro-Info database of projects supporting rural areas, or a grant competition supporting the e-learning based training.

**Key words:** database of Agripol, Agro-info, webpage: [www.agro-info.org.pl](http://www.agro-info.org.pl),

Joanna Kisielińska, Urszula Skórnik-Pokarowska  
Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW  
e-mail: jkisielinska@mors.sggw.waw.pl, uskornik@mors.sggw.waw.pl

## **WYKORZYSTANIE LINIOWEJ FUNKCJI DISKRYMINACYJNEJ ORAZ METODY GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH W PROCESIE DOBORU SPÓŁEK DO PORTFELA INWESTYCYJNEGO**

**Streszczenie:** W pracy omówiono przykłady zastosowania liniowej funkcji dyskryminacyjnej w doborze spółek do portfela inwestycyjnego. Pokazano, że nie zawsze metody związane z analizą dyskryminacji są skuteczne. Wskazano przykład zastosowania analizy dyskryminacji, który może być wykorzystywany w selekcji spółek do portfela inwestycyjnego. Ponadto, na przykładzie, przedstawiono sposób zastosowania metody głównych składowych i analizy skupień do analizy struktury zbioru spółek, który został poddany analizie dyskryminacji.

**Słowa kluczowe:** analiza dyskryminacyjna, metoda głównych składowych, analiza skupień, portfel inwestycyjny

### **WSTĘP**

Na GPW w Warszawie notowanych jest około 250 spółek. Dywersyfikacja ryzyka wymaga, aby w portfelu inwestycyjnym znalazło się od 5-10 spółek [Tarczyński i in. 2006]. Dlatego też niezwykle ważne są, z punktu widzenia inwestora, metody selekcji spółek do portfela inwestycyjnego. Najczęściej stosowane metody doboru spółek do portfela oparte są wyłącznie na analizie cen akcji. Obliczenie w oparciu o ceny akcji ich stóp zwrotu i różnych miar ryzyka, pozwala na optymalizację portfela poprzez rozwiązanie zadania programowania liniowego bądź programowania wypukłego. Dobór spółek do portfela może być także wykonany w oparciu o wskaźniki finansowe charakteryzujące spółkę giełdową, a metody wykorzystywane w takiej selekcji są metodami wielowymiarowej analizy danych.

Metody wielowymiarowej analizy danych, dzięki rozwojowi narzędzi komputerowych, są niezwykle ważne we współczesnej medycynie, biologii, genetyce, a także wielu innych dziedzinach a ich niezwykła skuteczność i przydatność znalazła już powszechne uznanie. Analiza dyskryminacji stosowana jest od wielu lat w naukach przyrodniczych oraz do celu prognozowania upadłości przedsiębiorstw [Altman 1968, Morrison 1990]. Jednakże zastosowanie tej metody do wyboru spółek wchodzących w skład średnioterminowego portfela inwestycyjnego nie jest często wykorzystywane.

W rozdziale drugim zilustrujemy powody słabej skuteczności pewnych modeli analizy dyskryminacji na polskim rynku kapitałowym. Zwrócimy także uwagę na modele analizy dyskryminacji, które mogą być wykorzystane w doborze spółek do portfela.

W rozdziale trzecim pokażemy, że analiza skupień i metoda głównych składowych, popularne w naukach przyrodniczych i badaniach marketingowych, zastosowane do analizy spółek opisywanych wskaźnikami finansowymi, mogą dostarczyć potencjalnemu inwestorowi cenne wskazówki pomocne w preselekcji portfela inwestycyjnego.

## WYKORZYSTANIE LINIOWEJ FUNKCJI DYSKRYMINACYJNEJ

Celem przeprowadzenia analizy dyskryminacji jest zbudowanie funkcji dyskryminacyjnej, której zmienne niezależne są wskaźnikami finansowymi, zaś wartość pozwoli zaklasyfikować rozważaną spółkę do jednej z dwóch grup spółek. Pierwszą grupę stanowią spółki atrakcyjne, drugą nieatrakcyjne z punktu widzenia inwestora. Rozważymy trzy propozycje klasyfikacji spółek i dla każdego przykładu zbudujemy model, funkcję dyskryminacyjną.

Pierwsza konstrukcja modelu polega na dokonaniu podziału grupy spółek na te, w przypadku których stopa zwrotu jest wyższa od mediany oraz pozostałe (o stopie zwrotu od mediany mniejszej). Taki podział został zainspirowany metodą i wynikami uzyskanymi przez Tarczyńskiego [Tarczyński 1995, 1996]. Do analizy wybrano 68 spółek spoza sektora bankowego, wchodzących w skład indeksu WIG. Analizę przeprowadzono dla wskaźników ekonomiczno - finansowych z roku 2004 i z I kwartału 2005 publikowanych przez Serwis Notoria. Zestaw wskaźników obejmował 8 wskaźników, charakteryzujących badane spółki, sugerowanych przez Tarczyńskiego i Łuniewską [Tarczyński i in. 2004, 2006], tj. stopę zwrotu z kapitału własnego (ROE), stopę zwrotu z aktywów (ROA), rotację należności (RN), rotację zapasów (RZap), rotację zobowiązań (RZob), rotację aktywów (RA), wskaźnik płynności bieżącej (WPB), stopę zadłużenia (SZ). Dodatkowo uwzględniono stopy zwrotu rozważanych spółek obliczone w oparciu o notowania cen akcji w pierwszym półroczu 2005.

Konstrukcję liniowej funkcji dyskryminacyjnej (LFD) przeprowadzono dla kilku wariantów. Ponieważ inwestor zainteresowany jest uzyskaniem wstępnej selekcji spółek do portfela inwestycyjnego, kryterium podziału spółek na dwie grupy związane było z medianą osiągniętych stóp zwrotu w każdym z trzech rozważanych okresów; I półrocze 2005, II kwartał 2005 i czerwiec 2005. Powodem uwzględnienia notowań akcji z okresów następujących po publikacji sprawozdań finansowych, była chęć sprawdzenia, czy ceny akcji zależne są od kondycji finansowej spółek.

Niestety otrzymane rezultaty dla sześciu scenariuszy, czyli wskaźników pochodzących z I kwartału 2005 i stóp zwrotu z kolejnych okresów, lub wskaźników z rok 2004 i stóp zwrotu z kolejnych okresów, nie przyniosły zadawalających rezultatów. Otrzymane funkcje dyskryminacyjne charakteryzowały się słabą zdolnością dyskryminacyjną. W każdym przypadku jedynie około 60 % spółek zostało sklasyfikowanych poprawnie. Takie wyniki nie dają podstaw do wykorzystania powstałych funkcji dyskryminacyjnych do celów prognozowania tendencji stóp zwrotów. Powodem słabej skuteczności analizy dyskryminacji w przypadku, gdy podział został uzyskany w oparciu o stopy zwrotu, może być fakt, że wartości stóp zwrotu zależą od okresów, dla których je liczone. Być może lepsze wyniki zostaną osiągnięte, jeśli oczekiwane stopy zwrotu zostaną zastąpione średnią z kilku scenariuszy a dodatkowo scenariusze wyznaczone będą dla różnych okresów następujących po publikacji raportów finansowych spółek. Warto zauważyć, że pod uwagę można wziąć inny zestaw wskaźników charakteryzujących spółki giełdowe, z uwzględnieniem wskaźnika ryzyka rynkowego  $\beta$  [Tarczyński 1996].

W pracach Tarczyńskiego i Łuniewskiej analiza dyskryminacyjna stosowana jest dla kryterium podziału związanego z syntetycznym miernikiem atrakcyjności inwestycji – TMAI, [Tarczyński i in. 2004, 2006]. TMAI jest miarą syntetyczną, dającą liniowy porządek spółek i uwzględniającą wyjściowe zmienne z wagami związanymi ze współczynnikami zmienności  $V_j$  wskaźników finansowych charakteryzujących spółki.

Drugi model klasyfikacji polegał na zbudowaniu funkcji dyskryminacyjnej dla wybranych przez nas 68 spółek w oparciu o kryterium związane z medianą TMAI. Otrzymana LFD dała dobre rezultaty. Ponad 80% spółek zostało zakwalifikowanych poprawnie. Wykorzystanie TMAI ma podobne zastosowanie jak wykonanie rankingu spółek np. uzyskanego przy pomocy pierwszej głównej składowej. Metody porządkowania liniowego spółek zostały przedstawione przez Skórnik-Pokarowską i Orłowskiego [Skórnik-Pokarowska 2006, Skórnik-Pokarowska i in. 2005]. Natomiast analiza dyskryminacyjna wykorzystująca TMAI nie może służyć do celów prognostycznych, gdyż miara TMAI uwzględnia wszystkie zmienne brane pod uwagę w konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej i nie wnosi wobec tego żadnego nowego kryterium stanowiącego jej podstawę.

W trzeciej konstrukcji modelu dokonano podziału spółek na dwie grupy w oparciu o medianę zysku przypadającego na jedną akcję. W grupie I znalazły się spółki, dla których zysk przypadający na jedną akcję był większy od mediany, w drugiej mniejszy. Wartość tego wskaźnika jest publikowana w raportach finansowych spółek. Pod uwagę wzięto 60 spółek notowanych na GPW w Warszawie. Wyznaczono LFD na podstawie wskaźników z roku 2004. Zysk przypadający na jedną akcję pobrano z raportów finansowych za I kwartał 2005. Otrzymana LFD postaci:

$$LFD=2,19ROE+4,95ROA+0,198RN-0,002RZap+0,007RZob-0,003RA+0,0005WPB+1,35SZ -1,22, \quad (1)$$

charakteryzowała się dobrą zdolnością dyskryminacyjną. Ponad 81% spółek zostało poprawnie zaklasyfikowanych (Tabela 1).

Tabela 1. Macierz klasyfikacji wyznaczona przez LFD.

		Przewidywana przynależność do grupy			
		Grupa I	Grupa II	Ogółem	Procent poprawnych klasyfikacji
Faktyczna przynależność do grupy	Grupa I	26	4	30	86,7
	Grupa II	7	23	30	76,7
	Razem	33	27	60	81,7

Źródło: obliczenia własne.

Standaryzowane współczynniki LFD, przedstawione w Tabeli 2, pozwalają ocenić znaczenie poszczególnych cech. Im współczynnik standaryzowany jest większy, co do bezwzględnej wartości, tym silniejszy jest wpływ zmiennej na przynależność do klasy. Wartości bezwzględne standaryzowanych współczynników LFD pozwalają zauważyć, że największy wkład indywidualny do funkcji dyskryminacyjnej i największą moc dyskryminacyjną mają ROE, ROA, SZ i RZob. Spółki o wysokiej wartości zysku na jedną akcję charakteryzują się wysokimi wartościami wskaźników ROA, ROE i SZ, a także niskimi wartościami wskaźnika RZob.

Tabela 2. Standaryzowane współczynniki LFD

ROE	0,51
ROA	0,48
WPB	0,19
RN	-0,10
RZap	0,22
RZob	-0,40
RA	0,09
SZ	0,43

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 3 przedstawiono współczynniki korelacji między poszczególnymi zmiennymi, a wyznaczoną LFD. Najsilniej z LFD skorelowane są wskaźniki ROA, ROE i RZob. Najsłabiej skorelowany jest wskaźnik RZap. Bezwzględne wartości współczynników korelacji określają znaczenie poszczególnych wskaźników w funkcji dyskryminacyjnej [Gatnar 1995].



Tabela 3. Macierz struktury.

ROA	0,826
ROE	0,793
RZob	-0,477
WPB	0,442
RN	-0,428
SZ	-0,362
RA	-0,330
RZap	0,325

Źródło: obliczenia własne.

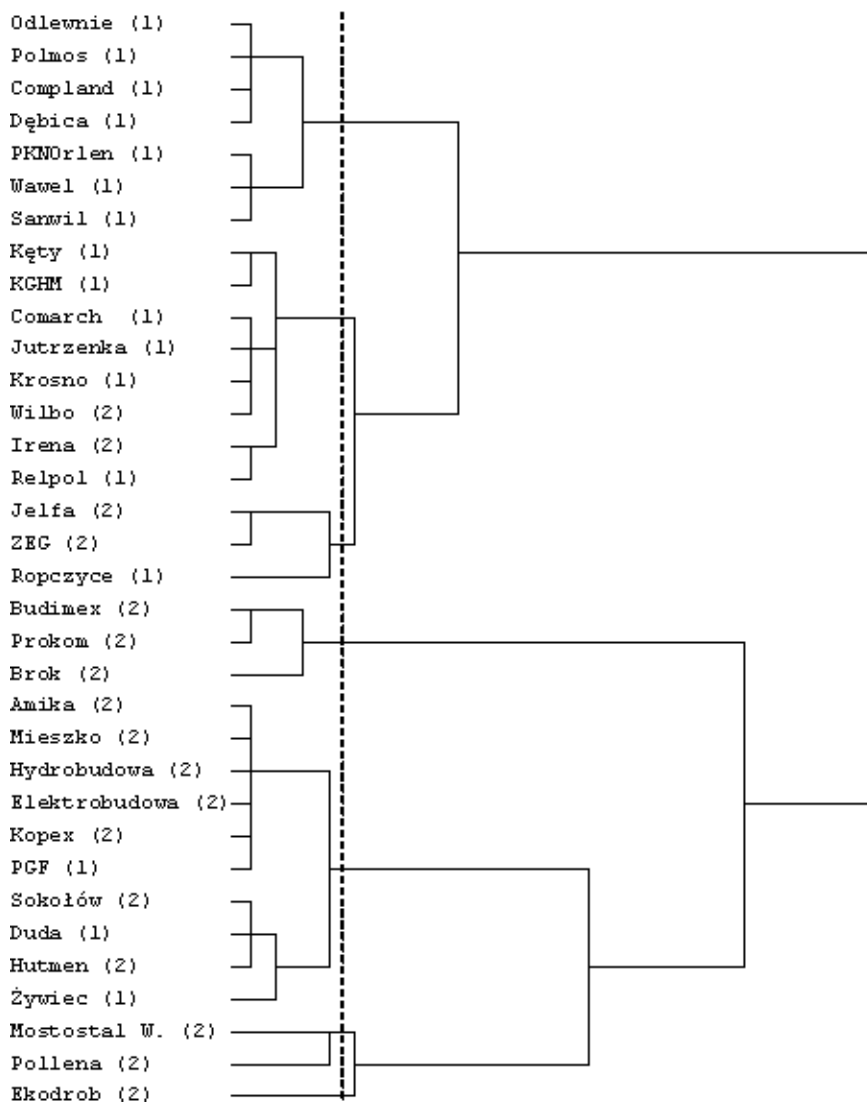
Otrzymaną funkcję LFD wykorzystano do prognozy przynależności do grup wybranych losowo 34 spółek. Dla spółek tych wykorzystano wartości wskaźników finansowych z I kwartału 2005.

Spółki, dla których wartość liniowej funkcji dyskryminacyjnej (1) są większe od 0, zostały zakwalifikowane do grupy I. Spółki, dla których wartość funkcji jest mniejsza od 0, przyporządkowano do grupy II. Skład portfela inwestycyjnego może być ustalony w oparciu o spółki, które zostały zaklasyfikowane do grupy I.

## WYKORZYSTANIE ANALIZY SKUPIEŃ I METODY GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH

Metoda głównych składowych może być wykorzystywana do zidentyfikowania wskaźników finansowych wpływających w znacznym stopniu na podział spółek na grupy walorów podobnych do siebie [Skórnik-Pokarowska, 2006]. Stąd też przeprowadzenie analizy otrzymanych składowych uzupełniane jest z reguły analizą skupień.

W pracy zastosowano metodę głównych składowych i analizę skupień do 34 spółek charakteryzowanych przez wskaźniki finansowe za I kwartał 2005 i sklasyfikowanych przez LFD. Wykorzystano standaryzowaną macierz wyjściowych wartości wskaźników, kwadrat odległości euklidesowej i hierarchiczną metodę grupowania Warda. Otrzymano podział na grupy spółek podobnych, który przedstawiono na Rysunku 1. Wyróżniono 7 skupień spółek podobnych do siebie z punktu widzenia analizy fundamentalnej. Można zauważyć, że najbardziej do siebie podobne spółki zostały zakwalifikowane przez funkcję dyskryminacyjną do tej samej grupy



Rysunek 1. Dendrogram otrzymany metodą Warda. Pionowa przerywana linia wyznacza 7 skupień spółek podobnych.

Kolejno, na podstawie standaryzowanej macierzy wskaźników charakteryzujących wybrane spółki, wyróżniono 2 składowe główne odpowiadające większym od jedności wartościom własnym i wyjaśniające łącznie 69% całkowitej zmienności wyjściowych zmiennych. W Tabeli 4 przedstawiono wartości współczynników korelacji między wyjściowymi zmiennymi a dwoma wyróżnionymi składowymi głównymi. Z pierwszą składową główną najsilniej skorelowane są wskaźniki ROE, ROA oraz RZob. Te wskaźniki najbardziej

różnicują badane spółki odnośnie dwóch pierwszych składowych głównych. Najslabiej z pierwszą składową skorelowany jest wskaźnik RZap.

Tabela 4. Macierz składowych głównych.

Wskaźnik	Składowa główna	
	1	2
Stopa zwrotu z kapitału własnego (ROE)	-0,742	0,377
Stopa zwrotu z aktywów (ROA)	-0,831	0,157
Wskaźnik płynności bieżącej (WPB)	-0,529	0,483
Rotacja należności (RN)	0,696	0,592
Rotacja zapasów (RZap)	-0,173	0,520
Rotacja zobowiązań (RZob)	0,836	0,404
Rotacja aktywów (RA)	0,577	0,695
Stopa zadłużenia (SZ)	0,594	-0,664
Wartość własna	3,42	2,11
Procent wyjaśnionej wariancji	42,7	26,3
Skumulowany % wyjaśnionej wariancji	42,7	69,1

Źródło: Obliczenia własne.

Obliczono średnie wartości wskaźników charakteryzujących się dużą zdolnością dyskryminacyjną dla poszczególnych skupień. Wyniki przedstawiono w Tabeli 5.

Tabela 5. Średnie wartości wskaźników w poszczególnych skupieniach.

Grupa	ROE	ROA	WPB	RN	RZob	RA	SZ
1	0,211	0,126	2,595	61,600	60,529	220,171	0,372
2	0,113	0,063	1,702	75,725	109,138	351,750	0,417
3	0,052	0,037	2,692	116,633	107,467	447,167	0,223
4	-0,060	-0,027	1,411	174,367	217,333	771,667	0,493
5	0,077	0,033	1,132	66,590	103,700	236,200	0,560
6	-0,525	-0,204	1,187	122,450	152,250	385,550	0,642
7	-0,937	-0,025	0,737	43,700	89,200	148,300	0,984

Źródło: obliczenia własne.

Zauważmy, że spółki należące do skupienia 1 zostały zaklasyfikowane przez funkcję dyskryminacyjną do pierwszej grupy. Średnie wartości wskaźników ROA i ROE są dla tej grupy najwyższe. Oznacza to, że spółki, które znajdują się w skupieniu 1 charakteryzują się wysokimi wartościami ROA i ROA. Dodatkowo, charakteryzują się one niskimi wartościami wskaźników RN, RZB i SZ. Można przypuszczać, że spółki, które należą do tego skupienia (Odlewnie, Polmos, Compland, Dębica, PKNOrlen, Wawel, Sanwil) są atrakcyjne dla inwestora i mogą być wzięte pod uwagę w konstrukcji portfela inwestycyjnego. Wysokimi wartościami wskaźników ROE i ROA charakteryzują się także spółki należące do skupienia 2 (Kęty, KGHM, Comarch, Jutrzenka, Krosno, Wilbo, Irena, Relpol).

Dla spółek tych wskaźniki RZob, RA i SZ są wyższe niż dla spółek w skupieniu 1. Spółki należące do skupienia 4 charakteryzują się niskimi wartościami wskaźników ROE i ROA. Wszystkie zostały zaklasyfikowane przez LFD do grupy II. Można uważać, że spółki te nie powinny znaleźć się w portfelu inwestycyjnym.

## WNIOSKI

Metody wielowymiarowej analizy danych lub analizy porównawczej mogą być narzędziem pomagającym w doborze spółek do średnioterminowego portfela inwestycyjnego.

Analiza dyskryminacyjna w przypadku kryterium podziału opartego na zysku przypadającym na jedną akcję, może być dobrą metodą pozwalającą na dokonanie wstępnej selekcji dużego zbioru spółek. Dodatkowe zastosowanie metody głównych składowych i analizy skupień pozwala na dokładniejsze zbadanie różnorodności rozważanych spółek i wyróżnienie konkretnych spółek, które mogą znaleźć się w portfelu inwestycyjnym.

Słaba skuteczność analizy dyskryminacyjnej, w przypadku, gdy kryterium podziału oparte jest na stopie zwrotu, wymaga dalszej analizy. Zastosowanie średniej stóp zwrotu z kilku scenariuszy może znacznie polepszyć otrzymane rezultaty.

## LITERATURA

- Altman E. I. (1968), Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy *Journal of Finance*, 23, str. 589-609
- Gatnar E. Klasyfikacja danych za pomocą pakietu statystycznego SPSS for Windows, Wydawnictwo PLJ, Warszawa
- Morrison D. F. (1990), Wielowymiarowa Analiza Statystyczna, PWN, Warszawa.
- Skórnik-Pokarowska U. (2006), Konstrukcja portfela skoncentrowanego jako efektywnego portfela inwestycyjnego, MPaR'05, Katowice 2006, str. 191-201
- Skórnik-Pokarowska U. Orłowski A. (2005), Konstruowanie portfela akcji na podstawie ekonometrycznych prognoz wskaźników finansowych spółek giełdowych, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne, Materiały z IX, Ogólnopolskiego Seminarium Naukowego*, Toruń, str. 53-59
- Tarczyński W. (1996), Analiza dyskryminacyjna na giełdzie papierów wartościowych, *Przegląd statystyczny, Zeszyt 1-2*
- Tarczyński W., Łuniewska M. (2004), Dywersyfikacja ryzyka na polskim rynku kapitałowym, Placet, Warszawa
- Tarczyński W., Łuniewska M. (2006), Metody wielowymiarowej analizy porównawczej na rynku kapitałowym, PWN, Warszawa
- Tarczyński W., Łuniewska M. (2006) Ograniczenie ryzyka inwestycji na rynku kapitałowym – dywersyfikacja pionowa i pozioma, MPaR'05, Katowice 2006, str. 219-227

**Application of the linear discriminant function and the principal component method to the selection of companies for the investment portfolio**

**Summary:** In the paper examples of application of the linear discriminant function (LDF) to the investment portfolio selection were discussed. It was shown that methods connected with the discriminant analysis may not always be effective. An example of a successful discriminant analysis application to portfolio selection was given. An example was given to show how the PCM and cluster analysis can be used in the diversity examination in the set of companies subject to linear discriminant function.

**Key words:** Discriminant analysis, PCM, cluster analysis, investment portfolio

Paweł Kobus, Robert Pietrzykowski  
Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW  
e-mail: pawel.kobus@statystyka.info

## EFEKT DŹWIGNI NA GPW W WARSZAWIE

**Streszczenie:** Do modelowania asymetrycznego wpływu dobrych i złych informacji na warunkową wariancję w szeregu stóp zwrotu najczęściej wykorzystuje się modele: EGARCH, AGARCH oraz GRJ-GARCH będące uogólnieniami modelu GARCH. W pracy rozważano zasadność stosowania modeli uwzględniających efekt dźwigni w warunkach GPW w Warszawie. Badania oparto na analizie dziennych stóp zwrotu dla indeksów: WIG, WIG 20 oraz MIDWIG. Uzyskane wyniki sugerują, że w przeciwieństwie do rynków rozwiniętych efekt dźwigni na GPW w Warszawie nie występuje (WIG, WIG 20) lub jest bardzo słaby (MIDWIG).

**Słowa kluczowe:** efekt dźwigni, GARCH

### WPROWADZENIE

Praca dotyczy jednego z aspektów modelowania szeregu stóp zwrotu z portfela akcji. Tym aspektem jest wpływ ostatnich informacji<sup>1</sup> na wielkość warunkowej wariancji. W modelach najczęściej stosowanych do modelowania szeregów stóp zwrotu o zmiennej wariancji ARCH [Engle 1982] oraz GARCH [Bollerslev 1986] zakłada się taki sam wpływ dobrych i złych informacji. Jednak w wielu badaniach empirycznych stwierdzono asymetrię wpływu dobrych i złych<sup>2</sup> informacji na warunkową wariancję, złe informacje powodowały zwiększenie wariancji podczas, gdy dobre zmniejszenie wariancji. Ta cecha szeregów stóp zwrotu znana jest pod nazwą efektu dźwigni. Pierwszymi i najbardziej popularnymi modelami [Piontek 2004] pozwalającymi na uwzględnienie asymetrycznego wpływu informacji są uogólnienia modelu GARCH: EGARCH [Nelson 1991], AGARCH [Engle i Ng 1993] oraz GJR-GARCH [Glosten i in. 1993].

Jak wspomniano efekt dźwigni został potwierdzony w badaniach empirycznych, jednak badania te dotyczyły giełd funkcjonujących na dojrzałych rynkach np. giełda w Nowym Jorku. Celem niniejszej pracy jest sprawdzenie w jakim stopniu efekt dźwigni występuje na warszawskiej GPW.

---

<sup>1</sup> Przez informację najczęściej rozumie się różnicę pomiędzy obserwowaną i oczekiwaną stopą zwrotu.

<sup>2</sup> Informacją dobrą jest stopa zwrotu wyższa od oczekiwanej, natomiast informacją złą jest stopa zwrotu niższa od oczekiwanej.

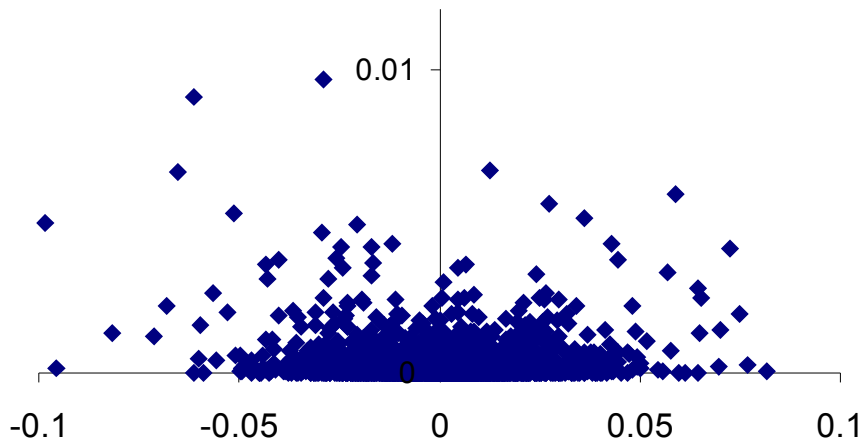
## FUNKCJA WPLYWU INFORMACJI

Pojęcie funkcji wpływu informacji NIF<sup>3</sup> zostało wprowadzone przez Engle'a i Ng'a [Engle i Ng 1993] i oznacza relację pomiędzy informacją z ostatniego momentu czasowego  $(t-1)$   $\varepsilon_{t-1}$  i warunkową wariancją w chwili  $t$ :

$$h_t = f(\varepsilon_{t-1}) \quad (1)$$

Równanie (1) jest pewnym uproszczeniem tzn. pominięto w nim wpływ warunkowej wariancji w poprzednich momentach czasowych.

Z rysunku 1 nie wynika, że istnieje jakakolwiek zależność między  $\varepsilon_t^2$  i  $\varepsilon_{t-1}$  dla kolejnych notowań WIG. Na podstawie analizy tego rysunku należałoby raczej stwierdzić, że nie ma żadnego związku między informacją z ostatniego momentu czasowego  $(t-1)$   $\varepsilon_{t-1}$  i warunkową wariancją w chwili  $t$   $h_t$ . Jest to jednak wniosek przedwczesny.

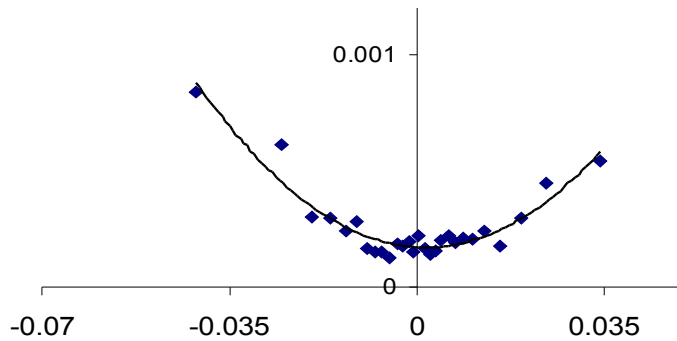


Rys. 1. Zależność pomiędzy  $\varepsilon_t^2$  i  $\varepsilon_{t-1}$  dla notowań WIG z dni 1994-10-02 do 2006-05-29. Źródło: opracowania własne.

Rysunek 2 został sporządzony w oparciu o te same dane co rysunek 1. Zostały one jednak poddane wstępnej analizie. W pierwszym etapie błędy losowe  $\varepsilon_{t-1}$  zostały pogrupowane w szereg rozdzielczy o stałej liczebności w klasach po

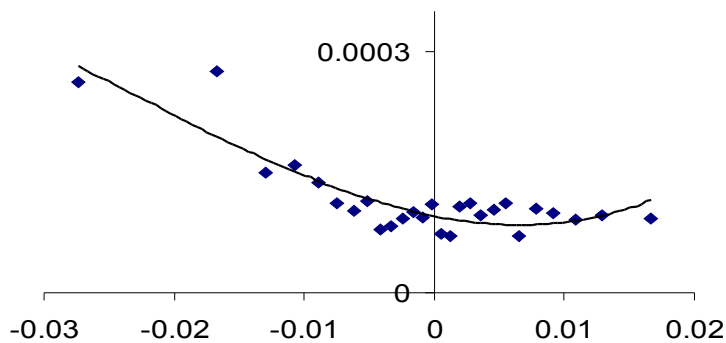
<sup>3</sup> Skrót NIF pochodzi od słów news impact function.

100 obserwacji, w drugim etapie dla tak wyznaczonych przedziałów klasowych zostały obliczone średnie dla  $\varepsilon_t^2$  i  $\varepsilon_{t-1}$ .



Rys. 2. Zależność pomiędzy średnimi wartościami  $\varepsilon_t^2$  i  $\varepsilon_{t-1}$  dla notowań WIG z dni 1994-10-02 do 2006-05-29. Źródło: opracowania własne.

Teraz związek między informacją z ostatniego momentu czasowego ( $t-1$ )  $\varepsilon_{t-1}$  i warunkową wariancją w chwili  $t$   $h_t$  jest oczywisty. Istnienie asymetrii jest jednak nadal problematyczne i wymaga dokładniejszej analizy. Dla porównania na rysunku 3 przedstawiono podobnie skonstruowany wykres przedstawiający notowania DJIA, w tym przypadku istnienie asymetrycznego funkcji wpływu informacji jest wyraźne.



Rys. 3. Zależność pomiędzy średnimi wartościami  $\varepsilon_t^2$  i  $\varepsilon_{t-1}$  dla notowań DJIA z dni 1994-10-02 do 2006-05-26. Źródło: opracowania własne.



W kolejnym rozdziale zostały formalnie wprowadzone najczęściej stosowane modele heteroskedastyczne.

## ROZPATRYWANE MODELE

Niech  $r_t$  oznacza stopę zwrotu obliczaną na podstawie wartości portfela akcji  $y_t$  w momencie  $t$  w stosunku do wartości w momencie  $(t - 1)$ :

$$r_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \quad (2)$$

Zgodnie z modelem ARCH(p) wartość stopy zwrotu w momencie  $t$  jest uzależniona od stóp zwrotu w poprzednich momentach czasowych i wartości zmiennej losowej  $\varepsilon_t$ <sup>4</sup>:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sqrt{h_t} z_t, \quad z_t \sim i.i.d. N(0, 1) \quad (3)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2.$$

W klasycznych specyfikacjach modelu ARCH przyjmuje się, że warunkowa wartość oczekiwana  $\mu_t$  jest równa zero i w konsekwencji pomijana, a  $\varepsilon_t = r_t$ .

Bollerslev [Bollerslev 1986] zaproponował uogólnienie modelu (3) wprowadzając model GARCH(p,q), w którym uzależnił warunkową wariancję dodatkowo od wariancji w poprzednich momentach czasowych:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}. \quad (4)$$

W praktyce najczęściej stosowany jest model GARCH(1,1):

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}. \quad (5)$$

W przypadku modeli ARCH(1) i GARCH(1,1) NIF przyjmuje następującą postać:

$$f(\varepsilon_{t-1}) = A + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2. \quad (6)$$

Przy czym stała  $A$  w modelu ARCH(1) wynosi  $\omega$  natomiast w modelu GARCH(1,1)  $A = \omega + \beta_1 h_{t-1}$ . Ponieważ funkcja (6) jest parabolą symetryczną wokół zera to tym samym nie pozwala na modelowanie efektu dźwigni.

<sup>4</sup>Ponieważ rozkład błędów nie był przedmiotem głównego zainteresowania, w pracy ograniczono się do przypadku błędów losowych o rozkładzie normalnym.

W 1993 Engle i Ng zaproponowali pod nazwą AGARCH [Engle i Ng 1993] uogólnienie modelu GARCH pozwalające modelować efekt dźwigni, gdzie:

$$h_t = \omega + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} - \alpha_1^*)^2 + \beta_1 h_{t-1}. \quad (7)$$

W tym przypadku NIF przyjmuje następującą postać:

$$f(\varepsilon_{t-1}) = A + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} - \alpha_1^*)^2. \quad (8)$$

Podobnie jak w przypadku modelu GARCH jest to parabola, jednak w tym przypadku osiąga ona minimum dla  $\varepsilon_{t-1} = \alpha_1^*$ .

W tym samym roku Glosten i in. zaproponowali inne uogólnienie modelu GARCH znane pod nazwą GJR-GARCH, gdzie:

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^* \varepsilon_{t-1}^2 I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} + \beta_1 h_{t-1} \quad (9)$$

gdzie  $I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} = 1$  jeżeli  $(\varepsilon_{t-1} < 0)$  i 0 w przeciwnym razie.

Dla modelu GJR-GARCH NIF przyjmuje postać:

$$f(\varepsilon_{t-1}) = A + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^* \varepsilon_{t-1}^2 I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)}. \quad (10)$$

W przeciwieństwie do wcześniejszych modeli wykres tej funkcji nie jest parabolą lecz złożeniem ramion dwóch różnych parabol. Jeżeli  $\varepsilon_{t-1} < 0$  to współczynnik przy  $\varepsilon_{t-1}^2$  wynosi  $\alpha_1 + \alpha_1^*$ , w przeciwnym przypadku jest równy  $\alpha_1$ . Przy czym minimum jest osiągnięte dla  $\varepsilon_{t-1} = 0$ .

W modelu EGARCH [Nelson 1991] zaproponowanym przez Nelsona logarytm warunkowej wariancji wyraża się wzorem:

$$\log h_t = \omega + \alpha_1^* \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \alpha_1 \left( \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right| - E \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right| \right) + \beta_1 \log h_{t-1} \quad (11)$$

Jeżeli  $z_{t-1} = \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}$  podlega standardowemu rozkładowi normalnemu, to wyrażenie (11) przyjmuje postać:

$$\log h_t = \omega + \alpha_1^* \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \alpha_1 \left( \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \beta_1 \log h_{t-1}, \quad (12)$$

zaś NIF może być przedstawiona jako:

$$f(\varepsilon_{t-1}) = A \exp\left(\alpha_1^* \varepsilon_{t-1} + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}|\right) \frac{1}{\sqrt{h_{t-1}}}, \quad (13)$$

przy czym stała  $A = h_{t-1}^{\beta_1} \exp\left(\omega - \alpha_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$ .

## OPIS BADAŃ EMPIRYCZNYCH

W pracy posłużono się stopami zwrotu obliczonymi dla podstawowych indeksów GPW w Warszawie: WIG, WIG 20, MIDWIG oraz dla porównania stopami zwrotu indeksu DJIA. Stopy zwrotu zostały obliczone na podstawie kursów zamknięcia: dla indeksów GPW w Warszawie z dni od 1998-01-05 do 2006-05-29 i dla indeksu DJIA z dni od 1998-01-20 do 2006-05-26, w sumie po 2106 obserwacji stóp. Wybór daty początkowej związany jest z rozpoczęciem notowania indeksu MIDWIG, zaś przesunięcie dla indeksu daty początkowej dla DJIA wynika z różnic w liczbie dni bez notowań na obydwu giełdach.

Aby określić w jakim stopniu można mówić o występowaniu efektu dźwigni na warszawskiej GPW dla szeregów stóp zwrotu wymienionych indeksów oszacowano następujące modele: GARCH, AGARCH, GRJ-GARCH, EGARCH i EGARCH z wartością parametru odpowiedzialnego za asymetrię NIF  $\alpha_1^* = 0$ , model ten w dalszej części pracy oznaczano jako rEGARCH. Wybrano dwie miary dopasowania: logarytm z funkcji wiarygodności LLF i kryterium informacji Akaike AIC [Akaike 1973].

$$AIC = -2LLF + 2K, \quad (14)$$

Gdzie  $K$  oznacza liczbę parametrów. Jakość dopasowania jest tym lepsza im niższa jest wartość AIC.

Tabela 1. Wartości LLF dla rozpatrywanych modeli

Model	Liczba parametrów	WIG	WIG 20	MIDWIG	DJIA
GARCH	4	6115,04	5714,61	6661,55	6689,19
AGARCH	5	<b>6116,62</b>	5715,02	6665,75	6719,76
GJR-GARCH	5	6116,61	<b>5715,69</b>	<b>6666,07</b>	6725,60
EGARCH	5	6114,01	5713,01	6664,15	<b>6734,26</b>
rEGARCH	4	6112,60	5712,37	6662,99	6681,40

Źródło: obliczenia własne.

Analizując wartości miar jakości dopasowania modeli przedstawione w tabelach 1 i 2 można stwierdzić, że w przypadku wszystkich indeksów najlepsze okazały się modele uwzględniające asymetryczność funkcji wpływu informacji.

Tabela 2. Wartości AIC dla rozpatrywanych modeli

Model	Liczba parametrów	WIG	WIG 20	MIDWIG	DJIA
GARCH	4	-12222,08	-11421,22	-13315,10	-13370,38
AGARCH	5	<b>-12223,24</b>	-11420,04	-13321,50	-13429,52
GJR-GARCH	5	-12223,22	<b>-11421,38</b>	<b>-13322,14</b>	-13441,20
EGARCH	5	-12218,02	-11416,02	-13318,30	<b>-13458,52</b>
rEGARCH	4	-12217,20	-11416,74	-13317,98	-13354,80

Źródło: obliczenia własne.

W przypadku indeksów notowanych na GPW w Warszawie najlepsze okazały się modele AGARCH i GJR-GARCH, natomiast w przypadku DJIA najlepszym modelem jest EGARCH.

Jednak, to że modele uwzględniające asymetrię są lepiej dopasowane nie jest wystarczającą podstawą do wyciągnięcia wniosku o występowaniu efektu dźwigni w szeregach stóp zwrotu z indeksów notowanych na GPW w Warszawie. Należy jeszcze sprawdzić czy różnica w dopasowaniu jest wystarczająco duża. Formalnie należałoby w tym celu przetestować hipotezę o zerowej wartości parametru odpowiedzialnego za asymetrię w poszczególnych modelach.

$$H_0 : \alpha_1^* = 0. \quad (15)$$

Do weryfikacji tej hipotezy można posłużyć się testem bazującym na ilorazie funkcji wiarygodności LRT (Likelihood Ratio Test) [Greene 2000]

$$LRT = 2(LLF_1 - LLF_0), \quad (16)$$

W przypadku, gdy hipoteza jest prawdziwa, statystyka LRT ma asymptotycznie rozkład  $\chi^2_{(p_1 - p_0)}$ , gdzie  $p_1$  i  $p_0$  oznaczają liczby parametrów odpowiednich modeli. Zastosowanie tego testu do porównania dwóch modeli, z których jeden zawiera parametr odpowiedzialny za modelowanie efektu dźwigni, zaś drugi<sup>5</sup> nie, powinno dać odpowiedź co do występowania efektu dźwigni. Modele AGARCH oraz GJR-GARCH były porównywane z modelem GARCH, natomiast model EGARCH z modelem rEGARCH.

<sup>5</sup> Porównywany model 0 powinien zawierać się w modelu 1.

Tabela 3. Wartości statystyki testowej LRT dla hipotezy  $H_0 : \alpha_1^* = 0$ .

Model	WIG	WIG 20	MIDWIG	DJIA
AGARCH	3,163	0,818	<b>8,404</b>	<b>61,124</b>
GJR-GARCH	3,144	2,163	<b>9,041</b>	<b>72,808</b>
EGARCH	2,821	1,275	2,322	<b>105,711</b>

Źródło: opracowania własne.

Wartość krytyczna dla wszystkich obliczonych wartości statystyk testowych jest taka sama  $\chi^2_{(0.05,1)} = 3,8415$ . Z trzech rozpatrywanych indeksów notowanych na GPW w Warszawie tylko dla MIDWIG odrzucana jest hipoteza o braku asymetrii, na poziomie istotności 0,05. Warto jednocześnie zauważyć, że nawet w tym przypadku wartości statystyk testowych dla DJIA są wielokrotnie wyższe.

## PODSUMOWANIE

Przeprowadzone analizy wykazały, że tylko w przypadku indeksu MIDWIG można mówić o występowaniu efektu dźwigni. Jednak nawet w tym przypadku siła wspomnianego efektu jest o wiele mniejsza niż w przypadku indeksu DJIA. Pomimo, że z uwagi na mały zakres przeprowadzonych badań nie można formułować zbyt zdecydowanych wniosków to uzyskane wyniki sugerują, że w warunkach GPW w Warszawie stosowanie modeli uwzględniających efekt dźwigni nie jest konieczne.

## LITERATURA

- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, 2nd Inter. Symp. On Information Theory (Petrov, B.N. and Csaki, F. Eds.), Akademiai Kiado, Budapest, 267-281.
- Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Engle, R. (1982), "Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, 987-1008.
- Engle, Robert F., and Victor K. Ng, (1993), Measuring and Testing the Impact of News on Volatility, *Journal of Finance* 48, 1749-1778.

Glosten, Lawrence R., Ravi Jagannathan, and David E. Runkle, (1993), On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Returns on Stocks, *Journal of Finance* 48, 1791–1801.

Greene, William H. (2000), *Econometric Analysis*, 150-154.

Nelson, Daniel B., 1991, Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica* ,59, 347–370.

Piontek, K. (2004), „Modelowanie efektu dźwigni w finansowych szeregach czasowych” *Materiały Konferencyjne Akademii Ekonomicznej w Krakowie – Nauki Finansowe wobec współczesnych problemów gospodarki polskiej, tom IV (Rynki Finansowe)*, pod red. Jana Czekaja, Kraków 2004, str. 129 – 142

### **Leverage effect on Warsaw Stock Exchange**

**Summary:** Models most frequently used for modelling asymmetrical impact of good and bad return news on volatility response are generalizations of GARCH namely: EGARCH, AGARCH and GRJ-GARCH. In this paper support for application of those models is considered in the case of Warsaw Stock Exchange. Researches are based on analysis daily return series of indexes: WIG, WIG 20, MIDWIG. Results indicate, that in contrast to developed markets there is very weak evidence supporting hypothesis of leverage effect. In the case of WIG and WIG 20 the leverage effect is insignificant and for MIDWIG weak comparing for example with DJIA, though significant.

**Key words:** leverage effect, GARCH

Jolanta Kondratowicz-Pozorska  
Katedra Statystyki Matematycznej, Akademia Rolnicza w Szczecinie  
e-mail: jpozorska@e-ar.pl

## **OCENA ZMIAN POSTAW KONSUMENTÓW ZDROWEJ ŻYWNOŚCI (NA PODSTAWIE ANALIZY MACIERZY PRZEPIŁYWÓW)**

**Streszczenie:** W pracy zaprezentowano adaptację pośredniej metody pozycjonowania, tj. macierzy przepływów do wyznaczania postaw zachowań konsumentów zdrowej żywności pochodzących z różnych grup zamożności. Do badania wykorzystano badania panelowe prowadzone w latach 2002 i 2005 na wybranej próbie konsumentów w zachodniopomorskim.

**Słowa kluczowe:** postawa konsumenta, macierz przepływów, badania marketingowe

### **WSTĘP**

O poziomie i strukturze konsumpcji decyduje wiele czynników, również podlegających ciągłym procesom rozwojowym. Czynniki te można podzielić na: ekonomiczno-organizacyjne, biologiczne, demograficzne, społeczno-zawodowe i psychospołeczne [Urban i in. 2000]. Konsument, dokonując wyboru produktu żywnościowego - pomimo, że poddani są presji tych czynników - kierują się także własną wolą wyboru określonych cech towaru.

W artykule autorka próbowała określić, jakie są drogi przepływu konsumentów artykułów żywnościowych ujętych w czterech grupach badawczych w zależności od wysokości dochodów kupującego (w przeliczeniu na jedną osobę). W ten sposób sprawdzono na ile potwierdza się hipoteza, że wraz ze wzrostem dochodów zmienia się struktura wyżywienia i jakość spożywanych produktów.

Wybrana droga badawcza tj. macierz przejść należy do pośrednich metod oceny pozycji [Rószkiewicz 2002] i jest dość często wykorzystywana w badaniach marketingowych, między innymi do pomiaru przepływu konsumentów między wybranymi markami [por. Kusińska 1996].

Celem pracy jest przedstawienie dróg przepływów konsumentów artykułów żywnościowych w poszczególnych grupach asortymentowych, a także ukazanie kierunku zmian i ich natężenia. Do badań wykorzystano dane z województwa zachodniopomorskiego gromadzone w latach 2002 – 2005 na próbie wstępnej liczącej 150 osób.

## KONCEPCJA ANALIZY PRZEPŁYWÓW

Istota tej metody polega na takim podziale badanej zbiorowości, aby był on zupełny, uwzględniał wszystkie stany, jakie mogą przybierać elementy tej zbiorowości i na badaniu przepływów między tymi stanami. Wyznaczenie w badaniu szczególnej roli dla produktów zdrowej żywności wynika z faktu, że jest to żywność postrzegana jako luksusowa, o wysokiej jakości i ze względu na cenę przeznaczona dla określonej, wąskiej grupy ludzi.

Zupełność w odniesieniu do rynku artykułami żywnościowymi osiągamy – przy uwzględnieniu powyższego kryterium - analizując równocześnie trzy stany:

- zakup artykułów żywnościowych przy nie uwzględnieniu w diecie produktów zdrowej żywności [**BZ**],
- zakup artykułów żywnościowych przy częściowym uwzględnieniu w diecie produktów zdrowej żywności [**CZ**],
- zakup artykułów żywnościowych przy zdecydowanym uwzględnieniu w diecie produktów zdrowej żywności [**WZ**].

Każdy z tych stanów może być dezagregowany o tyle, o ile nie pozostawiamy poza analizą żadnej z podzbiorowości. Inaczej analiza przepływów nie ma sensu. Stany i przepływy między stanami, jakie obserwujemy na rynku artykułami spożywczymi można przedstawić schematycznie:

**BZ/CZ** – przejście konsumentów z grupy pierwszej do drugiej, czyli robiąc zakupy klienci zaczynają zwracać uwagę, by nabywać przynajmniej niektóre produkty określone jako zdrowa żywność,

**BZ/WZ** – przepływ konsumentów z grupy pierwszej do trzeciej, czyli robiąc zakupy klienci zaczynają zwracać szczególną uwagę, by nabywać produkty określone jako zdrowa żywność,

**CZ/WZ** – przepływ konsumentów z grupy drugiej do trzeciej, czyli robiąc zakupy klienci zaczynają zwracać szczególną uwagę, by nabywać w większości produkty określone jako zdrowa żywność,

**WZ/CZ** – przepływ konsumentów z grupy trzeciej do drugiej, czyli robiąc zakupy klienci są zainteresowani, by nabywać przynajmniej niektóre produkty określone jako zdrowa żywność,

**CZ/BZ** – przepływ konsumentów z drugiej do pierwszej grupy, czyli odejście od zakupu artykułów zdrowej żywności,

**WZ/BZ** – przepływ konsumentów z trzeciej do pierwszej grupy, czyli odejście od zakupu artykułów zdrowej żywności, mimo, że poprzednio właśnie na nie zwracano szczególną uwagę.



Jak wynika z zapisu mamy 6 podstawowych przepływów. Każdy z nich reprezentuje specyficzny przejaw funkcjonowania omawianego rynku. Typowe wykorzystanie analizy przepływów polega na tym, iż rozróżnia się trzy stany, opisane wyżej. Każda osoba z rozpatrywanej zbiorowości udzieliła odpowiedzi kwalifikującej ją do jednego z tych 3 stanów. Przepływy konsumentów między poszczególnymi stanami może być przedstawiony za pomocą macierzy przejścia  $\mathbf{P}$ .

$$P = \begin{bmatrix} P_{BZBZ} & P_{BZCZ} & P_{BZWZ} \\ P_{CZBZ} & P_{CZCZ} & P_{CZWZ} \\ P_{WZBZ} & P_{WZCZ} & P_{WZWZ} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Prawdopodobieństwo zmiany stanu  $P_{ij}$  jest definiowane jako:

$$P_{ij} = \frac{F_{ij}}{S_i}, i, j = BZ, CZ, WZ \quad (2)$$

$F_{ij}$  - liczba osób, które są zaobserwowane w stanie  $i$  w momencie  $t-1$  oraz w stanie  $j$  w momencie  $t$ ,

$S_i$  - całkowita liczba osób obserwowanych w stanie  $i$  w momencie  $t-1$ .

Dla przykładu  $P_{CZWZ}$  reprezentuje prawdopodobieństwo, iż pewny konsument - obserwowany w 2005 roku - był nabywcą artykułów żywnościowych, wśród których dominowały te określane jako zdrowa żywność [w stanie WZ] pod warunkiem, że w 2002 roku był konsumentem artykułów, wśród których tylko niektóre były określane jako zdrowa żywność [w stanie CZ]

## WYNIKI BADAŃ

Do analizy zagadnienia wykorzystano dane, które zebrano w roku 2002 i 2005<sup>1</sup>. W tym celu 150 osób z województwa zachodniopomorskiego poddano badaniom ankietowym. Uwzględnione w rozważaniach dodatkowe kryterium dotyczące wysokości dochodów, pozwoliło określić na ile posiadane środki finansowe warunkują zachowania konsumentów.

Warunkiem koniecznym pozycjonowania za pomocą macierzy przejść jest prowadzenie systematycznego zachowania nabywców w formie badania panelowego. Toteż, aby można było zastosować podaną w tytule artykułu macierz

<sup>1</sup> Badania przeprowadzono w ramach grantu wewnątrzuczelnianego pt. *Metody ilościowe jako narzędzie promocji artykułów polskiej gospodarki żywnościowej*

przejsć potrzebne były wyniki z dwóch okresów czasowych tzn. odpowiedzi na te same pytania, zadane tym samym osobom, np. na początku 2002 roku i w roku 2005 roku. W wyniku różnych sytuacji, niezależnych od badacza, ostatecznie uzyskano 120 poprawnych wyników badań.

Przeprowadzona analiza pozwala określić, jaka część badanej zbiorowości jest „wierna” wybranemu raz sposobowi odżywiania się, a jaka „przemieszcza się” pomiędzy innymi sposobami. Z kolei wadą wybranej metody jest to, że nie uwzględnia ona przepływów dokonanych przez konsumentów w trakcie, pomiędzy okresami badawczymi, ani też nie mówi, jak często klienci zmienili charakter nabywanych towarów (tzn. nie mówi ile razy zmieniali stany w okresie od wiosny 2002 do wiosny 2005 roku).

W wyniku przeprowadzonych obserwacji zebrany materiał badawczy można przedstawić w formie macierzy przejść  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_4$ , które odpowiadają tablicom 1, 2, 3 i 4. Kolejne tabele dotyczą czterech grup klientów, tzn:

tabela 1 dotyczy klientów, którzy w momencie dokonywania zakupów należeli do grupy osób z dochodem nie przekraczającym 550 złotych na osobę,

tabela 2 dotyczy klientów, którzy w momencie dokonywania zakupów należeli do grupy osób z dochodem nie przekraczającym 1000 złotych na osobę,

tabela 3 dotyczy klientów, którzy w momencie dokonywania zakupów należeli do grupy osób z dochodem nie przekraczającym 2000 złotych na osobę,

tabela 4 dotyczy klientów, którzy w momencie dokonywania zakupów należeli do grupy osób z dochodem przekraczającym 2000 złotych na osobę.

Tab.1. Macierz przepływów klientów (z pierwszej grupy dochodowej) pomiędzy wybranymi sposobami nabywania artykułów żywnościowych z uwzględnieniem udziału zdrowej żywności

Przejsie od stanu	Przejsie do stanu			Razem
	BZ	CZ	WZ	
BZ	0,77	0,19	0,04	1,00
CZ	0,42	0,52	0,06	1,00
WZ	0,28	0,64	0,08	1,00

Źródło: obliczenia własne

Tab.2. Macierz przepływów klientów (z drugiej grupy dochodowej) pomiędzy wybranymi sposobami nabywania artykułów żywnościowych z uwzględnieniem udziału zdrowej żywności

Przejsie od stanu	Przejsie do stanu			Razem
	BZ	CZ	WZ	
BZ	0,43	0,46	0,11	1,00
CZ	0,31	0,49	0,10	1,00
WZ	0,19	0,68	0,13	1,00

Źródło: obliczenia własne

Tab.3. Macierz przepływów klientów (z trzeciej grupy dochodowej) pomiędzy wybranymi sposobami nabywania artykułów żywnościowych z uwzględnieniem udziału zdrowej żywności

Przejście od stanu	Przejście do stanu			Razem
	BZ	CZ	WZ	
BZ	0,18	0,57	0,25	1,00
CZ	0,06	0,71	0,23	1,00
WZ	0,16	0,65	0,19	1,00

Źródło: obliczenia własne

Tab.4. Macierz przepływów klientów (z czwartej grupy dochodowej) pomiędzy wybranymi sposobami nabywania artykułów żywnościowych z uwzględnieniem udziału zdrowej żywności

Przejście od stanu	Przejście do stanu			Razem
	BZ	CZ	WZ	
BZ	0,15	0,60	0,25	1,00
CZ	0,05	0,65	0,30	1,00
WZ	0,02	0,78	0,20	1,00

Źródło: obliczenia własne

Z tablicy 1 wynika, że niewielkie jest prawdopodobieństwo zmiany zachowań klientów pierwszej grupy. W zdecydowanej większości badani, którzy kupowali artykuły żywnościowe bez zwracania uwagi, by była to żywność zdrowa, nadal tego nie postrzega (77%), ewentualnie czasami nabywają zdrową żywność (19%). Prawie połowa osób (52%), która czasami kupowała lepszy towar nadal tak czyni, a tylko 6% zdecydowało, że warto, aby zdrowa żywność stanowiła większą część ich zakupów i codziennej diety. Prawdopodobnie wysoka cena wyróżnionych artykułów sprawiła, że 68% kupujących zdrową żywność zupełnie odeszła od tego lub nabywa ten towar tylko czasami (28%).

Druga tablica pokazuje podobne zachowania klientów jak w pierwszej grupie dochodowej. Przepływy pomiędzy poszczególnymi stanami są stosunkowo niewielkie. Jednak na uwagę zasługuje fakt, że ci klienci, którzy już raz zdecydowali się na to, iż będą przynajmniej niektóre artykuły kupować z tzw. zdrowej żywności czynią tak dalej (46%), a co dziesiąty nawet rozszerzył listę tych dóbr.

Tablica 3 pokazuje już zdecydowane zmiany w preferencjach klientów. Coraz rzadziej kupują oni towary bez uwzględniania ich wpływu na swoje zdrowie. W ciągu 3 lat zmieniły się zasady decydujące o kupnie danego towaru; aż 57% klientów wprowadza czasami na listę zakupów zdrową żywność, a co czwarty - stwierdził, że zdecydowanie preferuje już tylko i wyłącznie taką żywność. Prawie trzy czwarte osób, które w swoim menu miało czasami produkty zwane zdrową żywnością kontynuuje ten sposób żywienia; tylko 6% osób przestało zwracać całkowicie uwagę na takie produkty, ale w zamian 23% zdecydowanie opowiedziało się za zdrową żywnością.

Coraz większe zainteresowanie preferowaną grupą artykułów żywnościowych wykazują klienci z czwartej klasy dochodów (tab.4). Co prawda 78% klientów kupujących dotychczas w zdecydowanej większości zdrową żywność „uciekło” do stanu niższego (CZ), a 2% do stanu najniższego (BZ), ale mimo to, w tej grupie zainteresowanie zdrową dietą jest największe. Spośród tych, którzy nie zwracali uwagi na to, co kupują i jedzą 60% badanych podało, że czasami kupuje już zdrowszą żywność, a 25% - wyłącznie takie artykuły. Tylko 5% kupujących dotychczas od czasu do czasu zdrową żywność przestało to czynić, w zamian 30% powiększyło asortyment zdrowej żywności w swojej diecie.

Na temat prawdopodobieństwa przepływu ze stanu WZ do stanu BZ można powiedzieć, że nie jest to zjawisko pozytywne. Spora część producentów zdrowej żywności traci odbiorców na rzecz swoich konkurentów z powodu wysokich cen, a także ze względu na to, że nie wszędzie taki towar jest dostępny. Świadczy to też o dość słabej sile nabywczej zachodniopomorskiego klienta. Jednak mimo tego zjawiska spora część badanej zbiorowości zwraca się ku zdrowej żywności (tab. 3 i 4); są to jednak osoby, których dochód - jak na polskie warunki - jest stosunkowo wysoki.

## ZAKOŃCZENIE

W ocenie i analizie postaw klientów użyteczne są ilościowe metody marketingowe, a w szczególności pośrednie i bezpośrednie metody oceny pozycji. W pracy zaprezentowano macierz przejść jako metodę pośrednią oceny zachowań klientów przy nabywaniu artykułów spożywczych z uwzględnieniem czterech wybranych klas zamożności. Pomiar pośredni pozwolił na określenie udziału poszczególnych grup artykułów spożywczych w rynku. Udział ten można określić poprzez oszacowanie tzw. współczynników lojalności konsumentów wobec poszczególnych grup produktów. W macierzach przejść  $P_1 - P_4$ , rejestruje się przepływy konsumentów między poszczególnymi stanami odzwierciedlającymi sposoby nabywania żywności. Ponieważ wyniki dotyczą efektów określonych postawi, ale nie opisują przyczyn takich zachowań, muszą być wsparte metodami bezpośrednimi, które dostarczą informacji o czynnikach, które warunkują taką a nie inną postawę klienta/konsumenta na rynku. W związku z tym dalsza analiza tematu będzie pogłębiona o badania z uwzględnieniem metod bezpośrednich.

## LITERATURA:

- Biuletyn informacyjny ARR, Połagra (2003), Warszawa  
Kusińska A. (1996) Segmentacja rynku i typologia konsumentów jako przedmiot badań marketingowych [w: Metody badań marketingowych], Konferencja katedr marketingu i handlu uczelni i wydziałów ekonomicznych. Kraków

Poczta W., Wysocki F.(red.) (2002) Zróżnicowanie regionalne gospodarki żywnościowej w Polsce w procesie integracji z Unią Europejską, Wyd. AR, Poznań  
Rószkiewicz M. (2002) Metody ilościowe w badaniach marketingowych, PWN, Warszawa  
Urban S., Szlachta K. (2000) Ekonomia i organizacja handlu żywnością. Wyd. AE, Wrocław.

**Change estimation in manner`s of healthy food consumers  
(bases on analysis of flow matrix)**

**Summary:** Author presents adaptation of indirect method of positioning, meaning using flow matrix to get basic behaviors' of healthy food consumers. Consumers have different rich status. Author uses panel research made in years 2002 and 2005. Research was made on chosen group of people in West Pomerania region

**Key words:** manner of consumer, flow matrix, marketing research

Joanna Landmesser  
Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW  
e-mail: jgwiadza@mors.sggw.waw.pl

## **EFEKT DNIA TYGODNIA NA GIEŁDZIE PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE**

**Streszczenie:** W pracy zbadano występowanie efektu dnia tygodnia na Giełdzie Papierów Wartościowych S.A. w Warszawie (GPW) w okresie od stycznia 2002 do grudnia 2005. W tym celu posłużono się modelami autoregresyjnymi z warunkową heteroskedastycznością GARCH. Okazało się, że efekt sezonowości dziennej jest obecny w wyraźny sposób w równaniach na średnią i w słabszy w równaniach na wariancję warunkową. W równaniach średniej statystycznie istotne okazały się wysokie stopy zwrotu osiągnięte w poniedziałki i piątki. W wypadku wariancji warunkowej wychwycono podwyższoną zmienność poniedziałkową.

**Słowa kluczowe:** efekt dnia tygodnia, model GARCH

### **WSTĘP**

Badania empiryczne finansowych szeregów stóp zwrotu wykazują występowanie w tych szeregach efektu skupienia się wariancji, grubych ogonów oraz skośności rozkładów, długoterminowej zależności danych, zjawiska kumulacji informacji podczas okresów zamknięcia rynków finansowych, które uzewnętrznia się w zwiększonej wariancji zmian cen w momencie otwarcia rynku, i efektu dźwigni, wyrażającego się w tendencji do występowania negatywnej korelacji zmian cen instrumentów finansowych ze zmianami w ich wariancji. Jedną z najczęściej analizowanych anomalii rozkładu stóp zwrotu jest efekt dnia tygodnia, dotyczący różnic w stopach zwrotu z inwestycji w instrumenty finansowe w kolejnych dniach tygodnia. Wykazano na przykład, że na rynku amerykańskim przeciętne poniedziałkowe stopy zwrotu są znacznie niższe od przeciętnych stóp zwrotu w pozostałe dni tygodnia, w dodatku przyjmują one średnio wartość ujemną [Cross 1973, French 1980]. Dalsze badania [Rogalski 1984, Harris 1986] koncentrowały się na znalezieniu odpowiedzi na pytanie, kiedy dokładnie realizują się zaobserwowane negatywne stopy zwrotu: czy między zamknięciem w piątek a otwarciem w poniedziałek, czy może podczas trwania sesji w poniedziałek? Dodatkowo w wielu badaniach zwrócono uwagę na fakt, iż średnie piątkowe stopy zwrotu są wyższe w porównaniu do pozostałych dni.

Rozkład stóp zwrotu w ciągu tygodnia analizowano w odniesieniu do rynków kapitałowych w różnych państwach. Potwierdzono zachodzenie „efektu poniedziałku” w Kanadzie i w Wielkiej Brytanii [Jaff, Westerfield 1985] oraz zauważono efekt ujemnych wtorkowych stóp zwrotu w Australii. Badanie efektu

dnia tygodnia we Francji i we Włoszech pozwoliło na zidentyfikowanie ujemnych wtorkowych stóp zwrotu. Zależności w układzie stóp zwrotu dla walorów notowanych na warszawskiej GPW badli m.in. Szyszka [Szyszka 1999], który zaobserwował dodatnie przeciętne poniedziałkowe stopy i ujemne wtorkowe, oraz Kompa i Witkowska [Kompa, Witkowska 2006], postulujący występowanie istotnie różniących się od zera dodatnich poniedziałkowych i dodatnich piątkowych stóp zwrotu.

Od czasu ukazania się pracy Engle'a [Engle 1982] na temat modeli autoregresyjnych z warunkową heteroskedastycznością ARCH, skonstruowano wiele modeli typu GARCH, szeroko stosowanych do analizy zmienności stóp zwrotu, do badania ich struktury czasowej, jak również występowania efektu dnia tygodnia. French, Schwert i Stambaugh [French i in. 1987] przebadali relację pomiędzy cenami akcji i ich zmiennością, dochodząc do wniosku, że stopy zwrotu są ujemnie skorelowane z ich wariancją. Natomiast Nelson [Nelson 1991] oraz Glosten, Jagannathan i Runkle [Glosten i in. 1993] dowodzili, że dodatnie nieoczekiwane zwroty powodują redukcję w wariancji warunkowej, podczas gdy ujemne wywołują jej wzrosty.

Analizę wariancji stóp zwrotu z uwzględnieniem efektu dnia tygodnia podjęli m.in. Berument, Kyimaz [Berument, Kyimaz 2001] oraz Apolinario, Santana, Sales i Caro [Apolinario i in. 2006]. Autorzy ci badali sezonowość dzienną za pomocą różnych wariantów modeli GARCH. Wydaje się, że wskazanie ścisłych reguł rządzących wariancją stóp zwrotu mogłoby mieć istotne znaczenie w takich sferach zastosowań, jak hedging, wycena opcji, czy też choćby w ramach zwykłych działań spekulacyjnych.

Celem niniejszej pracy jest sprawdzenie, czy w szeregach finansowych obserwowanych na GPW w Warszawie występują efekty dnia tygodnia.

## PREZENTACJA DANYCH EMPIRYCZNYCH

Wykorzystane w badaniach empirycznych dane statystyczne pochodzą z GPW w Warszawie. Baza danych o częstotliwości dziennej obejmuje okres czterech lat, od 2.01.2002 do 30.12.2005. Liczebność próby wynosi 1006 obserwacji. Informacje dotyczą indeksów giełdowych WIG, WIG20, MIDWIG i TECHWIG oraz notowań spółek KGHM, PeKaO, PKN Orlen i Prokom. Przedmiotem modelowania były logarytmiczne dzienne stopy zwrotu dla indeksów oraz kursów akcji, wyznaczone na podstawie wzoru  $r_t = 100 \cdot \ln(P_t / P_{t-1})$ , gdzie  $P_t$  oznacza poziom indeksu lub kurs zamknięcia dla akcji w chwili  $t$ .

Obliczone dzienne stopy zwrotu pogrupowano w zależności od dnia tygodnia, w którym przypadły. Dla każdej grupy wyznaczono wartości przeciętne, zarówno dla całego rozpatrywanego okresu (Tab.1. i Tab. 2.), jak również dla rocznych podokresów (Tab. 3.)

Tab. 1. Przeciętne dzienne stopy zwrotu dla indeksów giełdowych na GPW wraz z wartościami podstawowych statystyk opisowych w okresie od 2.01.2002 do 30.12.2005.

		Wszystkie dni	Poniedziałki	Wtorki	Środy	Czwartki	Piątki
WIG	średnia arytm.	0,09	0,17	0,02	-0,06	0,09	0,26
	odch. stand.	1,06	1,17	1,03	1,03	1,08	0,93
	wsp. zmienn.	11,37	6,84	64,05	-16,88	12,47	3,61
	skośność	0,11	0,23	-0,01	0,19	0,03	0,11
	kurtoza	4,06	3,67	3,46	4,64	4,86	3,42
WIG20	średnia arytm.	0,08	0,20	0,00	-0,14	0,07	0,27
	odch. stand.	1,30	1,42	1,28	1,27	1,31	1,15
	wsp. zmienn.	16,72	7,16	-360,21	-9,31	19,07	4,30
	skośność	0,18	0,34	-0,03	0,27	0,16	0,15
	kurtoza	4,06	3,62	3,84	4,43	4,84	3,55
MidWIG	średnia arytm.	0,08	0,11	-0,01	0,02	0,08	0,18
	odch. stand.	0,77	0,89	0,74	0,73	0,81	0,65
	wsp. zmienn.	10,08	8,20	-95,30	32,78	10,30	3,53
	skośność	-0,31	-0,40	-0,21	-0,35	-0,31	-0,15
	kurtoza	4,81	4,73	3,95	5,00	5,54	3,27
TechWIG	średnia arytm.	0,03	0,25	-0,14	-0,15	0,02	0,21
	odch. stand.	1,53	1,63	1,71	1,48	1,46	1,32
	wsp. zmienn.	43,88	6,46	-11,82	-9,62	73,18	6,30
	skośność	-0,37	0,08	-1,29	-0,11	0,28	-0,35
	kurtoza	7,35	3,73	11,66	6,30	5,52	5,38

Zródło: obliczenia własne.

Tab. 2. Przeciętne dzienne stopy zwrotu dla wybranych spółek na GPW wraz z wartościami podstawowych statystyk opisowych w okresie od 2.01.2002 do 30.12.2005.

		Wszystkie dni	Poniedziałki	Wtorki	Środy	Czwartki	Piątki
KGHM	średnia arytm.	0,16	0,39	-0,04	-0,27	0,24	0,46
	odch. stand.	2,20	2,10	2,21	2,14	2,33	2,11
	wsp. zmienn.	14,16	5,35	-59,34	-8,00	9,64	4,57
PeKaO	średnia arytm.	0,08	0,21	-0,03	-0,16	0,08	0,30
	odch. stand.	1,90	2,08	1,79	1,87	1,76	1,95
	wsp. zmienn.	24,69	9,96	-61,98	-11,53	21,99	6,60
PKN Orlen	średnia arytm.	0,12	0,28	0,01	-0,02	-0,05	0,38
	odch. stand.	1,76	1,79	1,68	1,76	1,90	1,63
	wsp. zmienn.	15,00	6,38	237,64	-96,81	-35,21	4,31
Prokom	średnia arytm.	0,02	0,25	-0,21	-0,28	0,05	0,33
	odch. stand.	2,15	2,15	2,16	2,16	2,25	1,96
	wsp. zmienn.	89,90	8,77	-10,30	-7,59	48,79	5,85

Zródło: obliczenia własne.



Dla wszystkich badanych indeksów giełdowych oraz spółek przeciętne poniedziałkowe oraz piątkowe stopy zwrotu były w łącznym badanym okresie dodatnie i znacznie wyższe od uzyskiwanych w inne dni tygodnia. Na uwagę zasługują zazwyczaj ujemne środowe stopy. Najwyższe odchylenia standardowe dla zwrotów z indeksów zanotowano w poniedziałki, najniższe – w piątki. Jak wynika z danych, analizowane rozkłady stóp zwrotu charakteryzują się wysoką zmiennością, często prawostronną skośnością oraz zawsze podwyższoną kurtozą. Są to cechy towarzyszące zazwyczaj finansowym szeregom czasowym.

Tab. 3. Przeciętne dzienne stopy zwrotu dla indeksów giełdowych na GPW w rozbiciu na roczne podokresy.

		Wszystkie dni	Poniedziałki	Wtorki	Środy	Czwartki	Piątki
WIG	2002	0,01	-0,08	-0,09	-0,11	0,13	0,20
	2003	0,15	0,36	-0,12	-0,06	0,26	0,32
	2004	0,10	0,21	0,13	-0,04	-0,08	0,27
	2005	0,12	0,20	0,14	-0,04	0,05	0,24
WIG20	2002	-0,01	-0,13	-0,10	-0,21	0,18	0,20
	2003	0,12	0,40	-0,23	-0,13	0,25	0,30
	2004	0,09	0,26	0,17	-0,11	-0,17	0,28
	2005	0,12	0,25	0,16	-0,10	0,02	0,30
MidWIG	2002	-0,03	-0,14	-0,08	-0,01	-0,01	0,10
	2003	0,12	0,28	-0,08	-0,07	0,20	0,25
	2004	0,12	0,16	0,02	0,11	0,04	0,27
	2005	0,10	0,13	0,11	0,06	0,09	0,10
TechWIG	2002	-0,21	-0,14	-0,30	-0,48	-0,06	-0,04
	2003	0,19	0,63	-0,23	-0,03	0,25	0,33
	2004	0,06	0,27	0,02	-0,07	-0,18	0,26
	2005	0,09	0,24	-0,06	-0,04	0,07	0,28

Źródło: obliczenia własne.

Analizując roczne podokresy można zauważyć wyraźną różnicę występującą pomiędzy rokiem 2002 a latami 2003-2005. Różnica ta dotyczy zdecydowanie niższych niż w pozostałych podokresach stóp zwrotu w roku 2002 (w szczególności ujemnych poniedziałkowych stóp). Z uwagi na zakres czasowy badania nie można stwierdzić, czy zaobserwowane zależności mają charakter trwały, czy też są dziełem przypadku.

## METODOLOGIA

Anomalie sezonowe związane z występowaniem efektu dnia tygodnia przebadano wstępnie wykorzystując prosty model regresji liniowej, zawierający pięć zmiennych zero-jedynkowych, po jednej dla każdego dnia tygodnia.

$$r_t = \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + \gamma_5 D_{5t} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Występujące w modelu tym wielkości mają następujące znaczenie:  $r_t$  - dzienna logarymiczna stopa zwrotu z inwestycji w instrument finansowy,  $D_{jt}$  - zmienna zero-jedynkowa przybierająca wartość 1 w wypadku, gdy korespondujący z nią dzień tygodnia jest poniedziałkiem, wtorkiem, środą, czwartkiem, piątkiem lub wartość 0 w przeciwnym przypadku,  $\gamma_j$  - parametry wskazujące na średnią stopę zwrotu dla każdego z dni tygodnia,  $\varepsilon_t$  - składnik losowy. Równanie (1) estymowano używając metody najmniejszych kwadratów.

Z powyżej zaprezentowanym podejściem wiążą się jednak dwa problemy: 1. uzyskane z modelu reszty mogą wykazywać autokorelację, 2. wariancja reszt nie jest stała w czasie.

Rozwiązaniem pierwszego problemu jest zastosowanie następującego modelu AR(s):

$$r_t = \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + \gamma_5 D_{5t} + \sum_{j=1}^s \gamma_{j+5} r_{t-j} + \varepsilon_t \quad (2)$$

Drugą trudność pokonuje się uwzględniając zmienność wariancji reszt w modelach typu ARCH. Wariancja warunkowa jest w nich wyrażana jako funkcja poprzedzających reszt. Dzięki zależności wariancji od poprzednich wartości szereg ARCH dobrze modeluje efekt grupowania danych. Uogólniona wersja tego modelu – GARCH(p,q) – zaproponowana została przez Bollersleva [Bollerslev 1986] i dla analizowanego przez nas szeregu stóp zwrotu przyjmuje następującą postać:

$$r_t = \gamma_0 + \varepsilon_t, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (3)$$

Zakładamy, że składnik losowy  $\varepsilon_t$  ma warunkowy rozkład normalny ze średnią zero i zmienną w czasie warunkową wariancją  $\sigma_t^2$ . Wymogiem specyfikacji jest  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  oraz  $\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ .

Celem uwzględnienia relacji zachodzących pomiędzy stopami zwrotu i zmiennością oraz zidentyfikowania sezonowości dziennej szacowano w niniejszej pracy następujący model AR(s)-GARCH(p,q) (porównaj: [Berument, Kyimaz 2001]):

$$r_t = \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + \gamma_5 D_{5t} + \sum_{j=1}^s \gamma_{j+5} r_{t-j} + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (4)$$

Model ten następnie zmodyfikowano włączając zmienne związane z efektem dnia tygodnia również do równania wariancji warunkowej:

$$r_t = \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + \gamma_5 D_{5t} + \sum_{j=1}^5 \gamma_{j+5} r_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \alpha_4 D_{4t} + \alpha_5 D_{5t} + \sum_{i=1}^5 \alpha_{5+i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^5 \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (5)$$

Estymacji powyższych modeli dokonano metodą największej wiarygodności.

## WYNIKI EMPIRYCZNE

Przed przystąpieniem do modelowania wariancji stóp zwrotu przeprowadzono badanie ciągu  $r_t$  pod kątem jego stacjonarności, występowania autokorelacji oraz obecności efektu ARCH. Stacjonarność badano za pomocą testu Dickey'a-Fullera, uzyskując każdorazowo pozytywny wynik. Występowanie autokorelacji badano za pomocą testu Boxa-Pierce'a, a w wypadku jej obecności uznawano, że proces winien być opisany modelem AR, którego rząd ustalano posługując się wartościami funkcji ACF i PACF. W celu sprawdzenia czy dany szereg charakteryzuje się heteroskedastyczną wariancją wykorzystywano test Engle'a mnożników Lagrange'a (test na występowanie efektu ARCH).

Następnie przystąpiono do estymacji poszczególnych modeli: modeli liniowych z sezonowością ((1), ewentualnie (2)), modeli GARCH z sezonowością w równaniu średniej (4) oraz zmodyfikowanych modeli GARCH z sezonowością w równaniu średniej i wariancji (5). Dokonując wyboru rzędu opóźnień w strukturze GARCH( $p, q$ ) kierowano się istotnością parametrów strukturalnych, wartościami kryteriów informacyjnych Akaike'a i Schwarza oraz wielkością ujemnego dwukrotnego logarytmu funkcji wiarygodności ( $-2\ln L$ ), który jest tym mniejszy, im większa jest wiarygodność wyników.

Wyniki estymacji przedstawiają tabele Tab. 4 i Tab. 5. Oceny parametrów z oszacowanych równań (1) i (2) (w tabelach w kolumnach o nagłówkach KMNK) wskazują na średnią stopę zwrotu dla każdego z dni tygodnia. Stopy z poniedziałku i piątku okazywały się w większości badanych szeregów statystycznie istotny różne od zera.

Oszacowania modeli typu (4) dały podobne wyniki. Wprowadzenie do modeli wariancji warunkowej spowodowało polepszenie ich jakości. Estymatory są teraz bardziej efektywne (uzyskano mniejsze błędy ocen odpowiednich parametrów). Zmniejszeniu uległy wartości  $-2\ln L$ . Parametry w równaniach na wariancję uzyskały dodatnie oceny, ich sumy (poza stałymi) są mniejsze niż 1, aczkolwiek zbliżone do tej wartości. Ten ostatni fakt wskazuje na to, że informacje z odległej przeszłości są istotne w wyjaśnieniu bieżącej zmienności (*persistence of volatility*).

W zmodyfikowanych modelach GARCH typu (5) efekt dnia tygodnia jest obecny w obu równaniach: w wyraźny sposób w równaniach na średnią i w słabszy w równaniach na wariancję warunkową. W równaniach średniej statystycznie istotne okazały się najczęściej poniedziałek i piątek. Jeśli zaś chodzi o wariancję warunkową, to w kilku przypadkach statystycznie istotna jest wysoka zmienność poniedziałkowa (dla indeksów WIG, WIG20, MidWIG i spółki Prokom), a towarzysząca jej najniższa zmienność w piątki okazywała się statystycznie nieistotna. Otrzymany wynik dla stóp zwrotu z indeksów giełdowych znajduje swoje potwierdzenie w wartościach dla odchylenia standardowego umieszczonych w Tab. 1. Można go tłumaczyć tym, że poniedziałkowe ceny zamknięcia zawierają w sobie informacje aż z trzech dni. Stąd też uważa się, iż odchylenie standardowe dla poniedziałkowych zwrotów winno być wyższe niż w inne dni. Teza ta znajduje potwierdzenie na wielu rynkach finansowych. Na GPW jednak wysoki poziom wariancji poniedziałkowej nie tłumaczy efektu niskiego ryzyka wynikającego z dużych dziennych zwrotów osiąganych właśnie w poniedziałki. Wyższe poniedziałkowe zwroty można by uzasadniać przyjmując, że nie są one zwrotami dla okresu jednodniowego, lecz w rzeczywistości uwzględniają konieczność zamrożenia środków na czas weekendu. Z kolei wysokie stopy zwrotu realizowane w piątki idą w parze z niską wariancją w te dni, co potwierdza powszechnie uznawaną za słuszną relację: wysoka wariancja – niskie zwroty. Ten ostatni efekt jest już często obserwowany na światowych giełdach. Wydaje się, że jedynie wysokie stopy zwrotu w poniedziałki należy uznać za szczególną specyfikę warszawskiej giełdy w okresie jej funkcjonowania od roku 2003 do 2005.

## PODSUMOWANIE

W pracy przebadano występowanie efektu dnia tygodnia na GPW w Warszawie w okresie od stycznia 2002 do grudnia 2005. W tym celu posłużono się uogólnionymi modelami autoregresyjnymi z warunkową heteroskedastycznością GARCH. Okazało się, że efekt sezonowości dziennej jest obecny w wyraźny sposób w równaniach na średnią i w słabszy w równaniach na wariancję warunkową. W równaniach średniej statystycznie istotne okazały się najczęściej wysokie stopy zwrotu osiągane w poniedziałki i piątki. W wypadku wariancji warunkowej wychwycono wysoką zmienność poniedziałkową.

Praktyczne znaczenie zaobserwowanych prawidłowości w rozkładzie dziennych stóp zwrotu w tygodniu, nawet gdyby miały one trwały charakter, ma nieduże znaczenie praktyczne. Zidentyfikowane zależności są na tyle niewielkie, że nie można stworzyć na ich podstawie strategii inwestycyjnej gwarantującej zwroty ponadprzeciętne. Możliwe do osiągnięcia zyski nie byłyby w stanie pokryć prowizji maklerskich wynikających obrotu walorami. Występowanie wykrytych zależności w sposób trwały również w przyszłości mogłoby stanowić jednak przesłankę świadczącą o nieefektywności rynku.

Tab. 4. Wyniki estymacji modeli uwzględniających efekt dnia tygodnia dla indeksów giełdowych (w nawiasach błędy ocen parametrów: \*\*\*, \*\*, \* oznaczają statystyczną istotność na poziomach odpowiednio 1%, 5% i 10%). Źródło: obliczenia własne.

	WIG			WIG20			MidWIG			TechWIG		
	KMNK	GARCH (1,1)	GARCH (1,1)	KMNK	GARCH (1,1)	GARCH (1,1)	KMNK	AR(1)- GARCH (1,1)	AR(1)- GARCH (1,1)	KMNK	AR(1)- GARCH (1,1)	AR(1)- GARCH (1,1)
Poniedziałek (M)	0,172 ** (0,075)	0,167 ** (0,07)	0,161 ** (0,073)	0,199 ** (0,092)	0,214 ** (0,086)	0,202 ** (0,09)	0,073 (0,054)	0,075 (0,049)	0,072 (0,053)	0,229** (0,107)	0,31*** (0,087)	0,3*** (0,089)
Wtorek (M)	0,016 (0,074)	0,031 (0,068)	0,034 (0,07)	-0,004 (0,091)	0,029 (0,084)	0,03 (0,088)	-0,028 (0,053)	0,003 (0,048)	0,01 (0,049)	-0,171 (0,106)	-0,081 (0,085)	-0,088 (0,093)
Środa (M)	-0,061 (0,074)	0,008 (0,068)	0,003 (0,068)	-0,136 (0,091)	-0,061 (0,084)	-0,065 (0,085)	0,023 (0,053)	0,042 (0,048)	0,036 (0,046)	-0,139 (0,106)	-0,042 (0,084)	-0,046 (0,086)
Czwartek (M)	0,087 (0,075)	0,095 (0,07)	0,095 (0,069)	0,069 (0,092)	0,067 (0,085)	0,066 (0,085)	0,064 (0,054)	0,063 (0,049)	0,064 (0,049)	0,004 (0,107)	0,048 (0,085)	0,06 (0,085)
Piątek (M)	0,26 *** (0,075)	0,24 *** (0,068)	0,23 *** (0,064)	0,27 *** (0,092)	0,26 *** (0,084)	0,25 *** (0,078)	0,18 *** (0,054)	0,15 *** (0,048)	0,14 *** (0,042)	0,212** (0,107)	0,21** (0,085)	0,21*** (0,079)
$r_{t-1}$ (M)							0,18 *** (0,031)	0,18 *** (0,033)	0,18 *** (0,033)	0,103** (0,031)	0,11*** (0,033)	0,11*** (0,033)
Cst (V)		0,018 ** (0,009)			0,021 * (0,011)			0,02 ** (0,009)			0,012* (0,007)	
Poniedziałek (V)			0,195 * (0,104)			0,297 ** (0,151)			0,19 *** (0,049)			0,215 (0,16)
Wtorek (V)			-0,01 (0,127)			0,035 (0,189)			-0,047 (0,056)			0,189 (0,233)
Środa (V)			-0,026 (0,111)			-0,077 (0,163)			-0,019 (0,053)			-0,163 (0,207)
Czwartek (V)			0,014 (0,083)			-0,003 (0,126)			0,043 (0,046)			-0,037 (0,135)
Piątek (V)			-0,066 (0,086)			-0,133 (0,132)			-0,073 * (0,042)			-0,113 (0,121)
ARCH(Alpha1)		0,05 *** (0,01)	0,04 *** (0,01)		0,04 *** (0,009)	0,03 *** (0,009)		0,09 *** (0,023)	0,08 *** (0,024)		0,06*** (0,012)	0,05*** (0,013)
GARCH(Beta1)		0,94 *** (0,015)	0,94 *** (0,016)		0,95 *** (0,013)	0,95 *** (0,013)		0,88 *** (0,034)	0,89 *** (0,035)		0,94*** (0,013)	0,94*** (0,015)
R2	0,011			0,012			0,04			0,023		
DW	1,88			1,9			2			2,01		
logL	-1475,77	-1442,02	-1440,36	-1681,17	-1649,76	-1647,61	-1139,72	-1093,01	-1086,52	-1835,58	-1732,33	-1729,83
AIC		2,886	2,89		3,299	3,303		2,193	2,188		3,465	3,468
SIC		2,925	2,949		3,338	3,361		2,237	2,252		3,509	3,532
Alpha[1]+Beta[1]		0,982	0,979		0,986	0,984		0,965	0,968		0,994	0,99

Tab. 5. Wyniki estymacji modeli uwzględniających efekt dnia tygodnia dla spółek giełdowych (w nawiasach błędy ocen parametrów; \*\*\*, \*\*, \* oznaczają statystyczną istotność na poziomach odpowiednio 1%, 5% i 10%). Źródło: obliczenia własne.

	KGHM			PeKaO			PKNOren			Prokom		
	KMNK	GARCH (1,1)	GARCH (1,1)	KMNK	GARCH (1,1)	GARCH (1,1)	KMNK	GARCH (1,1)	GARCH (1,1)	KMNK	GARCH (1,1)	GARCH (1,1)
Poniedziałek (M)	0,39 *** (0,155)	0,41 *** (0,151)	0,42 *** (0,144)	0,209 (0,134)	0,254 * (0,13)	0,259 * (0,138)	0,28 ** (0,125)	0,301 ** (0,121)	0,303 ** (0,123)	0,246 (0,152)	0,349 ** (0,144)	0,353 ** (0,155)
Wtorek (M)	-0,037 (0,153)	0,01 (0,148)	-0,0001 (0,154)	-0,029 (0,133)	-0,056 (0,13)	-0,066 (0,126)	0,007 (0,123)	-0,01 (0,12)	-0,008 (0,116)	-0,209 (0,15)	-0,219 (0,141)	-0,215 (0,137)
Środa (M)	-0,268 * (0,153)	-0,221 (0,148)	-0,207 (0,15)	-0,162 (0,133)	-0,135 (0,128)	-0,148 (0,133)	-0,018 (0,123)	0,04 (0,121)	0,039 (0,122)	-0,284 * (0,15)	-0,218 (0,142)	-0,236 * (0,14)
Czwartek (M)	0,241 (0,155)	0,268 * (0,149)	0,271 * (0,155)	0,062 (0,135)	0,078 (0,131)	0,086 (0,124)	-0,054 (0,125)	-0,065 (0,122)	-0,063 (0,12)	0,046 (0,152)	0,03 (0,144)	0,034 (0,149)
Piątek (M)	0,46 *** (0,155)	0,41 *** (0,148)	0,41 *** (0,14)	0,296 ** (0,134)	0,248 * (0,13)	0,243 * (0,129)	0,38 *** (0,125)	0,41 *** (0,121)	0,41 *** (0,125)	0,335 ** (0,152)	0,39 *** (0,145)	0,38 *** (0,131)
Cst (V)		0,142 * (0,08)			0,22 (0,193)			0,15 ** (0,072)			0,286 ** (0,115)	
Poniedziałek (V)			0,177 (0,409)			0,544 (0,454)			0,075 (0,369)			1,51 *** (0,487)
Wtorek (V)			0,787 * (0,467)			-0,363 (0,34)			-0,145 (0,321)			-0,472 (0,501)
Środa (V)			-0,069 (0,537)			0,649 (0,489)			0,384 (0,352)			0,412 (0,449)
Czwartek (V)			0,355 (0,446)			-0,386 (0,511)			0,045 (0,294)			0,688 (0,488)
Piątek (V)			-0,684 (0,464)			0,243 * (0,129)			0,344 (0,341)			-0,719 (0,44)
ARCH(Alpha1)		0,04 *** (0,012)	0,03 *** (0,011)		0,047 ** (0,02)	0,04 * (0,02)		0,04 *** (0,014)	0,04 *** (0,014)		0,06 *** (0,018)	0,06 *** (0,018)
GARCH(Beta1)		0,93 *** (0,025)	0,94 *** (0,02)		0,89 *** (0,071)	0,91 *** (0,073)		0,91 *** (0,032)	0,92 *** (0,029)		0,87 *** (0,038)	0,88 *** (0,037)
R2	0,016			0,008			0,01			0,013		
DW	1,91			2,08			2,03			1,88		
logL	-2208,86	-2196,1	-2193,72	-2064,56	-2055,42	-2051,19	-1990,79	-1982,89	-1982,3	-2189,53	-2164,96	-2160,81
AIC		4,386	4,39		4,106	4,106		3,962	3,969		4,324	4,324
SIC		4,425	4,448		4,145	4,165		4,001	4,027		4,363	4,383
Alpha[1]+Beta[1]		0,969	0,974		0,937	0,946		0,951	0,953		0,934	0,935

## LITERATURA

- Apolinario R.M., Santana O.M., Sales L.J. i Caro A.R. (2006) Day of the Week Effect on European Stock Markets, *International Research Journal of Finance and Economics*, Issue 2, 53-70.
- Berument H., Kyimaz H. (2001) The Day of the Week Effect on Stock Market Volatility, *Journal of Economics and Finance*, Vol. 25, Nr 2, 181-193.
- Bollerslev T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Cross F. (1973) The Behaviour of Stock Prices on Fridays and Mondays, *Financial Analysts Journal*, 29, November/December, 67-69.
- Engle R.F. (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, N° 50, 987-1007.
- French K.R. (1980) Stock Returns and the Weekend Effect, *Journal of Financial Economics*, 8, March, 55-69.
- French K.R., Schwert G.W. i Stambaugh R.F. (1987) Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics*, 19, 3-29.
- Glosten L.R., Jagannathan R. i Runkle D.E. (1993) On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Returns on Stocks, *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
- Harris L. (1986) A Transaction Data Study of Weekly and Intradaily Patterns in Stock Returns, *Journal of Financial Economics*, 16, May, 99-117.
- Jaffe J., Westerfield R. (1985) The weekend effect in common stock return: the international evidence, *Journal of Finance*, 40, 433-454.
- Kompa K., Witkowska D. (2006) Analiza własności stóp zwrotu akcji wybranych spółek, materiały nadesłane na konferencję „Rynek Kapitałowy Skuteczne Inwestowanie”, Kołobrzeg.
- Nelson D.B. (1991) Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, 59, 347-370.
- Rogalski R.J. (1984) New Findings Regarding Day-of-the-Week Returns over Trading and Non-Trading Periods, *Journal of Finance*, 39, 1603-1614.
- Szyska A. (1999) Efektywność rynku a anomalie w rozkładach stóp zwrotu w czasie, *Nasz Rynek Kapitałowy*, 12.

### **Day of the Week Effect on the Warsaw Stock Exchange**

**Summary:** This study tests the presence of the day of the week effect on stock market volatility for Warsaw Stock Exchange during the period of January 2002 and December 2005 by using a GARCH models. The findings show that the day of the week effect is present in both volatility and return equation. The highest returns are observed on Monday and Friday and the highest volatility is observed for Monday.

**Key words:** day of the week effect, GARCH model

Agnieszka Lewczuk  
Instytut Ekonomii i Zarządzania  
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Papieża Jana Pawła II  
w Białej Podlaskiej  
e-mail: lewczukaga@wp.pl

## PRÓBA ANALIZY AUKCJI Z RÓŻNYMI ROZKŁADAMI WYCEN

**Streszczenie:** Do końca lat 90-tych analizując aukcje przyjmowano założenie, że rozkłady kupieckich wycen są jednakowe. Założenie to jednak jest mocno wyidealizowane i dla większości odbywających się aukcji nie można go przyjąć. Do takich aukcji należą między innymi aukcje dzieł sztuki lub aukcje koni rasowych. W tej pracy podejmujemy próbę analizy aukcji z różnymi rozkładami kupieckich wycen. Dokładniej zajmiemy się porównaniem oczekiwanego dochodu sprzedawcy pochodzącego z aukcji pierwszej ceny i aukcji otwartej (angielskiej). Pokażemy, że w tej sytuacji nie jest prawdziwe twierdzenie o równoważnym dochodzie. Następnie wykażemy, że w określonych sytuacjach aukcja pierwszej ceny zapewnia sprzedawcy większy oczekiwany zysk niż aukcja angielska.

**Słowa kluczowe:** aukcja, rozkład wycen, oczekiwany dochód sprzedawcy

### WSTĘP

Aukcje są powszechnie stosowanymi formami sprzedaży. Znane są nie tylko aukcje dzieł sztuki, antyków czy koni rasowych, ale również aukcje terenów, nieruchomości a nawet surowców mineralnych. W formie licytacji sprzedawane bywa również zboże, ryby czy kwiaty a także wiele innych produktów.

Aukcja jest organizacyjną formą rynku, którą cechuje pewna asymetria dotycząca jej uczestników. Po jednej stronie stoją kupcy, którzy konkurując ze sobą wyznaczają ostateczną cenę licytowanego przedmiotu. Po drugiej zaś stronie jest sprzedawca, który w gruncie rzeczy ma pozycję monopolisty. Do niego należy wybór formy, w jakiej będzie prowadzona licytacja. Wybiera on oczywiście taki rodzaj aukcji, który zapewni mu maksymalny zysk.

Istnieje kilka najbardziej rozpowszechnionych metod organizowania aukcji i przetargów. Najbardziej znaną jest aukcja angielska (English auction), kojarzona zazwyczaj z licytacją. Uczestnicy tego rodzaju aukcji zgłaszają oferty ustne, przy czym kolejne zgłoszenia dotyczą coraz to większych kwot. Konkurenci biorący udział w aukcji nawzajem przebijają swoje oferty. Aukcja kończy się w chwili, gdy licytowany przedmiot osiągnie taką cenę, której żaden kupiec nie jest w stanie podwyższyć. Zwycięzcą aukcji jest ten z kupców, którego oferta była najwyższa. Należy jednak pamiętać, że racjonalnie zachowujący się uczestnik podwyższa swoje oferty co najwyżej do wysokości własnej wyceny (valuation).



W klasycznych przypadkach wyceną jest maksymalna cena jaką za obiekt jest skłonny zapłacić kupiec.

Drugim, pod względem znaczenia, rodzajem konkursu ofert jest przetarg pisemny (sealed-bid auction), w ramach którego potencjalni nabywcy składają propozycje ofert na piśmie, na przykład w zapieczętowanych kopertach. Sprzedawca dokonuje wyboru oferty najlepszej, a kupiec płaci cenę, którą zaproponował. Tego rodzaju przetarg zwany jest również aukcją pierwszej ceny (first price sealed-bid auction).

Kolejną formą przetargu pisemnego jest aukcja drugiej ceny (second price sealed-bid auction), gdzie wybierana jest najlepsza oferta, ale cena, jaką płaci kupiec, jest drugą w kolejności od najwyższej. Ten rodzaj aukcji opracował William Vickrey i opisał w pracy „Counterspeculations, auctions and competitive sealed tenders”, która ukazała się w 1961 roku w *Journal of Finance*. Stała się ona bodźcem do dalszych poszukiwań w tej dziedzinie. Pomimo, że od tamtej pory minęło pół wieku, literatura na temat tej aukcji jest nadal fragmentaryczna, zwłaszcza jeśli chodzi o relacje między teorią a rzeczywistym przebiegiem aukcji.

Czwartym klasycznym rodzajem aukcji jest aukcja holenderska (Dutch auction). W tym przypadku cena wystawianego na sprzedaż towaru jest sukcesywnie obniżana, aż do momentu, gdy znajdzie się nabywca, któremu ona odpowiada. Zgodnie z regułami tej aukcji handluje na przykład komisja. Aukcja holenderska jest wykorzystywana podczas sprzedaży szybko psujących się towarów. W taki sposób handluje się chociażby kwiatami w Holandii i stąd pochodzi nazwa aukcji. Rozważania, które są prowadzone w tej pracy dotyczące będą czterech wymienionych powyżej rodzajów aukcji, aczkolwiek jest ich znacznie więcej. Reguły aukcyjne są bowiem w dalszym ciągu doskonalone. Oprócz wymienionych najbardziej znanymi aukcjami są: aukcja udziałów (auction of shares), aukcje wieloobektowe (multiple - object auctions) oraz aukcje dwustronne (double auction).

W tej pracy zajmiemy się również analizą aukcji z różnymi rozkładami wycen. Głównym celem jest próba porównania oczekiwanego zysku sprzedawcy dla aukcji angielskiej (otwartej) i aukcji pierwszej ceny. W rozdziale 2 przedstawimy jedno z podstawowych twierdzeń z zakresu teorii aukcji, zwane twierdzeniem o równoważnym dochodzie (Revenue Equivalent Theorem) mówiące o tym, że oczekiwany zysk sprzedawcy przy założeniu, że rozkłady kupieckich wycen są jednakowe, nie zależy od reguł aukcyjnych. Następnie pokażemy, że przestaje być ono prawdziwe, jeśli to założenie nie będzie spełnione. W rozdziale 3 zajmiemy się analizą aukcji w przypadku, gdy rozkłady kupieckich wycen nie są jednakowe. Pokażemy również, że w tym ostatnim przypadku oczekiwany zysk sprzedawcy zależeć będzie od „rodzaju” asymetrii. Dokonamy porównania oczekiwanego zysku sprzedawcy w kilku szczególnych przypadkach. Rozważania przeprowadzone w tym rozdziale będą się opierały na pracy Rileya i Maskina [Maskin i in. 2000].

## DOCHÓD SPRZEDAWCY W PRZYPADKU AUKCJI SYMETRYCZNYCH

Zanim zaczniemy nasze rozważania, wprowadzimy następujące założenia dotyczące rozpatrywanych w tym rozdziale aukcji:

Z1. a) W aukcji uczestniczy  $n$  kupców i jeden sprzedawca. Wycenę  $i$ -tego kupca oznaczamy jako  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , wycenę sprzedawcy jako  $v_0$ .

b) Wszystkie kupieckie wyceny są niezależne od siebie i mają jednakowy rozkład, którego dystrybuanta  $F(v)$  spełnia następujące założenia:  $F(\underline{v}) = 0$ ,  $F(\bar{v}) = 1$  oraz  $F(v)$  jest ściśle rosnąca i różniczkowalna na przedziale  $[\underline{v}; \bar{v}]$ , gdzie  $\underline{v}$ ,  $\bar{v}$  oznaczają odpowiednio najniższą i najwyższą wycenę.

Założenia oznaczone jako (Z1) po raz pierwszy wprowadził Vickrey. Oznaczają one, że kupcy składają swoje oferty niezależnie od siebie. Nie znają nawzajem swoich wycen, znają natomiast ich rozkład i wiedzą, że jest on taki sam dla wszystkich kupców.

Ponieważ reguły aukcyjne, podobnie jak reguły gry, są ściśle określone aukcje można traktować jako gry. Definiując grę należy określić wypłaty jej uczestników. W tym przypadku wypłata  $i$ -tego gracza zależy od ofert konkurentów. Jeżeli najwyższa z ofert pozostałych  $n-1$  graczy:  $b_*$ , przewyższa ofertę  $i$ -tego kupca, która wynosi  $b_i$ , to jego wypłata wynosi 0. Jeśli  $b_* < b_i$  kupiec  $i$ -ty wygrywa aukcję, przy czym otrzymuje wypłatę wynoszącą  $v_i - b_i$ . Można to przedstawić za pomocą następującej funkcji:

$$g_i = \begin{cases} v_i - b_i & \text{gdy } i\text{-ty kupiec nabywa obiekt} \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \quad (1)$$

$g_i$  - wypłata  $i$ -tego kupca,

$v_i$  - wycena  $i$ -tego kupca,

$b_i$  - oferta  $i$ -tego kupca.

John Harsanyi pokazał, że aukcję spełniającą warunki (Z1) można przedstawić jako grę z niepełną informacją. W związku z tym, kupców w dalszym ciągu wymiennie będziemy nazywać graczami.

W niniejszej pracy rozważa się wyłącznie aukcje, których graczami są kupcy. W dalszym ciągu będziemy mówili, że aukcje spełniające warunki (Z1)

należą one do klasy  $\Psi$ . Niezależnie od szczegółowych regulaminów mają one kilka wspólnych cech.

Zaangażowani w aukcję kupcy składają oferty powyżej wyceny sprzedawcy.

Sprzedawany przedmiot trafia do kupca, który złożył najwyższą ofertę.

Zasady aukcyjne zapewniają kupcom anonimowość, każdy kupujący jest traktowany jednakowo.

Strategią równowagi dla każdego z kupców jest złożenie oferty poniżej własnej wyceny.

Strategia równowagi *i-tego* kupca jest rosnącą funkcją jego własnej wyceny

$$b_i = b(v_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Dla rodziny aukcji  $\Psi$  słuszne jest twierdzenie.

**Twierdzenie 1. (Twierdzenie o Równoważnym Dochodzie)**

Założmy, że spełnione są założenia (Z1) oraz że wszyscy kupcy mają neutralny stosunek do ryzyka. Jeśli kupcy licytują zgodnie ze strategią prowadzącą do równowagi, to wszystkie aukcje z rodziny  $\Psi$  zapewniają sprzedawcy oczekiwany zysk, który jest postaci

$$E[R] = n \int_{v_*}^{\bar{v}} (vF'(v) + F(v) - 1) F(v)^{n-1} dv \quad (3)$$

gdzie  $v_*$  jest ceną wywoławczą. Dowód [Maskin i in. 2000].

Twierdzenie 1 należy do fundamentalnych twierdzeń z zakresu teorii aukcji. Mówi ono, że oczekiwany zysk sprzedawcy jest taki sam dla wszystkich aukcji z rodziny  $\Psi$  i zależy od ceny wywoławczej  $v_*$ . Już Vickrey, we wspomnianej pracy z 1961 roku [Vickrey, 1961] pokazał, że dochód sprzedawcy jest identyczny dla aukcji pierwszej ceny, holenderskiej, angielskiej oraz aukcji drugiej ceny jeśli spełnione są założenia Z1, a kupcy uczestniczący w aukcji mają jednakowy dostęp do informacji.

Mimo słuszności tego twierdzenia, obserwując aukcje, możemy zauważyć, że pewne grupy towarów sprzedawane są zazwyczaj za pomocą jednej reguły aukcyjnej. Na przykład dzieła sztuki lub konie rasowe sprzedawane są najczęściej na zasadach aukcji angielskiej, podczas gdy kontrakty na dostawy są przyznawane na zasadach aukcji pierwszej ceny. Powstaje zatem pytanie dlaczego tak się dzieje, skoro zgodnie z twierdzeniem 1 dochód sprzedawcy nie zależy od reguł aukcyjnych? Powodem tych rozbieżności jest fakt, że osłabienie przynajmniej jednego z założeń tego twierdzenia może spowodować, że jego teza nie będzie prawdziwa.

Riley i Samuelson [Riley i in. 1981] pokazali, że w przypadku gdy kupcy mają awersję do ryzyka aukcja pierwszej ceny zapewnia sprzedawcy większy oczekiwany zysk niż aukcja drugiej ceny. Wynika to z faktu, że w przypadku aukcji drugiej ceny pojawienie się u kupców awersji do ryzyka nie ma wpływu na

strategię prowadzącą do równowagi. Natomiast podczas aukcji pierwszej ceny kupcy z awersją do ryzyka będą licytowali wyższe stawki.

McMillan i McAfee [McMillan i in. 1992] oraz Graham i Marshall [Graham i in. 1987] analizowali reguły aukcyjne, w których zakłada się możliwość kooperacji między graczami. Pokazali oni, że proces formowania koalicji jest ułatwiony w przypadku aukcji otwartych. Podczas takich aukcji kupcy mogą obserwować nawzajem swoje zachowania i wykorzystywać te obserwacje do budowania koalicji przeciwko swoim konkurentom. Dlatego w takiej sytuacji sprzedawca osiągnie większy zysk, jeśli jego towar zostanie sprzedany na zasadach aukcji pierwszej ceny.

## ANALIZA AUKCJI, W KTÓRYCH KUPIECKIE WYCENY MAJĄ RÓŻNE ROZKŁADY

W większości prac poświęconych analizie porównawczej dochodu sprzedawcy przy zastosowaniu różnych reguł aukcyjnych, przyjmowane jest założenie, że rozkłady kupieckich wycen są jednakowe. W takich przypadkach dla każdego gracza istnieje strategia równowagi. Istnieją także dokładne wzory określające te strategie [Riley i in. 1981]. Wiadomo, że dla *i-tego* kupca strategia równowagi  $b_i$  jest rosnącą funkcją jego własnej wyceny  $b_i = b(v_i)$ .

W tym rozdziale podejmiemy próbę analizy aukcji w przypadku, gdy kupieckie wyceny mają różne rozkłady. Aukcje takie nazywamy aukcjami asymetrycznymi. Analiza w tym przypadku jest bardziej złożona. Znane są już warunki konieczne i dostateczne istnienia strategii prowadzących do równowagi [Lebrun, 1996], nadal jednak nie są znane dokładne wzory określające te strategie.

W dalszej części zastanowimy się, jaki oczekiwany zysk może osiągnąć sprzedawca, jeśli będzie sprzedawał swój towar na zasadach aukcji angielskiej (otwartej), a jaki jeśli zdecyduje się na aukcję pierwszej ceny, w sytuacji gdy rozkłady wycen nie są jednakowe.

Założmy, że w aukcji uczestniczy dwóch kupców mających neutralny stosunek do ryzyka. Jednego z nich nazywać będziemy kupcem „mocnym” (kupcem *m*) drugiego zaś „słabym” (kupcem *s*). Założmy, że wycena *i-tego* kupca:  $v_i$ , jest zmienną losową o wartościach dodatnich, określoną na przedziale  $[\beta_i, \alpha_i]$ , przy czym  $0 \leq \beta_i < \alpha_i$ ,  $i \in \{m, s\}$ . Przez  $F_i(\cdot)$  oznaczamy dystrybuantę tego rozkładu.

Wiemy, że podczas aukcji pierwszej ceny, kupcy składają swoje oferty jednocześnie. Właścicielem wystawianego na sprzedaż przedmiotu staje się kupiec, który złożył najwyższą ofertę, a cena jaką za niego płaci jest równa wysokości jego oferty. Oznaczmy przez  $b_i$  strategię równowagi *i-tego* kupca,  $i \in \{m, s\}$ . Maskin i Riley [Maskin i in. 1996] pokazali, że przy tych założeniach strategia równowagi

$i$ -tego kupca jest rosnącą funkcją jego własnej wyceny,  $b_i = b_i(v_i)$ ,  $i \in \{m, s\}$ . W przypadku aukcji pierwszej ceny dla dowolnej wyceny kupca  $m$   $v_m$ , jego oferta  $b = b_m(v_m)$ , jest rozwiązaniem następującego zadania  $\text{Max}_b F_s(b_s^{-1}(b))(v_m - b)$ , gdzie  $b_s^{-1}(b)$  jest funkcją odwrotną do  $b_s(\cdot)$ . Podobnie  $b = b_s(v_s)$  jest rozwiązaniem problemu  $\text{Max}_b F_m(b_m^{-1}(b))(v_s - b)$ .

Aukcja angielska (otwarta) polega na wzajemnym podwyższaniu kupieckich ofert. Każdy kupiec zgłasza ofertę aż do momentu, gdy aktualna cena nie osiągnie poziomu przyjętej przez niego wyceny. W tym momencie rezygnuje z dalszej licytacji, gdyż w przypadku wygranej poniósłby stratę. Ważnym faktem jest, że licytacja kończy się w momencie, gdy cena osiągnie poziom wyceny przedostatniego uczestnika. Zwycięzcą aukcji angielskiej jest kupiec, który złożył najwyższą ofertę, ale cena jaką płaci jest w przybliżeniu równa drugiej pod względem wielkości kupieckiej wycenie. Aukcja angielska jest więc strategicznie równoważna opisanej we wstępie aukcji drugiej ceny. Oczekiwany zysk sprzedawcy dla tych dwóch rodzajów aukcji jest więc taki sam. Rozważmy następujący przykład.

Przykład 1. Załóżmy, że w aukcji uczestniczy dwóch kupców mających neutralny stosunek do ryzyka. Przedmiotem sprzedaży jest niepodzielny obiekt. Załóżmy ponadto, że wycena kupca 1 jest zmienną losową, której rozkład określa dystrybuanta  $F_1$ . Niech  $F_1(v) = v$ ,  $v \in [0,1]$ . Rozkład wycen kupca 2 określony jest wzorem  $F_2(v) = v - 2$ ,  $v \in [2,3]$ . Zauważmy, że wycena kupca 2 przyjmuje zawsze większe wartości niż wycena kupca 1. Ma więc on w tej aukcji mocniejszą pozycję i zawsze jest w stanie przelicytować swojego konkurenta. Załóżmy, że towar sprzedawany jest na zasadach aukcji pierwszej ceny. Oznaczmy przez  $b_1(\cdot)$  ofertę kupca 1. Załóżmy, że  $b_1(v_1) = v_1$ . W tej sytuacji najlepszą odpowiedzią kupca 2 jest złożenie oferty  $b$  dzięki której maksymalizuje on swój zysk. Jeśli złoży on ofertę  $b \in [0,1]$ , wygra aukcję z prawdopodobieństwem  $F_1(b_1^{-1}(b)) = b$ . Oferta kupca 2 powinna być zatem rozwiązaniem zadania  $\text{Max}_{b \in [0,1]} b(v_2 - b)$ .

Ponieważ  $v_2 \geq 2$ , najlepszym rozwiązaniem dla kupca 2 jest złożenie oferty  $b_2(v_2) = 1$ ,  $v_2 \in [2,3]$ . Zauważmy, że strategia  $b_1(v_1) = v_1$  jest optymalną strategią kupca 1. Jest tak, ponieważ inna oferta nie zapewni mu efektywnej wygranej. Opisane wyżej strategię są więc strategiami prowadzącymi do równowagi. Jeśli obaj kupcy będą licytowali zgodnie z nimi oczekiwany zysk sprzedawcy w tej sytuacji będzie równy 1.

W przypadku aukcji angielskiej zwycięzcą podobnie jak poprzednio będzie kupiec 2 ponieważ jego wycena jest wyższa niż wycena konkurenta. Cena jaką

zapłaci za towar będzie jednak niższa. Będzie ona równa co wielkości wycenie kupca 1. Oczekiwany zysk sprzedawcy w tym przypadku będzie niższy i wyniesie

$$E\{v_1\} = \frac{1}{2} \text{ [Maskin i in. 2000]}.$$

Powyższy przykład pokazuje, że w przypadku gdy rozkłady kupieckich wycen nie są jednakowe teza twierdzenia 1 nie jest prawdziwa. W naszym przykładzie aukcja pierwszej ceny zapewnia sprzedawcy większy zysk niż aukcja otwarta (angielska). Prawdziwość takiej zależności dla tego przykładu nie zapewnia jego słuszności w ogólnym przypadku. Można pokazać przykłady, w których sprzedawca osiągnie większy zysk, jeśli sprzeda swój towar na zasadach aukcji angielskiej [Maskin i in. 2000].

Widzimy więc, że dla aukcji asymetrycznych nie można jednoznacznie określić, która reguła aukcyjna z punktu widzenia sprzedawcy jest bardziej efektywna. Można będzie to określić dopiero wtedy, gdy na rozkłady kupieckich wycen narzucone zostaną warunki określające rodzaj asymetrii między tymi rozkładami.

Maskin i Riley [Maskin i in. 2000] dokonali porównania aukcji angielskiej i aukcji pierwszej ceny w kilku szczególnych przypadkach. W dalszej części przedstawimy rezultaty tych porównań.

Nadal będziemy zakładać, że w aukcji uczestniczy dwóch kupców mających neutralny stosunek do ryzyka. Przez  $F_s$ ,  $F_m$  oznaczymy odpowiednio dystrybuanty rozkładów wycen kupca „słabego” i „mocnego”. Niech rozkłady te spełniają następujące warunki:  $F_i$  jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale  $(\beta_i, \alpha_i]$  oraz  $F_i'(v) > 0$ , dla wszystkich  $v \in [\beta_i, \alpha_i]$ ,  $i \in \{m, s\}$ . Załóżmy ponadto, że rozkłady spełniają następującą zależność

$$F_s(v) > F_m(v) \text{ dla wszystkich } v \in (\beta_s; \alpha_m). \quad (4)$$

Warunek (4) mówi, że rozkład wycen kupca m spełnia warunek stochastycznej dominacji rzędu 1 względem rozkładu wycen kupca s. W praktyce oznacza to, że wyceny kupca m przyjmują wartości wyższe od wycen kupca s. Warunek (4) pociąga za sobą następującą zależność

$$\beta_s \leq \beta_m \text{ oraz } \alpha_s \leq \alpha_m. \quad (5)$$

Silniejszym od kryterium stochastycznej dominacji rzędu 1 jest kryterium warunkowej stochastycznej dominacji. Rozkład wycen kupca m spełnia kryterium warunkowej stochastycznej dominacji względem rozkładu wycen kupca s, jeśli dla wszystkich  $x, y \in (\beta_m, \alpha_s)$  takich, że  $x < y$  zachodzi

$$\Pr\{v_m < x | v_m < y\} = \frac{F_m(x)}{F_m(y)} < \frac{F_s(x)}{F_s(y)} = \Pr\{v_s < x | v_s < y\}. \quad (6)$$

**Twierdzenie 2.** Załóżmy, że rozkład wycen kupca s spełnia kryterium warunkowej stochastycznej dominacji względem rozkładu wycen kupca m. Niech

$U_i^P(v, F_m, F_s)$  oznacza oczekiwany zysk *i-tego* kupca w przypadku aukcji pierwszej ceny, zaś  $U_i^A(v, F_m, F_s)$  oznacza oczekiwany zysk *i-tego* kupca w przypadku aukcji angielskiej (otwartej),  $i \in \{m, s\}$ . Wtedy prawdziwe są następujące zależności

$$U_m^A(v, F_m, F_s) \geq U_m^P(v, F_m, F_s) \quad \text{dla } v \in (\beta_m, \alpha_m] \quad (7)$$

$$U_s^P(v, F_m, F_s) \geq U_s^A(v, F_m, F_s), \quad v \in (b_*, \alpha_s] \quad (8)$$

gdzie  $b_*$  jest dolną granicą przedziału, w którym składane są oferty.

Dowód [Maskin i in. 2000].

Twierdzenie 2 pokazuje, że kupiec „słaby” osiągnie większy oczekiwany zysk, jeśli będzie uczestniczył w aukcji pierwszej ceny. Dla kupca z mocniejszą pozycją korzystniejsza jest zaś aukcja angielska (otwarta).

Słuszne jest również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Załóżmy, że rozkład wycen kupca  $s$  określony jest za pomocą dystrybuanty  $F_s$  takiej, że dla wszystkich  $v \in [\beta_s, \alpha_s]$  spełnione są

warunki.  $F_s''(v) \geq 0$  oraz  $\frac{d}{dv} \frac{F_s'(v)}{F_s(v)} < 0$ . Niech  $a < \alpha_s - \beta_s$ . Załóżmy, że dla

wszystkich  $v \in [\beta_s, \alpha_s + a]$  dystrybuanta wycen kupca  $m$  określona jest wzorem

$$F_m(v) = \begin{cases} 0 & v < a + \beta_s \\ F_s(v - a) & v \geq a + \beta_s \end{cases} \quad (9)$$

Dodatkowo przyjmijmy, że  $-vF_s'(v) + F_s(v) \geq 0$  dla wszystkich  $v \in [\beta_s, \beta_s + a]$ .

Przy tak określonych założeniach aukcja pierwszej ceny zapewnia sprzedawcy wyższy oczekiwany zysk niż aukcja angielska.

Zauważmy, że w tym przypadku rozkłady wycen są tego samego typu. Rozkład wycen kupca  $m$  jest „przesunięty” w prawo w stosunku do rozkładu kupca  $s$ . Podobną sytuację mieliśmy w przykładzie 1 ( $a = 2$ ).

Dowód [Maskin i in. 2000].

Zaprezentowane twierdzenia dotyczą sytuacji, w których aukcja pierwszej ceny daje wyższy dochód niż aukcja angielska. Przy innych rozkładach może być odwrotnie, co w rzeczywistości zdarza się znacznie częściej [Lebrun, 1999].

Z badań empirycznych wynika, że istnieją aukcje, dla których nie można przyjąć założenia, że rozkłady kupieckich wycen są jednakowe. Do takich aukcji należą na przykład aukcje dzieł sztuki lub koni rasowych. Podczas takich aukcji może się zdarzyć, że jeden z jej uczestników jest szczególnie zainteresowany nabyciem licytowanego obiektu i jest w stanie za niego zapłacić kwotę znacznie wyższą niż pozostali konkurenci.

Aukcje asymetryczne bardziej odpowiadają rzeczywistości, dlatego konieczna wydaje się być ich analiza. Z przedstawionych przez nas rezultatów wynika, że przy założeniach określonych w twierdzeniach 2 i 3 aukcja pierwszej ceny zapewnia sprzedawcy większy oczekiwany zysk niż aukcja angielska (otwarta). Zależność taka nie jest jednak prawdziwa przy braku tych założeń. Maskin i Riley podali przykłady aukcji, w których sprzedawca osiągnie większy zysk, jeśli sprzeda swój towar na aukcji angielskiej [Maskin i in. 2000]. Fakt ten potwierdza również „Pride of Poland” - jedna z bardziej znanych zarówno w Polsce jak i na świecie aukcji koni arabskich odbywającej się corocznie w Janowie Podlaskim. Oprócz aukcji głównej odbywającej się na zasadzie licytacji ma miejsce także przetarg w formie pisemnej zwany „Silent Sale”. Zyski ze sprzedaży koni na aukcji otwartej są jednak nieporównywalnie większe w porównaniu z aukcją pierwszej ceny. Podczas ubiegłorocznej XXXVI aukcji „Pride of Poland” sprzedano 33 konie za łączną kwotę 953 000 euro, podczas gdy na „Silent Sale” zaledwie 7 za kwotę 39 550 euro. Wyniki te potwierdzają zatem, że w tym przypadku aukcja otwarta daje większy zysk niż aukcja pierwszej ceny.

Wnioski wysunięte w tej pracy rzucają pewne światło na porównanie aukcji asymetrycznych, nie pozwalają jednak rozwiązać tego problemu do końca. Prowadzone są badania, mające na celu ustalić zależności między aukcjami asymetrycznymi, w których uczestniczy więcej niż dwóch kupców oraz aukcjami, w których rozkłady wycen nie spełniają założeń przedstawionych przez nas twierdzeń [Lebrun, 1999].

## LITERATURA

- Drabik E. (2005) Zastosowanie teorii gier w ekonomii i zarządzaniu, Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Graham D. A. Marshall R., C. (1987) Collusive Bidder Behavior of a Single Object Second Price and English Auction, *Journal of Political Economy*, 95: 1217-1239.
- Lebrun B. (1999) First Price Auction In the Asymmetric N Bidders Case, *International Economic Review*, 40: 125-142.
- Lebrun B. (1996) Existence of an Equilibrium in First-Price Auctions, *Economic Theory*, 7: 421-443.
- Maskin E., Riley J. (2000) Asymmetric Auctions, *Review of Economic Studies*, Vol 67 No.3: 413-438.
- McAfee P., McMillan J. (1992) Bidding Rings, *American Economic Review*, 82: 579-599.
- Riley J., Samuelson L. (1981) Optimal Auctions, *American Economic Review*, 71: 381-392.
- Samuelson W.F., Marks S. G. (1998) *Ekonomia menedżerska*, PWE, Warszawa.
- Vickrey, W. (1961) Counterspeculations, Auctions and Competitive Sealed Tenders, *Journal of Finance*, 16: 8-37.



**An attempt to analyze the auctions with different distributions of valuations**

**Summary:** Until the end of the 90s, when analyzing auctions, it was assumed that distributions of bidders valuations are identical. However, this assumption is highly idealized and cannot be accepted for the majority of auctions - such auctions are called asymmetric. Works of art or thoroughbred horse auctions belong to his kind of auctions. This thesis tries to analyze auctions with different distribution of bidders valuations. It pays more attention to a comparison of seller's expected revenue from a first price sealed-bid auction and an open (English) auction. It will show that Revenue Equivalent Theorem is not true in this situation. It will also prove that if the distributions of bidders valuations fulfill first order stochastic dominance then the first price sealed-bid auction will ensure higher expected revenue than the open (English) auction.

**Key words:** auction, distribution of valuations, seller's expected revenue

Piotr Łukasiewicz<sup>1</sup>, Grzegorz Koszela<sup>1</sup>, Arkadiusz Orłowski<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW, <sup>2</sup> Instytut Fizyki PAN

e-mail: plukasiewicz@mors.sggw.waw.pl, gkoszela@mors.sggw.waw.pl  
orlow@ifpan.edu.pl

## WPLYW WYBORU SKALI EKWIWALENTNOŚCI NA WYNIKI W ZAKRESIE POMIARU UBÓSTWA I KONCENTRACJI DOCHODÓW

**Streszczenie:** W pracy badamy wpływ wyboru skali ekwiwalentności na wielkość ubóstwa i poziom koncentracji dochodów. Wykorzystujemy indywidualne dane o dochodach gospodarstw domowych z lat 1998-2004. Analizujemy rozkłady dochodów w przeliczeniu na osobę oraz rozkłady dochodów ekwiwalentnych otrzymanych przy zastosowaniu czterech różnych skal. Badamy zmiany w wielkości ubóstwa i poziomie koncentracji w aspekcie statycznym, jak również kierunki zmian zachodzące w czasie.

**Słowa kluczowe:** skale ekwiwalentności, koncentracja dochodów, ubóstwo

### WPROWADZENIE

W badaniach dochodów i wydatków ludności stosowanych jest obecnie wiele rodzajów skal ekwiwalentności. Różne typy skal oraz związany z tym problem wyboru skali są szeroko omawiane w literaturze [Panek i in. 1999, Szulc 1995, Kot 2000, Rusnak i in. 2004]. Buhmann i in. [1988] charakteryzują 35 różnych skal ekwiwalentności wykorzystywanych w różnych krajach. W Polsce stosowanych jest kilka skal. Oprócz skal normatywnych (ustalanych przez ekspertów) wykorzystywanych np. przez GUS, Radziukiewicz [1992], czy Wiśniewskiego [1996] stosowane są również skale „quasi-dokładne” [Szulc 1992, 1995] oraz skale subiektywne [Podgórski 1994, Kasprzyk 2000, Kot 2000].

Skale ekwiwalentności to parametry określające jaki jest wpływ składu demograficznego gospodarstwa domowego na jego koszty utrzymania. W 1980 roku Deaton i Muellbauer zaproponowali ogólną skalę ekwiwalentności:

$$SE(\mathbf{p}, u, \mathbf{A}, \mathbf{A}_0) = \frac{c(\mathbf{p}, u, \mathbf{A})}{c(\mathbf{p}, u, \mathbf{A}_0)}, \quad (1)$$

gdzie  $c$  – funkcja kosztów (wydatków),  $\mathbf{p}$  – wektor cen,  $u$  – ustalony poziom użyteczności,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_0$  – wektory charakterystyk demograficznych badanego gospodarstwa i gospodarstwa odniesienia. Skala określona wzorem (1) jest więc zdefiniowana jako iloraz funkcji kosztów dwóch gospodarstw różniących się jedynie charakterystykami demograficznymi. Wartość tak określonej skali jest równa minimum kosztów (wydatków) gospodarstwa domowego o charakterystyce

demograficznej  $\mathbf{A}$ , jaki jest konieczny do osiągnięcia poziomu użyteczności  $u$  przez gospodarstwo odniesienia o charakterystyce demograficznej  $\mathbf{A}_0$ . Badania pokazały jednak, że nie jest możliwe zbudowanie skal ekwiwalentnych (1) wyłącznie na podstawie wydatków gospodarstw domowych i cen dóbr. Skale ekwiwalentne rozumiane jako iloraz funkcji kosztów gospodarstw domowych o różnych charakterystykach demograficznych nie mogą być uzyskane na podstawie obserwacji rynkowych zachowań gospodarstw [Kot 2000]. Nie potrafimy więc obecnie odpowiedzieć jednoznacznie na pytanie: jakim dochodem powinno dysponować gospodarstwo domowe o charakterystyce demograficznej  $\mathbf{A}$ , aby osiągnąć dobrobyt gospodarstwa odniesienia o charakterystyce demograficznej  $\mathbf{A}_0$  i dochodzie  $x_0$ ?. W literaturze proponowane są dwa sposoby rozstrzygnięcia tego dylematu [Kot 2000]. Pierwszy to wprowadzenie pewnych arbitralnych założeń, które pozwolą na oszacowanie skal metodami ekonometrycznymi. Podejście to prowadzi oczywiście do arbitralności skal [np. skala „quasi-dokładna”, Szulc 1992]. Drugi sposób, to wykorzystanie pewnych informacji pozarynkowych, którymi są najczęściej subiektywne oceny poziomu dobrobytu uzyskane na drodze badań ankietowych [Podgórski 1994, Kasprzyk 2000, Kot 2000].

W praktyce badań społecznych funkcjonuje wiele typów skal ekwiwalentności, ale żadna z nich nie stała się akceptowanym powszechnie standardem. W prezentowanej pracy badamy jaki jest wpływ wyboru skali ekwiwalentności na wielkość ubóstwa w ujęciu relatywnym oraz poziom koncentracji dochodów (nierówności dochodowych). Zagadnienia te badane już były w literaturze polskiej. Rusnak i in. [2004] wykorzystują dane o dochodach gospodarstw domowych w 2001 roku w podziale wg klasy miejscowości zamieszkania i badają wpływ zastosowania oryginalnej i zmodyfikowanej skali OECD na kształt i parametry rozkładu dochodów oraz wydatków. Autorzy dyskutują również zmiany w zasięgu i głębokości ubóstwa relatywnego w wyróżnionych grupach. W naszej pracy rozpatrujemy cztery skale ekwiwalentności i pięć kategorii dochodów. Z jednej strony obserwujemy jak duże różnice pojawiają się przy przejściu od jednej skali do drugiej. Z drugiej strony interesuje nas aspekt dynamiczny – czy zmiana skali prowadzi do tych samych, czy innych wniosków co do kierunków zmian nierówności dochodów, zasięgu i głębokości ubóstwa zachodzących w czasie.

## SKALE EKWIWALENTNOŚCI I ICH PODZIAŁ

Przy porównywaniu dobrobytu gospodarstw domowych, oprócz dochodu należy uwzględnić również ich podstawowe cechy demograficzne. Wiąże się to z tym, że takie cechy jak np. wielkość gospodarstwa, liczba dzieci, wiek głowy gospodarstwa i inne decydują o potrzebach konsumpcyjnych gospodarstwa, a więc również o jego kosztach utrzymania. Badane gospodarstwa nie stanowią, więc jednorodnej grupy, w której poszczególne jednostki różnią się jedynie dochodem i wydatkami. W celu wyeliminowania wpływu cech demograficznych na koszty

utrzymania gospodarstwa i uzyskania prawidłowych porównań dobrobytu należy dokonać przeliczenia dochodu za pomocą skal ekwiwalentności. *Skala ekwiwalentności to wskaźnik określający wpływ składu demograficznego gospodarstwa domowego na jego koszty utrzymania (poziom konsumpcji)*. Skala ekwiwalentności dla gospodarstwa o danym składzie demograficznym informuje ile razy należy zmienić (zmniejszyć lub zwiększyć) jego dochód, aby osiągnęło ono ten sam poziom konsumpcji, co gospodarstwo stanowiące punkt odniesienia (ze skalą równą 1). Skala ekwiwalentności służy m.in. do wyznaczenia dochodu ekwiwalentnego.

*Dochód ekwiwalentny gospodarstwa domowego to dochód gospodarstwa podzielony przez ustaloną skalę ekwiwalentności*. Dochód ekwiwalentny jest więc miernikiem porównywalnym między gospodarstwami domowymi niezależnie od ich składu demograficznego. Skale ekwiwalentności można podzielić na: normatywne, empiryczne oraz subiektywne [Szulc 1995, Panek i in. 1999].

Skale normatywne konstruowane są na podstawie opinii ekspertów określających przeciętny wzrost kosztów utrzymania związany ze zwiększeniem liczby osób w gospodarstwie. Przykładem takiej skali jest skala OECD. Jest to oficjalna skala w statystyce Unii Europejskiej, na której oparte są m.in. międzynarodowe analizy Biura Statystycznego Wspólnot Europejskich (EUROSTAT). Skala OECD 70/50 przyporządkowuje pierwszej dorosłej osobie w gospodarstwie wagę równą 1, każdej następnej dorosłej osobie wagę 0,7, a każdemu dziecku wagę równą 0,5. Wartości skali można wyznaczyć za pomocą wzoru

$$S_{70/50} = 1 + 0,7(k_A - 1) + 0,5k_C, \quad (2)$$

gdzie  $k_A$  i  $k_C$  oznaczają odpowiednio liczbę osób dorosłych i liczbę dzieci w gospodarstwie domowym. Od połowy lat dziewięćdziesiątych w wysokorozwiniętych krajach europejskich stosuje się zmodyfikowaną skalę OECD 50/30, która osobom dorosłym przypisuje wagę 0,5, a dzieciom wagę równą 0,3. Zmiana ta spowodowana była malejącym udziałem wydatków na żywność w budżetach gospodarstw domowych, a wiadomo, że spośród różnych wydatków gospodarstw domowych właśnie wydatki żywnościowe rosną najszybciej wraz ze wzrostem liczby osób. Równie często stosowane w badaniach są skale LIS [por. Buhmann i in. 1988].

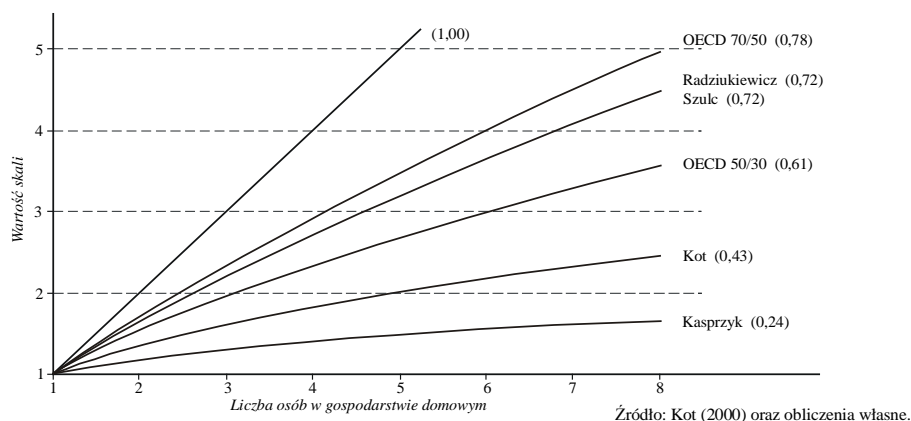
Są to skale potęgowe, które wyznacza się za pomocą wzoru

$$S_{LIS} = k^\varepsilon, \quad (3)$$

gdzie  $k = k_A + k_C$  oznacza liczbę osób w gospodarstwie domowym, natomiast  $\varepsilon \in [0; 1]$ . Parametr  $\varepsilon$  interpretuje się jako elastyczność skali względem wielkości gospodarstwa (liczby osób). Dzieląc dochód gospodarstwa przez wartość skali w przypadku  $\varepsilon = 0$  otrzymujemy dochód gospodarstwa domowego, a w przypadku  $\varepsilon = 1$  – dochód na osobę. Tą ostatnią kategorię dochodu możemy więc traktować jako skrajny przypadek dochodu ekwiwalentnego. W przeciwieństwie do skal OECD skale LIS nie uwzględniają wieku członków gospodarstwa domowego.

Problemem w przypadku tych skal dobór współczynnika elastyczności. Radziukiewicz [1992] badając polskie gospodarstwa domowe przyjmowała  $\varepsilon = 0,72$ . Prosta konstrukcji skal potęgowych sprawia, że skale te wykorzystuje się również do przybliżania innych typów skal [Buhmann i in. 1988, Kot 2000]. Kot wyznaczył parametry elastyczności dla skal OECD 70/50, OECD 50/30 i skali „quasi-dokładnej” Szulca. Otrzymane elastyczności są równe odpowiednio: 0,78, 0,61 i 0,72. Wyniki Buhmann oraz Kota pokazują, że liczba osób w gospodarstwie domowym w bardzo wysokim stopniu wyjaśnia zmienność badanych skal ekwiwalentnych. Wpływ innych czynników tj. wiek dziecka, czy wiek głowy gospodarstwa domowego jest znacznie mniejszy.

W odróżnieniu od omówionych rodzajów skal skale empiryczne dają możliwość uwzględnienia innych niż liczba osób dorosłych i dzieci charakterystyk demograficznych gospodarstwa domowego, które również mogą mieć wpływ na jego potrzeby konsumpcyjne (przeważnie wiek dziecka, wiek głowy gospodarstwa, miejsce zamieszkania). Skale te szacuje się metodami ekonometrycznymi, w oparciu o rzeczywiste wydatki gospodarstw, przy czym wykorzystuje się fakt, że gospodarstwa o różnym składzie demograficznym inaczej dysponują swoimi wydatkami konsumpcyjnymi. Wyznaczenie tego typu skal wymaga oszacowania parametrów funkcji wydatków [por. Szulc 1992, 1995, Dudek 2006].



Rysunek 1. Wybrane skale ekwiwalentności jako potęgowe funkcje liczby osób. W nawiasach podano przybliżoną wartość elastyczności.

Subiektywne skale ekwiwalentności otrzymywane są na podstawie badań ankietowych, w których gospodarstwa domowe udzielając odpowiedzi na przygotowane pytania dokonują subiektywnej oceny dobrobytu (dochodów). Szeroko stosowaną metodą są badania oparte na tzw. systemie *Lejdejskich Pytań Oceniających Dochód*, które w Polsce prowadzone były m.in. przez Podgórskiego [1994], Kota [1995] oraz Kasprzyk [2000]. Otrzymana przez Kasprzyk potęgowa skala ekwiwalentności jest bardzo płaska i charakteryzuje się elastycznością równą

około 0,24. Inny, alternatywny system pytań oceniających dochód opracował Kot [1997, 2000]. System ten nazywany w literaturze *Krakowskimi Pytaniami Oceniającymi Dochód* bazuje na progowym pomiarze dochodu. Stosując swoją metodę Kot uzyskał potęgową skalę ekwiwalentności o elastyczności około 0,43. Na rys. 1 przedstawiono wybrane skale ekwiwalentności w postaci wykresów potęgowych funkcji liczby osób.

## DANE EMPIRYCZNE I METODA BADAWCZA

W pracy wykorzystane zostały indywidualne informacje o dochodach rozporządzalnych gospodarstw domowych z lat 1998-2004. Dane pochodzą z badań budżetów gospodarstw domowych prowadzonych każdego roku przez GUS. Analizowaną kategorią dochodu jest dochód na osobę oraz dochód ekwiwalentny otrzymany na za pomocą skal OECD 70/50 i OECD 50/30 oraz skal potęgowych o elastycznościach 0,72 i 0,43. Wartości skal OECD wyznaczone zostały bezpośrednio z definicji (nie za pomocą przybliżeń funkcją potęgową). Rozkłady dochodów ważone były liczbą osób w gospodarstwie domowym. Informacje o wielkości prób oraz średnich wartościach rozpatrywanych kategorii dochodów zamieszczone zostały w tab. 1 i tab. 2.

Tabela 1. Liczebności badanych prób (liczba osób w gospodarstwach domowych).

Rok	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
<i>n</i>	100.779	99.791	114.377	99.241	99.876	99.554	99.038

Zródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Średnia i mediana dochodów ekwiwalentnych.

Rok	Rodzaj skali ekwiwalentności									
	$\varepsilon = 1$	OECD 70/50	LIS $\varepsilon = 0,72$	OECD 50/30	Kot $\varepsilon = 0,43$	$\varepsilon = 1$	OECD 70/50	LIS $\varepsilon = 0,72$	OECD 50/30	Kot $\varepsilon = 0,43$
	Średnia					Mediana				
1998	514,9	674,4	716,6	826,2	1027,2	440,9	588,1	628,0	724,9	903,8
1999	557,8	729,1	776,2	892,5	1112,6	475,5	633,6	678,2	781,1	980,3
2000	606,4	791,7	842,6	968,5	1206,1	511,6	680,4	725,4	835,9	1041,4
2001	651,6	845,8	899,8	1030,9	1280,2	547,0	727,7	777,9	891,7	1117,2
2002	675,8	873,2	929,4	1061,5	1317,5	558,6	740,2	793,8	910,1	1140,2
2003	696,1	898,5	956,1	1091,4	1353,6	574,9	756,9	810,8	927,5	1158,0
2004	721,9	933,1	992,4	1134,2	1405,7	593,3	781,4	838,9	955,6	1200,0

Zródło: obliczenia własne.

W przypadku każdej próby dokonano pomiaru koncentracji dochodów oraz wyznaczono podstawowe indeksy ubóstwa. Do zbadania koncentracji dochodów zastosowano dwa najczęściej używane indeksy: *indeks Giniego G* oraz *średnie względne odchylenie R*. Dla danych indywidualnych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  o średniej  $\mu_x$  indeksy  $G$  i  $R$  wyrażają się za pomocą wzorów:

$$G = \frac{1}{2n^2\mu_x} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|. \quad R = \frac{1}{2n\mu_x} \sum_{i=1}^n |x_i - \mu_x|. \quad (4)$$

Pomiar ubóstwa ograniczono do zbadania zasięgu oraz głębokości ubóstwa. Zastosowano trzy relatywne linie ubóstwa  $z$ : 50% mediany dochodów oraz 50% i 60% średnich dochodów [por. Golinowaka 1995, Panek i in. 1999]. Zasięg ubóstwa mierzony był za pomocą indeksu  $H$  będącego *odsetkiem jednostek ubogich*. Głębokość ubóstwa mierzono indeksem  $J$ , zwanym *luką dochodową*. Wzory mają postać

$$H = \frac{q}{n}, \quad J = \frac{1}{qz} \sum_{i=1}^q (z - x_i). \quad (5)$$

gdzie  $q$  oznacza liczbę jednostek ubogich,  $n$  liczbę wszystkich jednostek, natomiast  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jest uporządkowanym niemalejąco szeregiem szczegółowym. Przez  $z$  oznaczono linię ubóstwa. Różnica  $z - x_i$  to *indywidualna luka dochodowa*, wyrażająca głębokość ubóstwa jednostki posiadającej dochód  $x_i$ . Indeks  $J$  informuje o względnym zubożeniu w obrębie grupy jednostek ubogich i ukazuje średni względny dystans dochodów jednostek ubogich od granicy ubóstwa. Oczywiście  $H \in [0; 1]$ , ale również  $J \in [0; 1]$ , przy czym wartość indeksu  $J$  rośnie wraz z pogłębianiem się ubóstwa. Szczegółową charakterystykę wszystkich zastosowanych mierników można znaleźć w pracy Kota [2000].

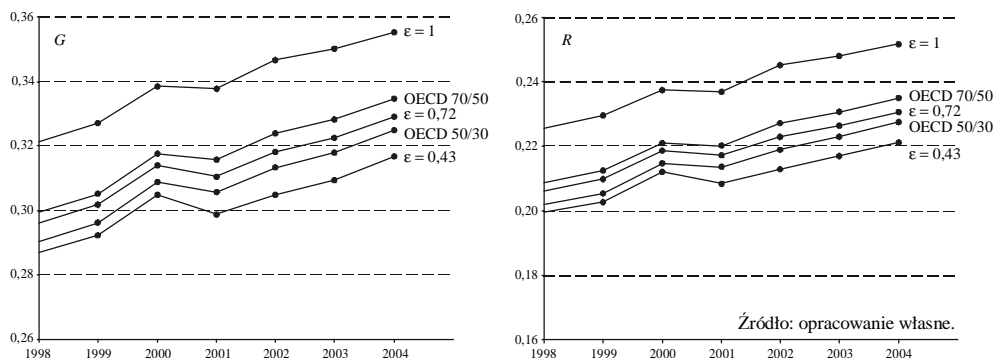
## WYNIKI BADANIA

W tab. 3 zamieszczono wartości indeksów  $G$  i  $R$  dla pięciu badanych kategorii dochodów. Dodatkowo zmiany indeksów w czasie pokazano na rys. 2. Najwyższe wartości koncentracji dochodów obserwujemy dla dochodu na osobę. Wraz ze zmniejszaniem się elastyczności skali maleją również wartości indeksów. Wykresy przedstawione na rysunku 2 mogą wydawać się przesunięte wzdłuż osi pionowej, w rzeczywistości zmiana skali ekwiwalentności powoduje w przybliżeniu proporcjonalną zmianę wartości indeksów koncentracji (za wyjątkiem skali o najniższej elastyczności). Rodzaj zastosowanej skali nie wpływa na kierunek zmian w koncentracji dochodów.

Tabela 3. Wartości indeksów koncentracji dochodów ekwiwalentnych

Rok	Rodzaj skali ekwiwalentności									
	$\varepsilon = 1$	OECD 70/50	LIS $\varepsilon = 0,72$	OECD 50/30	Kot $\varepsilon = 0,43$	$\varepsilon = 1$	OECD 70/50	LIS $\varepsilon = 0,72$	OECD 50/30	Kot $\varepsilon = 0,43$
	Indeks Giniego $G$					Średnie względne odchylenie $R$				
1998	0,321	0,299	0,296	0,290	0,287	0,225	0,209	0,206	0,202	0,200
1999	0,327	0,305	0,302	0,296	0,292	0,229	0,212	0,210	0,205	0,203
2000	0,338	0,318	0,314	0,309	0,305	0,237	0,221	0,219	0,215	0,212
2001	0,338	0,316	0,311	0,306	0,299	0,237	0,221	0,217	0,214	0,209
2002	0,347	0,324	0,318	0,313	0,305	0,245	0,227	0,223	0,219	0,213
2003	0,350	0,328	0,322	0,318	0,309	0,248	0,231	0,226	0,223	0,217
2004	0,356	0,335	0,329	0,325	0,317	0,252	0,235	0,231	0,228	0,221

Źródło: obliczenia własne.



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2. Zmiany indeksów  $G$  i  $R$  dla pięciu kategorii dochodów.

W tab. 4 i 5 podano wartości indeksów  $H$  i  $J$  wyznaczonych przy granicach ubóstwa wynoszących 50% mediany oraz 60% średniej. W przypadku granic równych 50% mediany oraz 50% średniej zmiany indeksu  $H$  pokazano również na rys. 3. W każdym przypadku najwyższe wartości indeksu  $H$  obserwujemy dla dochodu na osobę i podobnie jak w przypadku koncentracji dochodów wraz ze zmniejszaniem się elastyczności skali maleje również odsetek osób ubogich (mimo, że wielkość granicy ubóstwa również zmienia się wraz ze zmianą skali). Analiza wykresów pokazanych na rys. 3 wskazuje, że niezależnie od zastosowanej skali ekwiwalentności obserwujemy bardzo podobne zmiany indeksu  $H$ . Możemy jednak dostrzec pewne niezgodności co do kierunku tych zmian. W tab. 4, w okresie 2000-2001 obserwujemy spadek indeksu  $H$  dla dochodów na osobę, natomiast dla dochodów ekwiwalentnych odnotowujemy wzrost indeksu. Podobne, niewielkie różnice występują również w okresach 2002-2003 (tab. 4), 2000-2001 (tab. 5). Zatem zmiana skali wpływa w niewielkim stopniu na kierunek zmian w zasięgu ubóstwa.



Tabela 4. Wartości indeksów ubóstwa dla granicy ubóstwa równej 50% mediany

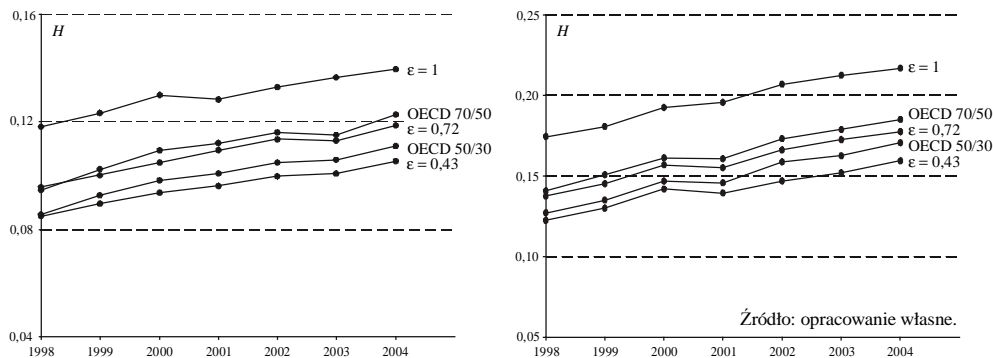
Rok	Rodzaj skali ekwiwalentności									
	$\varepsilon = 1$	OECD 70/50	LIS $\varepsilon = 0,72$	OECD 50/30	Kot $\varepsilon = 0,43$	$\varepsilon = 1$	OECD 70/50	LIS $\varepsilon = 0,72$	OECD 50/30	Kot $\varepsilon = 0,43$
	Odsetek ubogich <i>H</i>					Luka dochodowa <i>J</i>				
1998	0,118	0,095	0,096	0,086	0,085	0,297	0,304	0,297	0,305	0,298
1999	0,123	0,102	0,100	0,093	0,090	0,308	0,311	0,311	0,315	0,314
2000	0,130	0,109	0,105	0,098	0,093	0,314	0,314	0,318	0,318	0,317
2001	0,129	0,112	0,109	0,101	0,096	0,315	0,307	0,305	0,309	0,304
2002	0,133	0,116	0,114	0,105	0,100	0,305	0,294	0,291	0,295	0,290
2003	0,136	0,115	0,113	0,106	0,101	0,305	0,303	0,300	0,299	0,295
2004	0,140	0,123	0,119	0,111	0,106	0,311	0,298	0,299	0,296	0,292

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5. Wartości indeksów ubóstwa dla granicy ubóstwa równej 60% średniej

Rok	Rodzaj skali ekwiwalentności									
	$\varepsilon = 1$	OECD 70/50	LIS $\varepsilon = 0,72$	OECD 50/30	Kot $\varepsilon = 0,43$	$\varepsilon = 1$	OECD 70/50	LIS $\varepsilon = 0,72$	OECD 50/30	Kot $\varepsilon = 0,43$
	Odsetek ubogich <i>H</i>					Luka dochodowa <i>J</i>				
1998	0,264	0,227	0,223	0,213	0,211	0,298	0,281	0,280	0,271	0,267
1999	0,267	0,233	0,229	0,218	0,215	0,310	0,294	0,291	0,286	0,279
2000	0,282	0,248	0,243	0,235	0,229	0,316	0,299	0,297	0,289	0,285
2001	0,285	0,249	0,243	0,234	0,226	0,314	0,299	0,295	0,288	0,283
2002	0,296	0,263	0,255	0,244	0,236	0,319	0,298	0,295	0,292	0,281
2003	0,303	0,269	0,261	0,252	0,240	0,320	0,301	0,298	0,291	0,287
2004	0,310	0,276	0,267	0,260	0,249	0,323	0,305	0,304	0,297	0,288

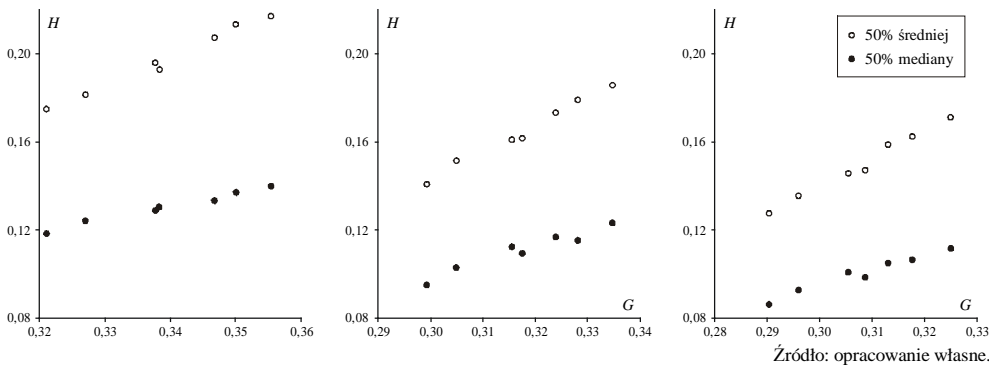
Źródło: obliczenia własne.



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3. Zmiany odsetka osób ubogich (*H*) dla linii ubóstwa równych 50% mediany (wykres z lewej strony) i 50% średniej.

Zauważmy, że niezależnie od zastosowanej skali odpowiadające sobie szeregi czasowe na rys. 2 i 3 są bardzo podobne. Wykresy rozproszenia dla indeksu Giniego i indeksu  $H$  ukazują bardzo silną dodatnią zależność obu zmiennych. Zależność tą pokazano na rys. 4 dla wybranych przykładowo trzech kategorii dochodów i dwóch granic ubóstwa.



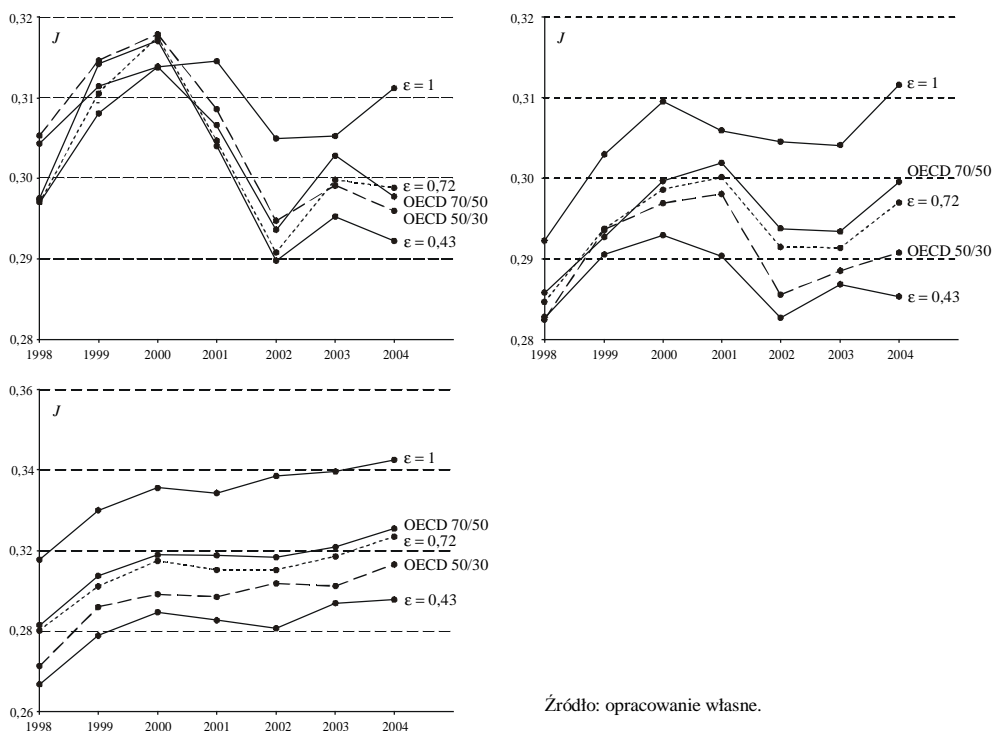
Rysunek 4. Wykresy rozproszenia dla zmiennych  $G$  i  $H$ . Od lewej: dochód na osobę, dochód ekwiwalentny (OECD 70/50), dochód ekwiwalentny (OECD 50/30).

Na rys. 5 przedstawiono zmiany głębokości ubóstwa mierzonego indeksem  $J$  dla wszystkich rozpatrywanych skal ekwiwalentności. Dla ustalonej kategorii dochodów, przy różnych liniach ubóstwa można zauważyć jedynie niewielkie różnice w wartościach miernika  $J$ . Zatem zmiana granicy ubóstwa nie wpływa w dużym stopniu na głębokość ubóstwa. Widać natomiast wyraźnie, że zmiana skali ekwiwalentności może prowadzić do zupełnie innych wniosków co do głębokości ubóstwa oraz kierunku jego zmian w czasie. Niezgodności te są szczególnie ostro widoczne w przypadku najniższej granicy ubóstwa (50% mediany).

## WNIOSKI KOŃCOWE

1. Najwyższy poziom koncentracji dochodów obserwujemy dla dochodu na osobę. Wraz ze zmniejszaniem się elastyczności skali ekwiwalentności maleją wartości indeksów koncentracji (indeksu Giniego i średniego względnego odchylenia).
2. Zmiana skali ekwiwalentności powoduje w przybliżeniu proporcjonalną zmianę wartości indeksów koncentracji, nie wpływa więc na kierunek zmian poziomu koncentracji dochodów.
3. Wzrostowi koncentracji dochodów odpowiada wzrost wielkości ubóstwa relatywnego. Występuje bardzo silna zależność między wartościami indeksów  $G$  i  $H$  oraz  $R$  i  $H$ .

4. Wraz ze spadkiem elastyczności skali ekwiwalentności obserwujemy zmniejszanie się odsetka osób ubogich. Duże różnice występują między dochodem na osobę, a dochodem ekwiwalentnym wyznaczonym wg „starej” skali OECD: od 1,6%-2,3% przy granicy ubóstwa 50% mediany, do 3,3%-3,7% przy granicy 60% średniej. W przypadku „starej” i zmodyfikowanej skali OECD różnice zasięgu ubóstwa nie przekraczają 2%. Należy jednak pamiętać, że różnice te mogą być większe w jednorodnych grupach gospodarstw.
5. Dla danej skali ekwiwalentności zmiana relatywnej granicy ubóstwa wpływa tylko w niewielkim stopniu na głębokość ubóstwa.
6. Przy niskiej granicy ubóstwa (50% mediany), wraz ze zmniejszaniem się elastyczności skali ekwiwalentności obserwujemy niemonotoniczne zmiany indeksu głębokości ubóstwa. Wraz ze wzrostem granicy ubóstwa (50% średniej i 60% średniej) zmiany indeksu  $J$  stają się „coraz mniej chaotyczne”.
7. Zastępując „starą” skalę OECD skalą potęgową o elastyczności 0,72 otrzymujemy niższe wartości indeksów koncentracji i ubóstwa, ale wyższe niż w przypadku zastosowania zmodyfikowanej skali OECD. Różnice w wartościach indeksów są niewielkie.



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 5. Zmiany głębokości ubóstwa (indeks  $J$ ) dla linii ubóstwa równych 50% mediany (na górze z lewej), 50% średniej (na górze z prawej) i 60% średniej.

## LITERATURA

- Dudek H. (2006) Zastosowanie ekonometrycznych modeli udziału wydatków na żywność w statystyce społecznej, *Wiadomości Statystyczne* (w druku).
- Golinowska S. (1995) Linie ubóstwa w praktyce społecznej krajów transformacji gospodarczej, *Polityka Społeczna* 22 (8), str. 1 – 5
- Kasprzyk B. (2000) Subiektywne skale ekwiwalentności, *Polityka Społeczna* 27 (8), str. 5 – 8.
- Kot S.M. (1995) Modelowanie poziomu dobrobytu teoria i zastosowanie, Wyd. Ossolineum, Wrocław
- Kot S.M. (1997) Towards The Economics of The Ultra-Poor, *Researches on Labour Markets and Level of Life in Poland, Slovakia and Ukraine. Methods and Results*, Kraków, str. 17 – 35
- Kot S.M. (2000) Ekonometryczne modele dobrobytu, PWN, Warszawa-Kraków
- Kot S.M. (2002) Metodologiczne dylematy pomiaru nierówności i dobrobytu, [w:] *Nierówności Społeczne a Wzrost Gospodarczy*, Uniwersytet Rzeszowski
- Panek T., Podgórski J., Szulc A. (1999) Ubóstwo: teoria i praktyka pomiaru, *Monografie i Opracowania* 453, SGH, Warszawa
- Podgórski J. (1994) Wyznaczanie subiektywnych linii ubóstwa, *Wiadomości Statystyczne* 12, str. 12 – 19
- Rusnak Z., Kośny M. (2004) Wpływ zmiany skali ekwiwalentności na rozkład dochodów i wydatków ekwiwalentnych, [w:] *Zastosowania statystyki i matematyki w ekonomii*, Ostasiewicz W. (red.), Wyd. AE we Wrocławiu, str. 268 – 289
- Szulc A. (1992) Quasi-exact Equivalence Scales Estimation, *Przegląd Statystyczny* 3/4, str. 302 – 307
- Szulc A. (1995) Skale ekwiwalentności w pomiarze dobrobytu gospodarstw domowych, *Polityka Społeczna* 22 (8), str. 37 – 42
- Wiśniewski M. (1996) Zmiany rozkładu dochodów 1987-1992, [w:] *Studia nad reformowaną gospodarką*, M. Okólski, U. Sztanderska (red.), PWN, Warszawa, str. 232 – 268

**The influence of equivalence scales on the poverty measurement results and distribution of incomes**

**Summary:** In this paper we study influence of equivalence scales on poverty and distribution of incomes. We use data about incomes of households that cover year 1998 to 2004. We analyze distributions of incomes per person and distributions of equivalent incomes obtained with use of four different scales. We study changes in magnitude of poorness and distribution of incomes in static case as well as directions of changes in time.

**Key words:** equivalence scales, distribution of incomes, poverty.

Justyna Majewska  
Katedra Statystyki, Akademia Ekonomiczna w Katowicach  
e-mail: majewskaj@wp.pl

## ESTYMATORY ODPORNE ZMIENNOŚCI W MODELU BLACKA - SCHOLES

**Streszczenie:** Najważniejszym etapem przy wycenie opcji jest właściwe oszacowanie zmienności instrumentu finansowego. W przypadku występowania w zbiorze danych finansowych obserwacji odstających oraz grubych ogonów w rozkładzie danych zastosowanie znajdują odporne estymatory. W pracy przedstawione zostały odporne estymatory zmienności: t-estymatory oraz A-estymatory pozwalające na dokładniejsze wyznaczenie parametru zmienności. Dokonaliśmy analizy porównawczej wartości opcji na indeks WIG20 WGPW biorąc pod uwagę klasyczne odchylenie standardowe, odchylenie medianowe MAD, A-estymator oraz t-estymator. Wartości opcji zostały wyznaczone za pomocą powszechnie stosowanego przez inwestorów modelu wyceny europejskiej opcji kupna Blacka-Scholesa. Ponadto, w pracy przedstawiliśmy narzędzia modelowania odpornego do wykrywania obserwacji wpływowych i nietypowych oraz do analizy wpływu odporności estymatorów na pewne odstępstwa od założonego modelu.

**Słowa kluczowe:** odporne estymatory zmienności, t-estymatory, A-estymatory, model wyceny Blacka-Scholesa, odchylenie standardowe, odchylenie medianowe, punkty odstające, funkcja wpływu, punkt załamania, maksimum odchylenia.

### WSTĘP

Powszechnie stosowany model wyceny europejskiej opcji kupna Blacka-Scholesa zakłada rozkład normalny stóp zwrotu instrumentu bazowego, zatem bardzo często parametr zmienności jest szacowany jako odchylenie standardowe. Powszechnie wiadomo, że rozkład obserwowanych danych finansowych rzadko jest rozkładem normalnym. Wręcz przeciwnie, często jest rozkładem leptokurtycznym z grubymi ogonami. W zbiorze danych finansowych bardzo często można wyróżnić wartości wyraźnie różniące się od pozostałych tzw. obserwacje odstające (ang. *outliers*), których występowanie może istotnie zmienić końcowy wynik analizy. W związku z powyższym odchylenie standardowe stosowane w modelu Blacka-Scholesa nie jest efektywnym estymatorem zmienności, a wyznaczenie wartości opcji z tego modelu jest obarczone błędem. Zasygnalizowane problemy występujące podczas stosowania modeli parametrycznych doprowadziły do rozwinięcia metod odpornych, a estymatory odporne stanowią alternatywę wobec klasycznych estymatorów. Idea zastosowania odpornych metod estymacji pojawiła się już w latach pięćdziesiątych XX wieku, a intensywnie rozwinęła się dzięki pracom Hubera (1964) i Hampela (1968).

Celem tej pracy jest zaprezentowanie odpornych estymatorów zmienności: A-estymatorów i t-estymatorów oraz zastosowanie ich w wyznaczeniu wartości opcji na indeks WIG20 Warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych. Wykorzystując odchylenie standardowe, odchylenie medianowe MAD, A-estymator oraz t-estymator dokonamy analizy porównawczej wyceny opcji. Przedstawimy narzędzia modelowania odpornego do wykrywania obserwacji wpływowych i nietypowych oraz do analizy wpływu odporności estymatorów na pewne odstępstwa od założonego modelu.

## PODSTAWOWE POJĘCIA

Głównym celem stosowania metod odpornych jest poprawa wyników estymacji parametrów służących do budowy modelu. W teorii metod odpornych rozpatrujemy miarę opisową zdefiniowaną jako funkcjonal  $T(\cdot)$ , który przyporządkowuje każdej dystrybuancie  $F$  ( $F \in \mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}$  - rodzina dystrybuant) pewną liczbę. Miary opisowe indukują nieparametryczny estymator  $T(F_n)$ , gdzie  $F_n$  jest empiryczną dystrybuantą (wykorzystywaną do estymacji  $F$ ). Estymator  $T(\cdot)$  nazywamy estymatorem odpornym, jeśli słabo reaguje na odchylenia od założonego modelu [Ostasiewicz 1998].

Badając odporność metod statystycznych, należy badać zachowanie się miar opisowych nie tylko na wyszczególnionej rodzinie dystrybuant np. rodzinie parametrycznej, ale również w jej najbliższym otoczeniu. Zatem dla danej dystrybuanty  $F \in \mathcal{R}^d$ ,  $d \geq 1$  oraz  $\varepsilon \in [0,1]$  rozważamy, zdefiniowany przez Hubera, model  $\varepsilon$ -zaburzony (ang.  *$\varepsilon$ -contaminated model*)

$$\{ F_{\varepsilon,G} | F_{\varepsilon,G} = (1-\varepsilon)F + \varepsilon G \} \quad (1.1)$$

gdzie  $G$  jest dystrybuantą z udziałem  $100\varepsilon$  zaburzeń.

Do badania odporności estymatorów na pewne odstępstwa od złożonego modelu wykorzystuje się różne narzędzia. Do najważniejszych należą funkcja wpływu, punkt załamania oraz maksimum odchylenia, które zostaną omówione w dalszej części tego rozdziału.

## FUNKCJA WPŁYWU

Funkcja wpływu (ang. *influence function*) opisuje lokalną odporność estymatora na zaburzenia w próbie. Przy założeniu, że jest to zaburzenie punktowe, indukowane przez impuls skupiony w punkcie  $x$  (1.1) przybiera postać

$$F_{\varepsilon, \delta_x} = (1 - \varepsilon)F + \varepsilon\delta_x \quad (1.2)$$

gdzie  $\delta_x$  jest dystrybuantą Diraca w punkcie  $x$ , tj.  $\delta_x(\{x\}) = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) oraz  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

Funkcja wpływu estymatora  $T$  dla dystrybuanty  $F$  w punkcie  $x$  jest zdefiniowana następująco

$$IF(x; T, F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T((1 - \varepsilon)F + \varepsilon\delta_x) - T(F)}{\varepsilon}. \quad (1.3)$$

Funkcjonał  $T(\cdot)$  wraz z ograniczoną funkcją wpływu jest estymatorem odpornym [Zuo 2005].

## MAKSIMUM ODCHYLENIA ORAZ PUNKT ZAŁAMANIA

Maksymalne odchylenie (ang. *maximum bias*) jest miarą globalnej odporności funkcjonału  $T(\cdot)$  dla dystrybuanty  $F$ . Dla dowolnej dystrybuanty  $G$  z udziałem  $\varepsilon$  zaburzeń i modelu (1.1) maksimum odchylenia  $T(\cdot)$  dla dystrybuanty  $F$  zostało zdefiniowane jako [Hampel i in. 1986]

$$B(\varepsilon; T, F) = \sup_G \|T((1 - \varepsilon)F + \varepsilon G) - T(F)\| \quad (1.4)$$

Najmniejszy udział zaburzeń punktowych rozkładu  $F$  jest nazywany punktem załamania funkcjonału  $T$  dla dystrybuanty  $F$ , tj.  $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon : B(\varepsilon; T, F) = \infty\}$ . Punkt załamania (ang. *breakdown point*) dzięki intuicyjnemu rozumieniu i prostym obliczeniom jest bardzo popularną miarą globalnej odporności estymatora  $T$  [Zuo 2005].

Posługując się powyższymi narzędziami modelowania odpornego można wykazać, że najbardziej popularna miara zmienności - odchylenie standardowe nie jest dobrym estymatorem odpornym. Załóżmy, że rozkład teoretyczny  $F$  jest standaryzowanym rozkładem normalnym  $N(0, 1)$ , wtedy dla wariancji otrzymujemy

$$\text{Var}(F_{\varepsilon, \delta_x}) = (1 - \varepsilon)\text{Var}(F) + \varepsilon x \text{ oraz } \text{Var}(F_{\varepsilon, \delta_x}) - \text{Var}(F) = \varepsilon(x - \text{Var}(F)).$$

Z tych równań wynika postać funkcji wpływu:

$$IF(x; \text{Var}, F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left( \frac{\varepsilon(x - \text{Var}(F))}{\varepsilon} \right) = x - \text{Var}(F)$$

oraz wartość punktu załamania  $\varepsilon^* = 0$ , ponieważ dla każdego  $\varepsilon > 0$  wartość funkcji  $\text{Var}(F_{\varepsilon, \delta_x})$  jest nieograniczona ze względu na wartości  $x$ , które mogą przyjmować dowolnie duże wartości.

Ponadto, o braku odporności odchylenia standardowego logarytmicznych stóp zwrotu danego wzorem  $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}$  świadczy również wykorzystywana średnia arytmetyczna  $\bar{r}$  z zaobserwowanych stóp zwrotu. Średnia nie jest dobrym estymatorem odpornym, bowiem wystarczy jedna wyraźnie odstająca obserwacja, aby istotnie zmienić wartość średniej.

W procedurach modelowania odpornego podstawową i niezwykle ważną kwestią jest identyfikacja obserwacji odstających (nietypowych i wpływowych), których wpływ na wyniki jest bardzo istotny. Przyczyny występowania obserwacji odstających mogą być różne. Wartości danych wyraźnie odstających od pozostałych mogą być wynikiem pomiaru jak też pochodzenia z innej populacji. Jednak nie powinniśmy ich lekceważyć i od razu eliminować. Bardzo krótko przedstawimy narzędzia służące wykrywaniu obserwacji odstających i nietypowych w zbiorze danych.

Podstawowym narzędziem służącym wykrywaniu obserwacji wpływowych jest macierz rzutowania:

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T,$$

gdzie  $X$  jest macierzą obserwacji zmiennych objaśniających.

Macierz  $H$  ma wymiary  $n \times n$ , a jej elementy diagonalne oznaczane są w skrócie  $h_i$  i nazywają się wielkościami wpływowymi. Wpływ  $i$ -tej obserwacji na zmianę teoretycznej wartości zmiennej objaśnianej zależy wyłącznie od wielkości reszty  $e_i$  (różnicy pomiędzy wartością rzeczywistą  $y_i$ , a teoretyczną  $\hat{y}_i$  wynikającą z równania hiperpłaszczyzny regresji) oraz  $i$ -tej wielkości wpływowej. Huber przyjął, że wartości wpływowe do 0,2 za bezpieczne, wartości pomiędzy 0,2 a 0,5 jako ryzykowne, a wartości większe od 0,5 za niedopuszczalne.

Przy wykrywaniu obserwacji nietypowych stosuje się reszty studentyzowane:



$$e_{(i)}^* = \frac{e_i}{s_{(i)} \sqrt{1-h_i}} \quad (1.5)$$

gdzie  $s_{(i)}$  jest oceną odchylenia standardowego po usunięciu  $i$ -tej obserwacji. Wskaźnikiem mierzącym w sposób łączny nietypowość i wpływowość obserwacji jest

$$DFITS_i = e_{(i)}^* \sqrt{\frac{h_i}{1-h_i}}. \quad (1.6)$$

Przyjmując, że graniczna wartość reszt standaryzowanych wynosi 2, a średnia wartość wpływowa jest równa  $\frac{k+1}{n}$ , proponuje się następującą regułę odrzucania

obserwacji odstających  $|DFTIS_i| > 2\sqrt{\frac{k+1}{n-k+1}}$  [Ostasiewicz 1998].

## ODPORNE ESTYMATORY ZMIENNOŚCI

Zastosowanie estymatorów słabo reagujących na zmiany może przyczynić się do prawidłowego oszacowania parametru zmienności, co jest niezwykle ważne dla inwestorów. Lax (1985) zaprezentował szereg odpornych estymatorów zmienności, jednak wśród nich najbardziej na uwagę zasługują A-estymatory, które wykazują się największą odpornością dla symetrycznych rozkładów z grubymi ogonami.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach, wtedy A-estymator jest następującej postaci

$$s_A^2 = \frac{k_A^2}{n-1} \sum_{i=1}^n (1-u_i^2)^4 e_i^2$$

gdzie

$$k_A^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-u_i^2)(1-5u_i^2); \quad u_i = \frac{e_i}{cs_0} \quad (2.1)$$

oraz

$$e_i = \begin{cases} X_i - M; (|X_i - M|) \leq cs_0 \\ 0; (|X_i - M|) > cs_0 \end{cases}$$

gdzie

$M$  jest odpornym estymatorem położenia (np. medianą) i

$s_0$  jest odchyleniem medianowym

$$\text{MAD} = \text{mediana}\{|x_i - \text{mediana}\{x_i\}|\}, \quad (2.2)$$

natomiast  $c$  jest stałą. Lax podaje wartość  $c$  równą 9, zaś John Randal, Martin Lally oraz Peter Thompson zaproponowali  $c = 10$  lub  $c = 11$ .

W przypadku występowania obserwacji odstających zmiany cen na rynku finansowym mogą być doskonale opisane przy użyciu rozkładu t-studenta z  $\nu$  stopniami swobody. Niech  $Z$  i  $Y$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi,

$X \sim N(0,1)$ ,  $Y$  ma rozkład  $\chi_n^2$ , wtedy  $t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{\nu}Y}}$  ma rozkład t-studenta z  $\nu$

stopniami swobody. Ponadto, funkcja gęstości rozkładu t-studenta ma postać

$$p(x) = t_\nu(\mu, \sigma^2) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (2.3)$$

gdzie  $\mu$  jest wartością oczekiwaną,  $\sigma$  - odchyleniem standardowym.

Dla  $\nu$  pomiędzy 3 a 9 rozkład  $t_\nu$  uwzględnia „grube ogony”, natomiast gdy  $\nu \rightarrow \infty$  rozkład t-studenta jest zbieżny do rozkładu normalnego  $N(0,1)$ . Należy zaznaczyć, że rozkład  $t_\nu$  ma nieskończone momenty rzędu  $k$ , gdy  $k \geq \nu$ . Stąd,  $\nu \geq 3$  zapewnia skończoną wartość wariancji, zaś  $\nu \geq 5$  - skończoną kurtozę.

T-estymatory zmienności oparte są na t-rozkładach i wymagają iteracyjnych procedur ich wyznaczania. Pierwszym ze sposobów wyznaczenia rodziny t-estymatorów jest zastosowanie metody największej wiarygodności (ang. *maximum likelihood function*). Metoda ta polega na wyznaczeniu funkcji wiarygodności

$L = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$ , następnie wyznaczeniu jej logarytmu  $l = \ln(L) = \sum_{i=1}^n \ln p(x_i, \theta)$  oraz maksymalizacji tej funkcji.

Zatem, funkcja wiarygodności jest postaci

$$L = \prod_{i=1}^n p(x_i, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{g_\nu}{\sigma\sqrt{\nu-2}} \left(1 + \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2(\nu-2)}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad \text{gdzie } g_\nu = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi}}.$$

Maksimum przewidujemy w zerze pochodnej, tzn.  $\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0$ .

Stąd otrzymujemy

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \hat{\mu}_0)^2 \quad (2.4)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i X_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (2.5)$$

$$w_i = \frac{\nu + 1}{\nu + 2} \left( 1 + \frac{(X_i - \hat{\mu}_0)^2}{(\nu - 2)\hat{\sigma}_0^2} \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Wzór (2.6) wskazuje, że iteracje powinny się rozpocząć od oszacowania wartości  $\hat{\mu}_0$  oraz  $\hat{\sigma}_0^2$ . Do oszacowania tych parametrów wskazane jest użycie odpornych estymatorów MAD (2.2) lub interkwartyła IQD (ang. *interquartile distance*) [Tchernitser, Rubisov 2005]. Drugą metodą wyznaczania rodziny t-estymatorów jest metoda maksymalizacji wartości oczekiwanej EM (ang. *Expectation and Maximization*). Niech  $X = (X_1, \dots, X_n)$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach,  $Z_i$  - zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym  $N(0,1)$ , natomiast  $Y_i = \frac{Y'_i}{\nu}$  - zmiennymi losowymi niezależnymi od  $Z_i$ , gdzie  $Y'_i$  ma rozkład  $\chi_{\nu}^2$  ( $p(y) = \nu \chi_{\nu}^2(\nu y)$ ). Wtedy

$$X_i = \mu + \frac{\sigma Z_i}{\sqrt{Y_i}} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.7)$$

ma rozkład t-studenta  $t_{\nu}(\mu, \sigma)$  z  $E(X_i^2) = \sigma^2$ . Funkcja wiarygodności, po opuszczeniu wszystkich składników, które nie są zależne od  $\mu$  i  $\sigma^2$ , jest następującej postaci

$$\log L = -\log \sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n Y_i (X_i - \mu)^2.$$

Maksymalizacja wartości oczekiwanej  $E(\log L|X)$  prowadzi do następującej postaci

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Y_i|X)(X_i - \mu)^2$$

W przypadku, gdy  $Y_i$  ma rozkład  $\chi^2/\nu - 2$  otrzymujemy

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \left( \frac{\nu+1}{\nu-2} \right) \sum_{i=1}^n \left( 1 + \frac{(X_i - \mu)^2}{(\nu-2)\sigma_0^2} \right)^{-1} (X_i - \mu)^2.$$

W przypadku analizy dziennych logarymicznych zwrotów, można bezpiecznie przyjąć, że  $\mu = 0$ . Wtedy, t-estymator zmienności ma następującą postać

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \left( \frac{\nu+1}{\nu-2} \right) \sum_{i=1}^n X_i^2 \left( 1 + \frac{X_i^2}{(\nu-2)\hat{\sigma}_0^2} \right)^{-1}. \quad (2.8)$$

Opierając się na wnioskach Tchernitsera i Rubisova w celu uzyskania najbardziej zadowalających wyników analiz dobiera się  $\nu = 5$  dla t-estymatorów, ponieważ rozkład  $t_5$  posiada największe „grube ogony” spośród t-rozkładów ze skończoną wariancją i kurtozą.

## MODEL WYCENY BLACKA-SCHOLES

Model Blacka-Scholesa stał się podstawowym podejściem wykorzystywanym przez praktyków rynków finansowych. Umożliwia on w prosty sposób wyznaczenie wartości opcji. Rozwiązanie zaproponowane przez Blacka i Scholesa, jakkolwiek przełomowe i bardzo popularne, nie jest pozbawione pewnych wad. Twórcy modelu założyli, że ceny instrumentu bazowego zmieniają się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna, którego parametry są stałe. Niestety, jak pokazują liczne badania empiryczne, zmienność cen akcji nie jest stała w czasie. Efektem tego jest systematyczny błąd w wycenie opcji, gdy korzysta się ze zmienności historycznej [Jakubowski in. 2003].

Zgodnie z modelem Blacka-Scholesa wartość europejskiej opcji kupna na instrument nie wypłacający dywidendy dana jest wzorem:

$$c = SN(d_1) - Ee^{-rT} N(d_2), \quad (3.1)$$

$$\text{gdzie: } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$c$  - wartość europejskiej opcji kupna,

$S$  - cena instrumentu bazowego,

$E$  - cena wykonania opcji,

$r$  - stopa wolna od ryzyka,

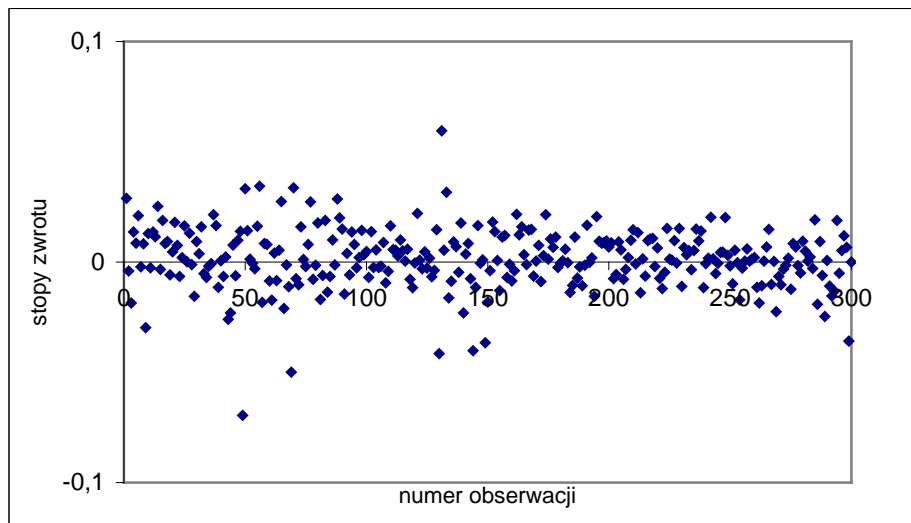
$T$  - długość okresu do terminu wygaśnięcia opcji, wyrażana w latach,

$\sigma$  - zmienność stopy zwrotu instrumentu bazowego,

$N(d)$  - wartość dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego dla argumentu równego  $d$ . Zauważmy, że wyznaczenie wartości opcji sprowadza się do oszacowania parametru zmienności (volatility), gdyż pozostałe parametry są znane.

### PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

Poniższy przykład o charakterze ilustracyjnym pozwoli dokonać analizy pomiędzy wartościami parametrów zmienności dla modelu podstawowego (zawierającego wszystkie obserwacje) oraz modelu tzw. odpornego (z którego zostały usunięte obserwacje odstające). Parametry modelu stóp zwrotu zostały wyestymowane na podstawie 300 obserwacji poprzedzających dzień analizy tj. 12.05.2006 (dziennie logarytmiczne stopy zwrotu, rysunek 1).



Rysunek 1. Dynamika zmian wartości logarytmicznych stóp zwrotu WIG20

Źródło: obliczenia własne

Aby wytypować w rozpatrywanym 300 elementowym zbiorze danych finansowych obserwacje odstające wyznaczyliśmy wartości teoretyczne stóp zwrotu  $\hat{y}_i$ , wartości wpływowe  $h_i$ , wielkości reszt studentyzowanych  $e_{(i)}^*$  oraz wskaźnik  $DFTIS_i$ . Równanie trendu dla wszystkich 300 obserwacji wynosi  $\hat{y}_i = -1,4e - 0,05t + 0,00363$ , współczynnik korelacji 0,01, a błąd standardowy 0,013. Dla trzech obserwacji: 49, 69 i 130 bezwzględna wartość reszty studentyzowanej równej odpowiednio dla tych obserwacji 4,754; 4,135; 4,4 jest większa od progowej wartości reszty studentyzowanej wynikającej z rozkładu t-studenta wynoszącej 3,2905. Już na tym etapie obserwacje powinny być uznane za obserwacje nietypowe. Na podstawie miernika  $DFTIS_i$  te trzy obserwacje można uznać za odstające i należy odrzucić z rozpatrywanego zbioru danych. Po odrzuceniu tych danych współczynnik korelacji poprawia się. Pozostałe obserwacje różniące się od obserwacji występujących w zbiorze można uznać jedynie za ryzykowne.

Dla modelu podstawowego i modelu bez obserwacji odstających wyznaczyliśmy zmienność stóp zwrotu wykorzystując klasyczne odchylenie standardowe, odchylenie medianowe (2.2), odporny A-estymator (2.1) oraz t-estymator (2.4 i 2.6). Tabela prezentuje uzyskane wartości:

Tabela 1 Zmienność stóp zwrotu w skali roku dla indeksu WIG20

Parametr zmienności	Model podstawowy	Model odporny (bez 3 obserwacji)
odchylenie standardowe	21,60%	19,10%
MAD	18,97%	18,13%
A-estymator ( $c = 10$ )	19,32%	18,75%
t-estymator ( $\nu = 5$ )	16,75%	16,67%

Źródło: Obliczenia własne

Na podstawie powyższych wyników można stwierdzić, że najbardziej stabilnym estymatorem zmienności jest t-estymator. Natomiast występujące obserwacje odstające mają silny wpływ na oszacowanie zmienności obliczanej jako odchylenie standardowe.

Oszacowania parametrów zostały wykorzystane do wyceny opcji. Rozważmy przykładową europejską opcję kupna na indeks WIG20, której okres do wygaśnięcia wynosi 3 miesiące. Wartość indeksu w dniu 12.05.2006 wynosiła 3298 zł, zaś cena wykonania wynosi 1100. Wolna od ryzyka stopa procentowa kształtuje się na poziomie 5 % w skali roku. Wyniki wyceny opcji kupna przedstawione zostały w Tabeli 2.

Tabela 2 Wartości wyceny opcji na indeks WIG20 dla różnych estymatorów zmienności

Parametr zmienności	Wartość opcji	
	Model podstawowy	Model odporny (bez 3 obserwacji)
odchylenie standardowe	198,81 zł	212,39 zł
A-estymator ( $c = 10$ )	211,20 zł	214,30 zł
t-estymator ( $V = 5$ )	226,26 zł	226,14 zł

Źródło: obliczenia własne

Powyższe wyniki jedynie potwierdzają, że najdokładniejsze wartości ceny opcji otrzymamy stosując odporne estymatory zmienności.

## ZAKOŃCZENIE

Znaczenie zmienności w zarządzaniu ryzykiem jest fundamentalne. W związku z szybkim rozwojem instrumentów pochodnych i stałym wzrostem ryzyka, inwestorzy zmuszeni są do poszukiwania lepszych metod estymacji zmienności, gdyż prawidłowe oszacowanie parametru zmienności umożliwia zmniejszenie ryzyka inwestycji lub osiągnięcie większych dochodów. Zastosowanie estymatorów odpornych w wycenie opcji przyczyni się do dokładniejszego wyznaczenia wartości opcji.

## LITERATURA

- Geske R., Torous W. 1987. Volatility and Mispricing: Robust Variance Estimation and Black-Scholes Call Option Pricing, University of California
- Huber P.J. 1981. Robust statistic, Wiley, New York
- Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J., Stahel W.A. 1986. Robust Statistic: The approach based on influence functions, Wiley, New York
- Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. 2003. Matematyka finansowa, WNT, Warszawa, str.199, 182-191
- Lax D.A. 1985. Robust estimators of scale: infinite-sample performance in long-tailed symmetric distributions, J. Am. Sta. Assoc., 80, str. 736-741
- Ostasiewicz W. 1998. Statystyczne metody analizy danych, Wydawnictwo AE im. Oscara Langego we Wrocławiu, str. 235-274
- Tchernitser A., Rubisov D.H. 2005. Robust estimation of historical volatility and correlation in risk management, University of Toronto, str. 1-10
- Zuo Y. 2005. Robust location and scatter estimators in multivariate analysis, Michigan State Univ.

**Robust estimators of volatility in the Black-Scholes option pricing model**

**Summary:** Correct estimation of volatility of financial asset is the most important stage in option pricing. Financial time series have two features which prevent use of conventional estimators of volatilities such as outliers and leptokurtotic tails of data distributions. In this paper, we presented robust estimators of volatility t-estimators and A-estimators, which are required to achieve stable and accurate results. We made comparative analysis of option's values on index WIG20 in Warsaw Stock Exchange taking into consideration following volatility parameters: standard deviation, median absolute deviation, t-estimator and A-estimator. The values of options were estimated by generally known the Black-Scholes option pricing model. Besides, we presented three most popular robustness measures and powerful tools of robust statistic for outlying observations identification.

**Key words:** robust estimators of volatility, t-estimator, A-estimator, Black-Scholes option pricing model, standard deviation, median absolute deviation, outliers, influence function, breakdown point, maximum bias.



Edyta Marcinkiewicz  
Katedra Zarządzania, Wydział Organizacji i Zarządzania Politechniki Łódzkiej  
e-mail: emarc@p.lodz.pl

## **BADANIE ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY WARTOŚCIĄ WYKŁADNIKA HURSTA A SKUTECZNOŚCIĄ STRATEGII INWESTYCYJNYCH OPARTYCH NA ANALIZIE TECHNICZNEJ**

**Streszczenie:** W artykule podjęta została próba wykorzystania wykładnika Hursta (H) do zbadania czy na rynku kapitałowym występują trendy oraz czy może on mieć wpływ na skuteczność narzędzi analizy technicznej. Dla ośmiu szeregów stóp zwrotu: WIG20, CAC40; DAX, DJIA, S&P500, NIKK225, NASDAQ oraz EUR/USD obliczono wartość H. Następnie przeprowadzono symulacje strategii inwestycyjnych budowanych w oparciu o wskaźniki analizy technicznej, które w założeniu mają wykorzystywać istnienie trendów na rynku giełdowym. Wyniki badanych strategii dla każdego szeregu porównano z wartością wykładnika Hursta.

**Słowa kluczowe:** wykładnik Hursta, analiza R/S, analiza techniczna, rynki kapitałowe

### **WPROWADZENIE**

Analiza techniczna (AT) należąca do grupy nieformalnych modeli prognostycznych [Neftici 1991] jest jednocześnie bardzo popularną wśród inwestorów giełdowych metodą badania rynku kapitałowego. Główne zasady, na których opiera się ta metoda badania zachowania kursów giełdowych to:

- rynek dyskontuje wszystko
- ceny podlegają trendom
- historia się powtarza

Pierwsze ze stwierdzeń wyraża przekonanie zwolenników AT, iż w notowaniach giełdowych zawarte są wszystkie informacje, co sprawia, że nie są istotne przyczyny zmian cen, ale należy skupić się na szybkim reagowaniu na zmiany lub przesłanki zapowiadające zmiany. Stwierdzenie drugie i trzecie oznaczają, że zmiany cen na giełdzie nie są losowe tzn. przebiegają zgodnie z trendami, oraz, że rynki kapitałowe cechuje powtarzalność w horyzoncie czasowym. W obrębie analizy technicznej istnieje szereg narzędzi (wskaźników), które w założeniu mają wykorzystać występowanie na rynku trendu wzrostowego lub spadkowego w celu osiągnięcia przez inwestora ponadprzeciętnego zysku [Murphy 1996].

W opozycji do inwestorów stosujących analizę techniczną stoją zwolennicy teorii informacyjnej efektywności rynków giełdowych (Hipoteza Rynku Efektywnego). W ich opinii gros rynków kapitałowych jest efektywna co najmniej

w formie słabej tzn. notowania z przeszłości nie mają wpływu na kursy w przyszłości. Oznacza to, że na rynkach kapitałowych nie występują trendy, a zmiany są przypadkowe.

Celem niniejszego artykułu jest określenie za pomocą wykładnika Hursta, na przykładzie wybranych światowych rynków kapitałowych, na ile dany rynek podlega trendom oraz sprawdzenie, czy wynik tej analizy znajduje odzwierciedlenie w skuteczności wybranych wskaźników AT w procesie inwestowania.

## WYKŁADNIK HURSTA

Wykładnik Hursta (H) jest narzędziem statystycznym służącym klasyfikacji szeregów czasowych – na szeregi losowe i nielosowe, przy czym nie ma znaczenia czy te pierwsze mają rozkład gaussowski [Peters 1997]. Jest to wskaźnik bezwymiarowy, można stosować go do różnych rodzajów szeregów czasowych, m.in. do analizy szeregów stóp zwrotu na rynkach kapitałowych. Szacowanie wykładnika Hursta związane jest z tzw. analizą przeskalowanego zakresu, w skrócie analizą R/S, która polega na dzieleniu zakresu wahań przez odchylenie standardowe obserwacji. Szczegółowo metoda przeprowadzania analizy R/S oraz wyznaczania na jej podstawie wykładnika Hursta opisana jest w pracy [Weron, Weron 1998].

Wykładnik Hursta dzieli szeregi na trzy grupy:

- antypersystentne, gdy  $0 < H < 0,5$ ;
- persystentne, gdy  $0,5 < H < 1$ ;
- losowe, gdy  $H = 0,5$ .

Szeregi antypersystentne charakteryzują się tendencją do powracania do średniej, dokonują częstych zwrotów kierunku przemieszczania. W przypadku rynków kapitałowych mówimy wtedy o zjawisku osłabiania trendu. Przykładowo, jeżeli  $H = 0,3$ , wtedy istnieje 70% szansy, że rynek zmieni kierunek w przyszłości wobec kierunku aktualnie obserwowalnego [Stawicki i in. 1997]. Przeciwnymi właściwościami charakteryzują się szeregi persystentne. W ich przypadku występuje zjawisko wzmacniania trendu, tzn. jeżeli  $H = 0,7$ , wówczas istnieje 70% prawdopodobieństwo, że istniejący trend zostanie utrzymany. Szeregi persystentne posiadają efekt długiej pamięci, czyli długoterminowej zależności danych, nie będącej jednakże wynikiem procesu typu AR. Trzecią grupą szeregów są szeregi losowe, dla których  $H = 0,5$ . W takim przypadku mamy do czynienia z niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie (IID).

## DANE ORAZ METODOLOGIA BADAŃ

Do badań wybranych zostało 7 światowych indeksów giełdowych: WIG20, CAC40; DAX, DJIA, S&P500, NIKK225, NASDAQ oraz kurs EUR/USD. Okres

objęty testami w przypadku każdego z badanych instrumentów jest porównywalny i obejmuje 11 lat (tj. od roku 1995 do 2006). Szeregi czasowe kursów zmieniono w szeregi dziennych logarytmicznych stóp zwrotu o długości  $n=2800$  każdy (wartości  $n$  należało tak dobrać, aby miały jak najwięcej dzielników, związane jest to z algorytmem wyznaczania wykładnika Hursta). Dla każdego z szeregów obliczono wartość  $H$  wg formuły zaproponowanej w pracy [Weron, Weron 1998].

Następnie na badanych pierwotnych szeregach czasowych kursów zostały przetestowane najbardziej popularne metody generowania sygnałów kupna i sprzedaży oparte na wskaźnikach analizy technicznej, które są identyfikowane jako podążające za trendem. Wskaźniki te w założeniu mają dawać dobre rezultaty inwestycyjne, gdy na rynku występują wyraźne trendy. Narzędzia AT wykorzystane w badanych strategiach inwestycyjnych to<sup>1</sup>:

a) średnia krocząca MA

Otwarcie pozycji długiej: gdy kurs jest wyższy od średniej kroczącej. Zamknięcie pozycji długiej: gdy kurs kształtuje się poniżej linii wyznaczonej przez średnią krocząca. Średnia krocząca została przetestowana w trzech wariantach długości: 9-, 21- i 35-sesyjna.

b) Oscylator Momentum

Otwarcie pozycji długiej: gdy kurs z ostatniej sesji jest wyższy od kursu zamknięcia sprzed  $n$  dni (oscylator momentum jest powyżej 0). Zamknięcie pozycji długiej : w odwrotnym przypadku. Wskaźnik Momentum został przetestowany dla długości 7, 10 i 12 sesji.

c) Wstęga Bollingera

Otwarcie pozycji długiej: jeśli kurs zamknięcia z ostatniej sesji przecina od dołu górną linię wstęgi Bollingera. Zamknięcie pozycji długiej: gdy kurs zamknięcia z ostatniej sesji przecina od góry dolną linię wstęgi Bollingera. Strategie te przetestowano każdorazowo dla 3 różnych wartości współczynnika  $k$ : 0,5, 0,8 i 1,2 oraz dla tej samej średniej kroczącej MA15.

d) Indeks przeciętnego ruchu kierunkowego ADX

Otwarcie pozycji długiej: jeśli  $ADX > 15$  oraz wskaźnik kierunkowy  $+DI_n$  leży powyżej  $-DI_n$ . Zamknięcie pozycji długiej: gdy którykolwiek z powyższych warunków nie jest spełniony. Przetestowano strategie dla długości średniej kroczącej wygładzającej  $+DI$ ,  $-DI$  i  $ADX$ : 9, 14 i 21 sesji.

e) Wybicie z kanału

Otwarcie pozycji długiej: gdy kurs osiąga maksimum z ostatnich  $n$  dni. Zamknięcie pozycji długiej: gdy kurs osiąga minimum z ostatnich  $n$  dni Długość kanału

---

<sup>1</sup> Algorytmy obliczania wskaźników można znaleźć w licznych pozycjach literaturowych poświęconych analizie technicznej np. [Murphy 1996] lub [LeBeau, Lucas 1999].

cenowego, z którego następowało wybicie przetestowano w trzech wariantach: 5, 9 i 15 sesji.

f) Wskaźnik CCI

Otwarcie pozycji długiej: gdy wskaźnik osiąga wartości równe lub większe niż 0. Zamknięcie pozycji długiej: kiedy wskaźnik jest poniżej linii 0. Strategie z użyciem CCI zostały przetestowane w trzech wariantach długości średniej kroczącej: 5-, 10- i 20-sesyjnej.

Wyniki uzyskane przez wyżej wymienione reguły inwestowania zostały następnie zestawione z wynikami strategii rynkowej, czyli „kup i trzymaj”, która nie jest zależna od badanych wskaźników. Strategia ta odzwierciedla sytuację, gdy hipotetyczny inwestor zajmuje pozycję w pierwszym dniu testowanego okresu, a zamyka ją w ostatnim dniu. Metodologia weryfikacji wyników uzyskanych przy użyciu strategii inwestycyjnych opartych na wskaźnikach analizy technicznej została po raz pierwszy wprowadzona w pracy [Brock i in. 1992]. Stopy zwrotu – rynkową i uzyskaną w wyniku inwestowania według wskazań AT – porównuje się testem istotności dla dwóch średnich:

$$u = \frac{\bar{x}_r - \bar{x}}{\sqrt{\frac{S_r^2}{N_r} + \frac{S^2}{N}}} \quad (1)$$

gdzie  $\bar{x}_r$  oznacza średnią dzienną rynkową stopę zwrotu,  $\bar{x}$  średnią dzienną stopę zwrotu w strategii opartej na wskaźniku AT,  $S_r^2$  i  $S^2$  oznaczają wariancje dziennych stóp zwrotu odpowiednio rynkowej oraz w strategiach ze wskaźnikami,  $N_r$  jest liczbą sesji w strategii „kup i trzymaj”, natomiast  $N$  określa liczbę sesji, gdy inwestor jest na rynku wg wskazań.

Test istotności średnich został przeprowadzony dla  $H_0 : \mu_r = \mu$  oraz  $H_1 : \mu_r < \mu$  lub  $H_1 : \mu_r > \mu$ , w zależności od relacji zachodzących pomiędzy średnią rynkową stopą zwrotu a średnią stopą zwrotu z badanej strategii inwestycyjnej.

## WYNIKI BADAŃ

W wyniku przeprowadzonej analizy R/S dla każdego z badanych szeregów stóp zwrotu otrzymano wartość wykładnika Hursta. Wyniki zostały przedstawione w Tabeli 1.

Tabela1. Empiryczne wartości wykładnika Hursta

Indeks	S&P500	WIG20	CAC40	DAX
H	0,499	0,561	0,537	0,565
Indeks	DJIA	NIKK225	EUR/USD	NSDQ100
H	0,506	0,551	0,555	0,540

Źródło: obliczenia własne.

Otrzymane rezultaty wskazują na losowość stóp zwrotu indeksu S&P500 oraz DJIA. Wartości wykładnika Hursta w przypadku pozostałych szeregów sugerują ich persystentność w niewielkim stopniu.

Wyniki strategii inwestycyjnych opartych na wskaźnikach analizy technicznej zostały pokazane w tabelach 2A i 2B. Przedstawiają one dzienne przeciętne stopy zwrotu uzyskane z testowanych strategii inwestycyjnych opartych na AT. Pod stopami zwrotu umieszczone są wartości statystyk  $u$ . Te przeciętne dzienne stopy zwrotu, które są istotnie mniejsze lub istotnie większe od stóp rynkowych zaznaczone zostały pogrubioną czcionką. Wartości krytyczne dla poziomu istotności 0,05 wynoszą 1,64 oraz -1,64.

Spośród testowanych sześciu wskaźników jeden pozwalał uzyskiwać stopy zwrotu znacznie wyższe od pozostałych. Symulacja inwestycji z użyciem wybicia z kanału (dla parametru  $n=5$  sesji) dla wszystkich badanych rynków pokazała istotnie statystycznie większe od rynkowych stopy zwrotu. Wybicia 9- i 15-sesyjne także w wielu przypadkach dawały ponadprzeciętne zyski. Poza tym wskaźnikiem w jednym tylko przypadku – dla kursu EUR/USD przy strategii MA(35) – uzyskana stopa zwrotu jest istotnie większa od rynkowej. Można zauważyć, że na 18 testowanych strategii wartości statystyk  $u$  przekraczały wartość krytyczną 1,64 osiem razy w przypadku indeksu S&P500, siedem razy dla CAC40, cztery razy dla DJIA oraz dwa dla NSDQ100. Bardzo podobną kolejność szeregów można zaobserwować porównując wartości wykładnika Hursta tzn. najmniejszym H wyróżniał się szereg S&P500, następnie DJIA, CAC40 oraz NSDQ100. W szeregach tych występują także wszędzie z wyjątkiem strategii wybicie z kanału zależności  $\bar{x}_r > \bar{x}$ . Tak więc uzyskane stopy zwrotu dla tych czterech indeksów w 15 strategiach na 18 badanych są mniejsze od stóp rynkowych (dla części stóp nie udało się potwierdzić, że są mniejsze istotnie statystycznie).

Tabela 2A. Stopy zwrotu ze strategii z użyciem wskaźników AT wraz z wartościami statystyki u dla indeksów S&amp;P500, WIG20, CAC40; DAX.

	S&P500	WIG20	CAC40	DAX
Stopa rynkowa	0,00035	0,00047	0,00038	0,00037
MA(9)	<b>0,00011</b>	0,00066	<b>0,00001</b>	0,00035
	1,80	-0,77	2,05	0,09
MA(21)	<b>0,00014</b>	0,00074	0,00014	0,00043
	1,64	-1,12	1,36	-0,31
MA(35)	<b>0,00012</b>	0,00059	<b>-0,00008</b>	0,00020
	2,91	-0,59	3,64	1,20
Momentum(7)	<b>0,00004</b>	0,00051	<b>-0,00004</b>	0,00020
	2,28	-0,16	2,39	0,91
Momentum(10)	<b>0,00010</b>	0,00061	<b>0,00005</b>	0,00017
	1,96	-0,58	1,94	1,07
Momentum(12)	0,00014	0,00067	0,00011	0,00026
	1,63	-0,82	1,56	0,60
Wst.Bollingera(0,5)	0,00017	0,00060	0,00011	0,00024
	1,06	-0,41	1,22	0,54
Wst.Bollingera(0,8)	0,00014	0,00056	0,00018	0,00038
	1,28	-0,28	0,88	-0,02
Wst.Bollingera(1,2)	0,00016	0,00051	0,00023	0,00042
	1,17	-0,13	0,66	-0,19
ADX(9)	<b>0,00007</b>	0,00058	<b>-0,00018</b>	0,00011
	2,17	-0,47	3,25	1,41
ADX(14)	0,00021	0,00041	0,00025	0,00040
	1,14	0,26	0,83	-0,19
ADX(21)	<b>0,00014</b>	0,00039	0,00029	0,00051
	1,70	0,38	0,59	-0,78
Wybicie(5)	<b>0,00103</b>	<b>0,00137</b>	<b>0,00069</b>	<b>0,00123</b>
	-5,17	-3,93	-1,79	-4,62
Wybicie(9)	0,00049	<b>0,00096</b>	0,00044	0,00063
	-1,01	-2,16	-0,37	-1,48
Wybicie(15)	0,00036	<b>0,00088</b>	0,00043	<b>0,00067</b>
	-0,02	-1,80	-0,33	-1,66
CCI(5)	0,00019	0,00082	<b>0,00002</b>	0,00032
	1,22	-1,46	1,97	0,26
CCI(10)	<b>0,00005</b>	0,00065	<b>-0,00002</b>	0,00032
	2,33	-0,74	2,25	0,28
CCI(20)	0,00016	0,00072	0,00016	0,00046

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2B. Stopy zwrotu ze strategii z użyciem wskaźników AT wraz z wartościami statystyki  $u$  dla indeksów DJIA, NIKK225, NASDAQ oraz notowań EUR/USD.

	DJIA	NIKK225	EUR/USD	NSDQ100
Stopa rynkowa	0,00038	-0,00006	-0,00003	0,00049
MA(9)	0,00027	-0,00002	-0,00007	<b>0,00000</b>
	0,79	-0,22	0,49	1,91
MA(21)	0,00029	-0,00005	-0,00005	0,00025
	0,65	-0,05	0,17	0,94
MA(35)	<b>0,00005</b>	0,0001	<b>0,00005</b>	0,00028
	3,82	-1,31	-2,24	0,96
Momentum(7)	<b>0,00007</b>	-0,0001	-0,00003	0,00014
	2,35	0,24	-0,02	1,36
Momentum(10)	0,00022	-0,00004	-0,00001	0,00014
	1,19	-0,1	-0,28	1,38
Momentum(12)	0,00022	0,00003	-0,00001	0,00033
	1,21	-0,49	-0,26	0,62
Wst.Bollingera(0,5)	0,00013	-0,00001	0,00004	0,00009
	1,41	-0,2	-0,62	1,17
Wst.Bollingera(0,8)	0,00021	0,00007	-0,00001	0,00022
	1,01	-0,51	-0,17	0,81
Wst.Bollingera(1,2)	0,00022	0	-0,00001	0,00033
	0,91	-0,24	-0,22	0,47
ADX(9)	<b>0,00016</b>	0,00004	0,00001	<b>0,00007</b>
	1,67	-0,59	-0,61	1,67
ADX(14)	0,00037	0,00013	0,00000	0,00045
	0,02	-1,19	-0,42	0,13
ADX(21)	0,00031	0,00011	0,00001	0,00038
	0,54	-1,15	-0,66	0,46
Wybicie(5)	<b>0,00099</b>	<b>0,00077</b>	<b>0,00054</b>	<b>0,00170</b>
	-4,77	-4,76	-7,76	-4,61
Wybicie(9)	0,00053	<b>0,00040</b>	<b>0,00032</b>	<b>0,00116</b>
	-1,26	-2,72	-4,83	-2,68
Wybicie(15)	0,00050	<b>0,00027</b>	<b>0,00014</b>	0,00070
	-0,99	-2,02	-2,54	-0,92
CCI(5)	0,00017	-0,00030	0,00002	0,00022
	1,50	1,38	-0,61	1,00
CCI(10)	<b>0,00016</b>	-0,00007	0,00000	0,00013
	1,65	0,06	-0,37	1,40
CCI(20)	0,00026	-0,00007	0,00000	0,00027
	0,91	0,11	-0,40	0,87

Źródło: obliczenia własne.

Pewne prawidłowości można zauważyć także w przypadku czterech pozostałych szeregów: WIG20, DAX, NIKK225 oraz EUR/USD. Charakteryzują się one podobnymi wartościami wykładnika Hursta, na poziomie 0,55-0,56. Dla szeregów WIG20, NIKK225 oraz EUR/USD większość badanych strategii inwestycyjna przynosiła stopy zwrotu wyższe niż rynkowa, chociaż tylko w jednym przypadku różnica była istotna statystycznie. Testy przeprowadzone na notowaniach indeksu DAX nie określają jednoznacznie przydatności narzędzi AT podążających za trendem na tym rynku. Pomimo relatywnie wysokiego wskaźnika Hursta, tylko w ośmiu strategiach na 18 stopy zwrotu były wyższe od rynkowej (w dwóch przypadkach udało się potwierdzić statystyczną istotność tych różnic).

Końcowy etap badań obejmował wyznaczenie siły związku pomiędzy „zyskownością” strategii inwestycyjnych a wartością wykładnika Hursta. Dla każdej strategii osobno został policzony współczynnik korelacji rang Spearmana, gdzie badanymi zmiennymi były: wartość H oraz liczba punktów procentowych o jaką stopa zwrotu z inwestycji z całego okresu przewyższała stopę rynkową dla każdego z ośmiu rynków. Wyniki tych obliczeń przedstawione zostały w Tabeli 3.

Tabela 3. Zależność pomiędzy wynikami generowanymi przez strategie inwestycyjne na badanych rynkach a wartością wykładnika Hursta.

Strategia inwestycyjna	MA(9)	MA(21)	MA(35)	Mom.(7)	Mom.(10)	Mom.(12)
Korelacja	0,62	0,74	0,62	0,62	0,50	0,64
Strategia inwestycyjna	W.Boll.(0,5)	W.Boll.(0,8)	W.Boll.(1,2)	ADX(9)	ADX(14)	ADX(21)
Korelacja	0,62	0,67	0,81	0,48	0,57	0,60
Strategia inwestycyjna	Wybicie(5)	Wybicie(9)	Wybicie(15)	CCI(5)	CCI(10)	CCI(20)
Korelacja	0,17	0,55	0,76	0,69	0,64	0,76

Zródło: obliczenia własne.

Najsłabszy związek pomiędzy osiąganymi zyskami a wartością H istnieje dla 5-sesyjnego wybicia z kanału (0,17). W przypadku pozostałych badanych strategii ten związek okazał się znaczący lub silny. Wszystkie współczynniki korelacji są dodatnie.

## PODSUMOWANIE

Przeprowadzone badania wskazują na istnienie zależności pomiędzy wartością wykładnika Hursta a wynikami uzyskanymi przy użyciu strategii inwestycyjnych opartych na wskaźnikach analizy technicznej. Szeregi charakteryzujące się H bardzo bliskim 0,5 – czyli losowe – dużo gorzej wypadały w testach efektywności wybranych wskaźników analizy technicznej tj. średniej kroczącej, oscylatora Momentum, wstęg Bollingera, ADX, wybicia z kanału oraz



CCI. Z kolei te z szeregów, które miały relatywnie wyższy wykładnik Hursta, poza jednym wyjątkiem (DAX) dawały lepsze rezultaty inwestycyjne. Należy jednak zaznaczyć, że wśród testowanych szeregów czasowych nie znalazł się taki, który miałby dużą persystentność, co w przypadku rynków giełdowych oznacza  $H$  na poziomie 0,7-0,8. Pomimo tego wykazano istnienie znaczącej dodatniej korelacji pomiędzy zyskami osiąganymi z użyciem wskaźników analizy technicznej a wartością wykładnika Hursta dla każdego z badanych rynków. Im wyższym wykładnikiem Hursta charakteryzował się rynek tym stopy zwrotu z badanych strategii (z uwzględnieniem stopy rynkowej) były wyższe.

## LITERATURA

- Brock W., Lakonishok J., LeBaron B. (1992) Simple Technical Trading Rules and The Stochastic Properties of Stock Returns, *Journal of Finance*, 47(5), str. 1731–1764.
- LeBeau Ch., Lucas D.W., (1999) Komputerowa analiza rynków terminowych, Wig-Press, Warszawa..
- Murphy J.M. (1996) Analiza techniczna rynków finansowych, Wig-Press, Warszawa.
- Neftci, S.N. (1991) Naive Trading Rules in Financial Markets and Wiener-Kolmogorov Prediction Theory: A Study of "Technical Analysis.", *The Journal of Business*.
- Peters E. (1997) Teoria chaosu a rynki kapitałowe. Wig-Press, Warszawa.
- Stawicki J., Janiak E. A., Müller-Frączek I. (1997) Różnicowanie fraktalne szeregów czasowych - wykładnik Hursta i wymiar fraktalny. Referat wygłoszony na V Ogólnopolskim Seminarium Naukowym „Dynamiczne Modele Ekonometryczne”, Toruń.
- Weron A., Weron R. (1998) Inżynieria finansowa. WNT, Warszawa.

### **Evaluation of impact of Hurst exponent value on effectiveness of investment strategies based on technical analysis**

**Summary:** In the paper an attempt to employ Hurst exponent ( $H$ ) was made in order to investigate whether there are trends on capital market and whether  $H$  can influence the effectiveness of technical analysis tools. Eight time series of rate of returns were examined - WIG20, CAC40; DAX, DJIA, S&P500, NIKK225, NASDAQ, EUR/USD - and for each  $H$  was calculated. The further step was to investigate technical analysis trading rules, which were supposed to bring good investment results in terms of trends on capital market. The mean returns gained using technical analysis indicators in case of each of eight time series were compared to Hurst exponent value.

**Key words:** Hurst exponent, R/S analysis, technical analysis, capital markets

Aleksandra Matuszewska<sup>1</sup>, Dorota Witkowska<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instytut Zarządzania PŁ, <sup>2</sup> Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW

e-mail: almat@mail.p.lodz.pl; dwitkowska@mors.sggw.waw.pl

## **ANALIZA ZMIAN KURSU EURO/DOLAR: MODEL VAR I PERCEPTRON WIELOWARSTWOWY**

**Streszczenie:** W analizach finansowych szeregów czasowych stosuje się często metody wielowymiarowego opisu zjawisk, takie jak na przykład modele wektorowej autoregresji (VAR). Alternatywnym do modeli VAR narzędziem badania mogą być jednokierunkowe sztuczne sieci neuronowe, do których należy perceptron wielowarstwowy (MLP). W pracy przedstawiono rezultaty wykorzystania modeli VAR i MLP do opisu zmian w szeregu kursu euro/dolar oraz tych zmiennych z rynku finansowego, które wpływają na badany kurs oraz ulegają zmianom pod wpływem kursu. Efektywność obu metod oceniono na podstawie dokładności wyznaczonych prognoz.

**Słowa kluczowe:** modele VAR, perceptron wielowarstwowy, kurs walutowy.

### **WPROWADZENIE**

Postępujące procesy globalizacyjne powodują, że coraz więcej podmiotów gospodarczych jest uzależnionych od relacji występujących na rynku walutowym. Dlatego wiele z nich stara się zabezpieczyć przed negatywnymi skutkami zmian kursów walutowych. W tym celu stosowane są różne narzędzia wspomagające zarządzanie ryzykiem kursowym. Ważnym elementem w analizie ryzyka walutowego jest identyfikacja czynników ryzyka, ich analiza, a następnie wykorzystanie zdobytej wiedzy do wyboru narzędzi zabezpieczających. W ostatnich latach obserwuje się tendencje do stosowania tak zwanej wielowymiarowej analizy ryzyka. Polega ona na tym, że oprócz analizy pojedynczych czynników ryzyka, bada się też relacje pomiędzy nimi. Wykrywanie zależności między różnymi czynnikami ryzyka pozwala podmiotom gospodarczym na stosowanie bardziej zaawansowanych i skuteczniejszych metod zabezpieczania się przed ryzykiem (walutowym).

Kursy walutowe ulegają wahaniom pod wpływem zmian zachodzących w jego otoczeniu. Jednym z elementów analizy ryzyka może być badanie zależności pomiędzy kursami walut a innymi czynnikami, które mogą mieć charakter jednokierunkowy lub dwukierunkowy. Jednokierunkowy charakter relacji polega na tym, że albo kurs walutowy wpływa na dany czynnik, albo dany czynnik powoduje zmiany kursu walutowego. Z dwukierunkowa relacja występuje

wtedy, gdy jednocześnie kurs walutowy i analizowany czynnik wpływają na siebie nawzajem.

Do opisu relacji dwukierunkowych można wykorzystać modele wektorowej autoregresji (VAR - *Vector AutoRegression*). Modele VAR są dość wygodnym, „ateoretycznym” narzędziem w badaniu zależności na rynkach finansowych, bowiem przy ich konstrukcji nie wymaga się zgodności modelu z teorią ekonomii.

W analizach danych finansowych, jako alternatywne narzędzie do modeli statystycznych, stosuje się również sztuczne sieci neuronowe. Sztuczne sieci neuronowe (SSN) są modelami adaptacyjnymi o złożonej budowie. Atrakcyjność aplikacyjna sieci neuronowych wynika z kilku powodów. Po pierwsze, nie są potrzebne żadne założenia dotyczące natury rozkładu danych, których weryfikacja w przypadku danych finansowych jest niezwykle trudna. Po drugie SSN są modelami nieliniowymi, są zatem adekwatne do analizy szeregów finansowych, które są z natury nieliniowe i dynamiczne. Po trzecie, sieci neuronowe pozwalają wyznaczyć rozwiązanie nawet w przypadku, kiedy dane są niekompletne (por. [Witkowska 2002] s. 97).

Celem badań jest zastosowanie modeli VAR i SSN do analizy zmian kursu euro/dolar i wybranych czynników, które charakteryzują się wzajemnym dwustronnym oddziaływaniem.

## MODEL VAR I PERCEPTRON WIELOWARSTWOWY

W badaniach dotyczących analizy danych ekonomicznych, prowadzonych w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych dowiedziono, że nie zawsze wielorównaniowe strukturalne modele ekonometryczne są w stanie dawać lepsze rezultaty niż modele naiwne [Charemza, Deadman 1997, s. 21]. Na bazie powstałej krytyki do analizy danych ekonomicznych zaproponowano model VAR [Sims 1980].

Jak sama nazwa wskazuje, model VAR jest wielorównaniowym liniowym modelem o strukturze autoregresyjnej. Jest on wykorzystywany do analizy zmiennych stacjonarnych. W przypadku gdy dane są niestacjonarne, do opisu zależności stosuje się przekształcony VAR do postaci wektorowego modelu korekty błędem (VEC). Do modelu VAR dołącza się również tzw. zmienne deterministyczne (por. np. [Kusideł 2000], s. 15). Postać modelu VAR zapisuje się następująco:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_0 \mathbf{D}_t + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{Y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (1)$$

gdzie:  $\mathbf{Y}_t$  – macierz obserwacji dla  $K$ -zmiennych objaśnianych ( $K$  – jest jednocześnie liczbą równań w modelu VAR);  $t$  – numer obserwacji  $t = 1, 2, \dots, T$ ;  $\mathbf{Y}_{t-p}$  – macierz obserwacji dla  $K$ -zmiennych objaśniających opóźnionych

w stosunku do zmiennej objaśnianej o  $p$  okresów;  $\mathbf{D}_t$  – macierz obserwacji dla deterministycznych składników równania, takich jak wyraz wolny, zmienna czasowa, zmienne zero-jedynkowe;  $\mathbf{A}_i$  – macierz parametrów, dla  $i = 0, 1, \dots, p$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  – wektor stacjonarnych zakłóceń losowych.

Sztuczne sieci neuronowe (SSN) są atrakcyjnym narzędziem w analizie danych finansowych [Azoff 1994], [Gately 1999], [Lula 1999], [Witkowska 2002], [Kaashoek, van Dijk 2000]. Cechami, które odróżniają sieci neuronowe od typowych statystycznych narzędzi są (por. [Witkowska 2002], s. 2, [Lula 1999], s. 13):

- zdolność do uczenia się przez co sieć potrafi nauczyć się prawidłowych reakcji na określony zespół bodźców (tj. może aproksymować dowolny typ zależności),
- umiejętność generalizacji, zdobytej w fazie uczenia, wiedzy,
- odporność na uszkodzenia (sieć działa poprawnie nawet wtedy gdy jest uszkodzona).

Rozwiązywanie zadań za pomocą sieci można podzielić na trzy etapy:

1. budowa sieci (tj. specyfikacja modelu),
2. uczenie sieci (czyli estymacja parametrów modelu) i
3. generalizacja wyników trenowania sieci (czyli ekstrapolacja modelu poza próbę estymacyjną, co może sprowadzić się np. do prognozowania).

Sztuczna sieć neuronowa składa się z określonej liczby połączonych ze sobą neuronów, które są elementami przetwarzającymi informacje ([Duch (red.) 2000], [Witkowska 2002]). Każdy neuron przetwarza skończoną liczbę sygnałów wejściowych  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  na jedno wyjście  $y$ , co można zapisać jako:

$$y = \varphi(e) = \varphi\left(\sum_{i=0}^n w_i x_i\right) \quad (2)$$

gdzie:  $x_i$  - wejścia (wartości wejściowe) neuronu dla  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $x_0 \equiv 0$ ,  $w_i$  - wagi (tj. parametry modelu, które należy oszacować w trakcie tzw. procesu trenowania),  $e$  - pobudzenia neuronu,  $\varphi(e)$  - funkcję aktywacji (przejścia) neuronu,  $y$  - wyjście neuronu.

Postać funkcji aktywacji silnie wpływa na sposób przetwarzania informacji przez neuron. Najbardziej popularne są funkcje ([Witkowska 2002], s. 4-5): tożsamościowa, progowa, signum lub funkcje sigmoidalne postaci:

- logistyczna:  $\varphi(e) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta e)}$ ,
- tangens hiperboliczny:  $\varphi(e) = \tanh(\beta e) = \frac{\exp(\beta e) - \exp(-\beta e)}{\exp(\beta e) + \exp(-\beta e)}$ .

Najczęściej sztuczne sieci neuronowe mają budowę warstwową. Wyróżnia się trzy rodzaje warstw: wejściową, wyjściową oraz ukryte. Neurony w warstwie wejściowej przetwarzają pojedyncze sygnały wejściowe (zmienne objaśniające). Neurony w warstwie wyjściowej dostarczają ostatecznie przetworzone wartości sygnałów wyjściowych, które podlegają interpretacji (zmienne objaśniane). Neurony w warstwie ukrytej przetwarzają sygnały wyjściowe z neuronów z poprzedzającej warstwy (którą może być warstwa wejściowa) i własny sygnał wyjściowy przekazują do następnej warstwy (którą może być warstwa wyjściowa). Ze względu na sposoby połączeń pomiędzy neuronami, sieci mogą być różnie zaprojektowane, a co za tym idzie mogą rozwiązywać różne problemy.

W zagadnieniach regresyjnych najczęściej wykorzystywane są sieci jednokierunkowe (por. [Lula 1999], s. 9), w których informacje są przetwarzane jednokierunkowo – od warstwy wejściowej do wyjściowej. Najbardziej popularną siecią jest perceptron wielowarstwowy (*MultiLayer Perceptron* – MLP), który składa się z trzech lub więcej warstw neuronów.

Trenowanie sieci polega na oszacowaniu parametrów (tj. wag) modelu nieliniowego. Najczęściej wykorzystywane są do tego celu algorytmy: wstecznej propagacji błędów, gradientów sprzężonych, quasi-Newtona i Levenberga-Marquardta. Wytrenowane sieci ocenia się za pomocą znanych miar dokładności dopasowania oraz – jeśli ich charakterystyki są zadowalające – można je wykorzystać do prognozowania.

## OCENA MODELI

Po otrzymaniu wartości teoretycznych z modeli VAR oraz sieci MLP należy dokonać oceny uzyskanych wyników. Jednym z kryteriów może być kryterium AIC (kryterium informacyjne Akaike), które wyznacza się z następującego wzoru:

$$AIC = -2 \cdot \frac{l}{T} + \frac{2s}{T} \quad (3)$$

gdzie:  $s$  – liczba szacowanych parametrów w modelu,  $T$  – liczba obserwacji,  $l$  – wartość logarytmu funkcji wiarygodności, którą dla pojedynczego równania wyznacza się jako:

$$l = -\frac{T}{2} \left[ 1 + \ln(2\pi) + \ln\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2\right) \right] \quad (4)$$

gdzie dla obserwacji  $t$ :  $e_t^2$  – reszta w modelu:  $e_t = y_t - \hat{y}_t$ ,  $\hat{y}_t$  – wartość teoretyczna,  $y_t$  – wartość empiryczna.

Dla modelu VAR wartość logarytmu funkcji wiarygodności można obliczyć ze wzoru:

$$l = -\frac{T}{2} \left\{ K[1 + \ln(2\pi)] + \ln(|\hat{\Omega}|) \right\} \quad (5)$$

gdzie:  $|\hat{\Omega}| = \det\left(\frac{1}{T-s}\Sigma_\varepsilon\right)$ ,  $K$  – liczba równań w modelu VAR,  $\Sigma_\varepsilon$  – macierz wariancji-kowariancji dla składników losowych modelu (1).

Oceny jakości modelu można dokonać na podstawie wartości błędów *ex post* (por. [Welfe 2003], s. 231-237):

- względny średni błąd absolutny:

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \quad (6)$$

- względny błąd średniokwadratowy:

$$RASE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right)^2 \quad (7)$$

- skorygowany względny średni błąd absolutny:

$$MAPE^* = \frac{\sum_{t=1}^T |y_t - \hat{y}_t|}{\sum_{t=1}^T |y_t|} \quad (8)$$

- skorygowany względny błąd średniokwadratowy:

$$RASE^* = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^T y_t^2}} \quad (9)$$

Błędy tej postaci, liczone dla próby estymacyjnej są błędami dopasowania, natomiast liczone dla danych spoza próby estymacyjnej są błędami prognoz *ex post*. Im mniejsza wartość błędów średnich tym model zostanie lepiej oceniony.

Innymi miarami, które można wykorzystać do oceny modelu są mierniki zgodności odwzorowania zmian *in plus* oraz *in minus*. Wykorzystanie takich miar pozwala stwierdzić, czy przy zastosowaniu danego modelu można dobrze opisać kierunki zmian w szeregu. Najprostszą miarą jest następująca statystyka:

$$S = \frac{\sum_{t=1}^T s_t}{T} \quad (10)$$

gdzie:  $s_t = \begin{cases} 1 & \text{gdy } (y_t \geq 0 \text{ i } \hat{y}_t \geq 0) \text{ lub } (y_t \leq 0 \text{ i } \hat{y}_t \leq 0) \\ 0 & \text{gdy } (y_t > 0 \text{ i } \hat{y}_t < 0) \text{ lub } (y_t < 0 \text{ i } \hat{y}_t > 0) \end{cases}$

## OPIS EKSPERYMENTÓW

Zbudowano dwurównaniowe modele VAR, które wykorzystano do zbadania relacji pomiędzy kursem euro/dolar a zmienną, która jednocześnie wpływa na zmiany kursu tej pary walut, jak też ulega wahaniom pod wpływem kursu euro/dolar (relacja  $X \leftrightarrow Y$ ). Kurs euro/dolar oznaczmy przez  $Y$ , a pozostałe zmienne - przez  $X$ . Czynniki, oznaczone jako zmienna  $X$ , wybrano na podstawie wyników testu przyczynowości Grangera. Długość maksymalnego opóźnienia w modelu VAR ustalono za pomocą kryterium AIC. Listę zmiennych uwzględnionych w badaniu oraz rząd maksymalnych opóźnień przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1. Zależności przyczynowe wykryte na bazie testu przyczynowości Grangera przy uwzględnieniu kursu euro/dolar dla zmiennej w postaci dziennych logarytmicznych stóp zwrotu (relacja  $X \leftrightarrow Y$  z kursem euro/dolar)

LP	Zmienna X	Opis
1	eur_index (2)	Indeks dla notowań kursów uwzględniających euro
2	usd_index (2)	Indeks dla notowań kursów uwzględniających dolara amerykańskiego
3	chf_index (2)	Indeks dla notowań kursów uwzględniających franka szwajcarskiego
4	eur_gbp (2)	Kurs euro/ funt brytyjski
5	gbp_index (3)	Indeks dla notowań kursów uwzględniających funta brytyjskiego
6	Hangseng (1)	Indeks giełdy w Hong Kongu – Hang Seng
7	Gold (4)	Notowania kontraktów futures na złoto
8	chf_usd_fut (5)	Notowania kontraktów futures wystawionych na kurs frank szw./dolar

Źródło. Opracowanie własne. W nawiasach obok zmiennej podano wartość opóźnienia zmiennych w modelu VAR.

Zastosowanie modeli VAR wymaga, aby szeregi zmiennych były szeregami stacjonarnymi. Z tego względu wszystkie szeregi zostały przetransformowane do postaci logarytmicznych stóp zwrotu.

$$y_{dt} = \ln \left( \frac{Y_{dt}}{Y_{dt-1}} \right) \quad (11)$$

gdzie:  $Y_{dt}$  – dzienne notowania kursu zamknięcia dla analizowanego waloru w okresie  $t$ ,  $Y_{dt-1}$  – opóźnione o jeden dzień notowania kursu zamknięcia.

Analizy przeprowadzono w oparciu o dane dzienne z okresu od 04.01.1999 r. do 05.12.2003 r. Podział podstawowej próby był następujący: ostatnie 50 obserwacji stanowiło próbę prognostyczną w modelach VAR a dla MLP - próbę testową. Natomiast pozostałe obserwacje tworzyły próbę estymacyjną w modelach VAR a dla MLP – próbę uczącą. Prognozy szacowano na jeden okres do przodu.

Sieci MLP zawierały trzy warstw. Liczba neuronów w warstwie wejściowej była równa liczbie zmiennych objaśniających<sup>1</sup> w modelach VAR, natomiast liczba neuronów w warstwie wyjściowej wynosiła dwa (tj. tyle co liczba zmiennych objaśnianych w modelach VAR). Liczbę neuronów w warstwie ukrytej ustalono na poziomie  $2N+1$ , gdzie  $N$  jest liczbą neuronów w warstwie wejściowej (por. [Azoff 1994], s. 50). Wykorzystano dwie postacie funkcji aktywacji: logistyczną (w sieci MLP1) i tangens hiperboliczny (w sieci MLP2). Do uczenia sieci zastosowano algorytm wstecznej propagacji błędów.

## WYNIKI EKSPERYMENTÓW

Ocenę jakości modeli VAR i sieci MLP przeprowadzono zarówno dla próby estymacyjnej (zbioru uczącego), jak i dla próby prognostycznej (zbioru testowego). Dla pierwszej próby policzono wartość kryterium AIC, błędy dopasowania  $MAPE^*$  i  $RASE^*$  oraz  $S$ .

Tabela 2. Wyniki dla pary zmiennych euro/dolar – eur\_index

eur_index		AIC	MAPE*	RASE*	S	MAPE	RASE
Próba estymacyjna Równanie dla zm. euro/dolar	VAR	<b>-7,2877</b>	0,9350	<b>0,9340</b>	<b>0,59</b>	$4,88 \cdot 10^{-3}$	$6,30 \cdot 10^{-3}$
	MLP1	-7,2683	0,9424	0,9432	<b>0,59</b>	$4,92 \cdot 10^{-3}$	$6,37 \cdot 10^{-3}$
	MLP2	-7,2874	<b>0,9348</b>	0,9342	<b>0,59</b>	$4,88 \cdot 10^{-3}$	$6,31 \cdot 10^{-3}$
Próba estymacyjna Równanie dla zm. eur_index	VAR	-8,1603	<b>0,973</b>	0,9708	<b>0,59</b>	$3,14 \cdot 10^{-3}$	$4,08 \cdot 10^{-3}$
	MLP1	-8,16	0,9734	0,971	<b>0,59</b>	$3,14 \cdot 10^{-3}$	$4,08 \cdot 10^{-3}$
	MLP2	<b>-8,1605</b>	0,9732	<b>0,9707</b>	0,58	$3,14 \cdot 10^{-3}$	$4,07 \cdot 10^{-3}$
Próba estymacyjna Cały model	VAR	<b>-16,5174</b>	<b>0,9495</b>	<b>0,9445</b>	<b>0,49</b>	$4,01 \cdot 10^{-3}$	$5,31 \cdot 10^{-3}$
	MLP1	-5,4546	0,9543	0,9912	0,47	$4,03 \cdot 10^{-3}$	$5,34 \cdot 10^{-3}$
	MLP2	-5,5174	<b>0,9495</b>	<b>0,9445</b>	0,48	$4,01 \cdot 10^{-3}$	$5,31 \cdot 10^{-3}$
Próba testowa Równanie dla zm. euro/dolar	VAR	---	<b>0,9607</b>	0,9941	0,6	$5,49 \cdot 10^{-3}$	$7,00 \cdot 10^{-3}$
	MLP1	---	0,9653	<b>0,9903</b>	0,6	$5,51 \cdot 10^{-3}$	$6,97 \cdot 10^{-3}$
	MLP2	---	0,9625	0,9927	<b>0,62</b>	$5,50 \cdot 10^{-3}$	$6,99 \cdot 10^{-3}$
Próba testowa Równanie dla zm. eur_index	VAR	---	0,9639	0,9981	<b>0,64</b>	$3,61 \cdot 10^{-3}$	$4,57 \cdot 10^{-3}$
	MLP1	---	<b>0,962</b>	<b>0,9935</b>	0,6	$3,61 \cdot 10^{-3}$	$4,55 \cdot 10^{-3}$
	MLP2	---	0,9693	0,9985	0,62	$3,63 \cdot 10^{-3}$	$4,58 \cdot 10^{-3}$
Próba testowa Cały model	VAR	---	<b>0,9619</b>	0,9953	<b>0,52</b>	$4,55 \cdot 10^{-3}$	$5,91 \cdot 10^{-3}$
	MLP1	---	0,964	<b>0,9912</b>	0,46	$4,56 \cdot 10^{-3}$	$5,89 \cdot 10^{-3}$
	MLP2	---	0,9652	0,9945	0,5	$4,57 \cdot 10^{-3}$	$5,91 \cdot 10^{-3}$

Źródło. Opracowanie własne.

<sup>1</sup> Listy zmiennych wejściowych i wyjściowych sieci neuronowych są takie same jak listy zmiennych odpowiednio: objaśniających i objaśnianych w modelu VAR.



Dla próby prognostycznej obliczono błędy prognoz *ex post* *MAPE\** i *RASE\** oraz *S*. Błędy zostały wyznaczone dla każdej zmiennej osobno oraz łącznie dla obu zmiennych (tj. jeden błąd dla całego modelu). W tym drugim przypadku, błędy *MAPE\** i *RASE\** były liczone w taki sposób, że za wartości  $\hat{y}_t$  przyjęto wszystkie wyznaczone wartości teoretyczne, a za  $y_t$  przyjęto wartości empiryczne zmiennych objaśnianych. W przypadku błędu *S* za zgodną zmianę uznano taką, kiedy kierunki zmian obu wartości wyjściowych z modelu pokrywały się z rzeczywistymi zmianami. We wszystkich przypadkach wartości logarytmicznych stóp zwrotu przeliczono na poziomy (ceny badanych instrumentów) oraz obliczono dla nich wartości błędów *MAPE* i *RASE*. Spośród wszystkich analizowanych modeli, najmniejsze wartości średnich błędów (6) – (9) oraz największe wartości miernika zgodności zmian *S* (10) otrzymano dla trzech modeli, w których za zmienną *X* przyjęto jedną ze zmiennych:

1. indeks notowań kursów uwzględniających euro: *eur\_index*,
2. notowania kontraktów futures wystawionych na kurs frank szwajcarski/dolar amerykański: *chf\_usd\_fut*,
3. indeks notowań kursów uwzględniających funta brytyjskiego: *gbp\_index*.

Tabela 3. Wyniki dla pary zmiennych euro/dolar – kontrakty futures wystawione na kurs *chf/usd* (*chf\_usd\_fut*).

<i>chf_usd_fut</i>		AIC	MAPE*	RASE*	S	MAPE	RASE
Próba estymacyjna Równanie dla zm. euro/dolar	VAR	<b>-7,4142</b>	<b>0,8673</b>	<b>0,8785</b>	<b>0,56</b>	4,52*10 <sup>-3</sup>	5,92*10 <sup>-3</sup>
	MLP1	-7,3985	0,8778	0,8854	0,29	4,57*10 <sup>-3</sup>	5,96*10 <sup>-3</sup>
	MLP2	-7,4071	0,8764	0,8816	<b>0,56</b>	4,56*10 <sup>-3</sup>	5,94*10 <sup>-3</sup>
Próba estymacyjna Równanie dla zm. <i>chf_usd_fut</i>	VAR	<b>-7,1239</b>	<b>0,9968</b>	<b>0,9971</b>	<b>0,57</b>	5,29*10 <sup>-3</sup>	6,85*10 <sup>-3</sup>
	MLP1	-7,1156	1,0022	1,0013	0,56	3,17*10 <sup>-3</sup>	4,13*10 <sup>-3</sup>
	MLP2	-7,1205	0,9992	0,9988	<b>0,57</b>	3,22*10 <sup>-3</sup>	4,19*10 <sup>-3</sup>
Próba estymacyjna Cały model	VAR	<b>-15,0465</b>	<b>0,9326</b>	0,9971	<b>0,32</b>	4,90*10 <sup>-3</sup>	6,40*10 <sup>-3</sup>
	MLP1	-5,5912	0,9405	<b>0,9405</b>	0,16	3,87*10 <sup>-3</sup>	5,13*10 <sup>-3</sup>
	MLP2	-5,6229	0,9384	0,9734	0,31	3,89*10 <sup>-3</sup>	5,14*10 <sup>-3</sup>
Próba testowa Równanie dla zm. euro/dolar	VAR	---	0,9495	0,9631	<b>0,62</b>	5,43*10 <sup>-3</sup>	6,78*10 <sup>-3</sup>
	MLP1	---	<b>0,9296</b>	0,9515	0,36	5,31*10 <sup>-3</sup>	6,70*10 <sup>-3</sup>
	MLP2	---	0,9461	<b>0,9513</b>	<b>0,62</b>	5,40*10 <sup>-3</sup>	6,70*10 <sup>-3</sup>
Próba testowa Równanie dla zm. <i>chf_usd_fut</i>	VAR	---	0,9933	0,9974	0,52	5,97*10 <sup>-3</sup>	7,73*10 <sup>-3</sup>
	MLP1	---	0,9811	<b>0,9880</b>	<b>0,62</b>	3,71*10 <sup>-3</sup>	4,48*10 <sup>-3</sup>
	MLP2	---	<b>0,9795</b>	0,9913	0,56	3,76*10 <sup>-3</sup>	4,62*10 <sup>-3</sup>
Próba testowa Cały model	VAR	---	0,9720	0,9820	0,32	5,70*10 <sup>-3</sup>	7,27*10 <sup>-3</sup>
	MLP1	---	<b>0,9560</b>	<b>0,9717</b>	0,22	4,51*10 <sup>-3</sup>	5,70*10 <sup>-3</sup>
	MLP2	---	0,9632	0,9734	<b>0,36</b>	4,58*10 <sup>-3</sup>	5,75*10 <sup>-3</sup>

Źródło. Opracowanie własne.

W tabelach 2 i 3 przedstawiono wybrane wyniki uzyskane dla dwóch pierwszych modeli. W próbie estymacyjnej (uczącej) najlepszy wyniki dla zmiennej euro/dolar otrzymano z modelu, gdzie za zmienną X przyjęto *chf\_usd\_fut* (tab. 3). W tym przypadku wszystkie wartości błędów są najmniejsze, a zgodność kierunków zmian – największa (68%). Najlepszym modelem dla zmiennej X okazał się model ze zmienną *eur\_index*. W tym przypadku również otrzymano najmniejsze wartości średnich błędów dopasowania oraz największą zgodność kierunków zmian (59%). Najmniejsze błędy *MAPE\** i *RASE\** liczone dla całego modelu otrzymano dla modelu ze zmienną *chf\_usd\_fut*. Natomiast największą zgodność kierunków zmian (49%) w przypadku modelu ze zmienną *eur\_index* (tab. 2). W próbie testowej dla zmiennej euro/dolar w modelach ze zmiennymi *chf\_usd\_fut*, *eur\_index* oraz *gbp\_index* otrzymano największą zgodność kierunków zmian (62%). Średnie błędy *MAPE\** i *RASE\** najmniejsze były dla modelu ze zmienną *chf\_usd\_fut*. Dla zmiennej X najlepszą zgodność kierunków zmian uzyskano dla modelu ze zmienną *eur\_index* (64%), a najmniejsze błędy: *MAPE\** - dla zmiennej *eur\_index*, *RASE\** - dla zmiennej *chf\_usd\_fut*. Jakość całego modelu w odniesieniu do przewidywania obu zmiennych najlepsza była dla modelu ze zmienną *eur\_index* (zgodność kierunków zmian 52%), a najmniejsze średnie błędy *MAPE\** i *RASE\** uzyskano dla modelu ze zmienną *chf\_usd\_fut*.

## PODSUMOWANIE

Celem przedstawionych badań była analiza zmian kursu euro/dolar i wybranych czynników, które charakteryzują się wzajemnym dwustronnym oddziaływaniem. W badaniach wykorzystano dwurównaniowe modele VAR i sztuczne sieci neuronowe SSN o dwóch neuronach w warstwie wyjściowej. Innymi słowy przeprowadzona analiza dotyczyła zastosowania modeli liniowych VAR i modeli nieliniowych tj. perceptronów wielowarstwowych MLP1 i MPL2. Spośród 24 oszacowanych modeli najlepsze wyniki uzyskano dla modeli, w których wybranym czynnikiem (tj. zmienną X) jest jedna ze zmiennych *eur\_index*, *gbp\_index*, *chf\_usd\_fut*.

Biorąc pod uwagę kryterium najmniejszych błędów *MAPE\** i *RASE\** (jak też *MAPE* i *RASE*) należy stwierdzić, że zmiany kursu euro/dolar były najlepiej objaśnianie oraz prognozowane przez model ze zmienną: notowania kontraktów futures, wystawionych na kurs frank szwajcarski/dolar amerykański *chf\_usd\_fut*. Analizując kryterium zgodności kierunków zmian, najlepszym okazał się model ze zmienną: indeks notowań kursów uwzględniających euro *eur\_index* (dla próby estymacyjnej) oraz modele ze zmiennymi *eur\_index*, *gbp\_index*, *chf\_usd\_fut* (dla próby testowej). Warto również odnieść się do obu klas modeli, które zostały wykorzystane w badaniach. Z przeprowadzonych analiz wynika, że o ile w przypadku próby estymacyjnej (uczącej) modele VAR mają nieco lepsze

charakterystyki, to dla próby prognostycznej (testowej) sieci neuronowe można uznać za modele, które w większości przypadków lepiej sobie radzą z przewidywaniem przyszłych wartości.

## LITERATURA

- Azoff E.M. (1994) *Neural Network Time Series Forecasting of Financial Markets*, Wiley, Chichester
- Sims C.A. (1980) *Macroeconomics and Reality*, *Econometrica*, Vol. 48, str. 1-48
- Charemza W., Deadman D.F. (1997) *Nowa ekonometria*, PWE, Warszawa
- Duch W., Korbicz J., Rutkowski L., Tadeusiewicz R. (2000) *Biocybernetyka i inżynieria biomedyczna*, Tom 6: *Sieci Neuronowe*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa
- EViews 4 User Guide (2001) *Quantitative Micro Software LLC*
- Gately E. (1999) *Sieci neuronowe. Prognozowanie finansowe i projektowanie systemów transakcyjnych*, WIG PRESS, Warszawa 1999
- Kaashoek J.F., van Dijk H.K. (2000) *Neural Networks as Econometric Tool*, maszynopis, *Econometric Institute Rapport EI2000 - 31A*, Erasmus University Rotterdam
- Kusideł E. (2000) *Modele wektorowo-autoregresyjne VAR. Metodologia i zastosowania*, w: Suhecki B. [red.]: *Dane panelowe i modelowanie wielowymiarowe w badaniach ekonomicznych*, tom 3, Absolwent, Łódź
- Lula P. (1999) *Jednokierunkowe sieci neuronowe w modelowaniu zjawisk ekonomicznych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Witkowska D. (2005) *Podstawy ekonometrii i teorii prognozowania*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków
- Witkowska D. (2002) *Sztuczne sieci neuronowe i metody statystyczne*, C.H.Beck, Warszawa

### **The Euro/ Dollar Exchange Rate Analysis: VAR Model and Multilayer Perceptron**

**Summary:** In the financial time series analysis one often recommends the application of the multidimensional methods such as the vector autoregression model – VAR, that was proposed by Sims in 1980. The feedforward artificial neural networks, especially multilayer perceptron – MLP, can be considered as an alternative, for VAR model, tool. In the paper we discuss the results of the euro/dollar time series investigation that is provided employing VAR and MLP models. The efficiency of both methods is evaluated in terms of ex-post errors. The source of the analysed series is REUTERS data base from the 4<sup>th</sup> of January 1999 till the 5<sup>th</sup> of December 2003. In our investigation we consider the euro/dollar exchange rate and selected financial instrument time series. The models are constructed for the euro/dollar exchange rate that is transformed into daily logarithmic rate of returns.

**Key words:** VAR model, multilayer perceptron, euro/dollar exchange rate

Agnieszka Mazur<sup>1</sup>, Dorota Witkowska<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Politechnika Łódzka, <sup>2</sup> Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW

e-mail: agnieszka@oizet.p.lodz.pl; dwitkowska@mors.sggw.waw.pl

## ZASTOSOWANIE WYBRANYCH MIERNIKÓW TAKSONOMICZNYCH DO OCENY NIERUCHOMOŚCI\*

**Streszczenie:** Celem pracy jest zastosowanie wybranych metod statystycznej analizy wielowymiarowej do badania jednego z segmentów rynku nieruchomości – rynku mieszkaniowego. Badania zostały przeprowadzone na podstawie danych dotyczących mieszkań sprzedanych w aglomeracji łódzkiej. Na podstawie atrybutów opisujących wszystkie obiekty zostały one pogrupowane za pomocą syntetycznego miernika rozwoju i wskaźnika względnego poziomu rozwoju.

**Słowa kluczowe:** wielowymiarowa analiza danych, rynek nieruchomości, metody taksonomiczne, syntetyczny miernik rozwoju, wskaźnik względnego poziomu rozwoju.

### WSTĘP

Nieruchomości są dobrami o dość szczególnych cechach, jakimi są: stałość w miejscu, różnorodność, wysoka kapitałochłonność oraz mała płynność [Bryx, Matkowski 2001]. To powoduje, że rynek nieruchomości, pomimo tego, że podlega tym samym regułom co inne rynki w gospodarce, jest rynkiem specyficznym [Kucharska-Stasiak 1999].

Możliwość utraty znacznego kapitału w wyniku spadku wartości obiektów lub trudności z ich zbyciem w krótkim czasie powoduje wzrost ryzyka podejmowanych decyzji na rynku nieruchomości. Wpływa na to również trudny i kosztowny dostęp do informacji dotyczących transakcji. Dlatego duże znaczenie w procesie podejmowania decyzji ma właściwe przetworzenie i optymalne wykorzystanie zdobytych informacji. Pomocne mogą się tutaj okazać metody statystycznej analizy wielowymiarowej, które służą do badania zjawisk opisanych za pomocą wielu (tj. od kilku do kilkudziesięciu) cech (- zmiennych).

Metody wielowymiarowej analizy porównawczej można podzielić na kilka grup i podgrup [Łuniewska, Tarczyński 2006]. Jedną z nich stanowią metody porządkowania liniowego obiektów, do której należą między innymi: syntetyczny miernik rozwoju i wskaźnik względnego poziomu rozwoju. Mają one szerokie zastosowanie np. na rynku kapitałowym do określania atrakcyjności inwestycyjnej

---

\* Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2005-2007 jako projekt badawczy

spółek [Łuniewska, Tarczyński 2006], ale są również wykorzystywane do badania rynku nieruchomości [por. Foryś, Gdakowicz 2003].

Na lokalnym rynku nieruchomości syntetyczne miary rozwoju mogą być zastosowane np. do badania atrakcyjności nieruchomości dla potencjalnych nabywców, określania ich pozycji na tle pozostałych obiektów oraz do badania preferencji kupujących i wyodrębnienia nieruchomości, które są najbardziej pożądane na rynku. Celem opracowania jest zastosowanie syntetycznego miernika rozwoju oraz wskaźnika względnego poziomu rozwoju do porządkowania obiektów, którymi są sprzedane mieszkania na jednym z lokalnych rynków.

## OPIS OBIEKTÓW

Badania empiryczne przeprowadzono w oparciu o rzeczywiste dane pochodzące z łódzkiego, wtórnego rynku mieszkaniowego. Wszystkie mieszkania opisane są przez następujące zmienne:

- $x_1$  - cena transakcyjna (w zł),
- $x_2$  - powierzchnia mieszkania (w m<sup>2</sup>),
- $x_3$  - numer piętra, na którym znajduje się mieszkanie,
- $x_4$  - liczba pokoi,
- $x_5$  - rok budowy,
- $x_6$  - posiadanie telefonu (1 – tak, 0 – nie),
- $x_7$  - lokalizacja mieszkania (lokalizacje w Łodzi oznaczone są literami: A; B; C; D; E; F; G; H; I; J; K; L; M; N; O; P; R; S; T; Z-poza Łodzią),
- $x_8$  - rozkład mieszkania (1 – rozkładowe, 0 – amfilada),
- $x_9$  - występowanie balkonu (1 – jest, 0 – nie ma),
- $x_{10}$  - rozmieszczenie mieszkania w budynku (1 – mieszkanie środkowe, 0 – mieszkanie szczytowe),
- $x_{11}$  - ocena stanu technicznego (4 – bardzo dobry; 3 – dobry; 2 – do odświeżenia; 1 – średni; 0 – do remontu).

W przypadku metod taksonomicznych istotne jest określenie charakteru zmiennych opisujących obiekty. W zależności od tego, jaki wpływ na badane zjawisko mają te zmienne, wyróżnia się wśród nich stymulanty, destymulanty i nominanty. Stymulantami są te cechy diagnostyczne, których większe wartości oznaczają wyższy poziom rozwoju badanego zjawiska a destymulantami te, których większe wartości wpływają negatywnie na badane zjawisko. Natomiast nominanty to zmienne, których najkorzystniejsze wartości są pewną ustaloną wielkością lub przedziałem liczbowym. Aby wszystkie zmienne były wzajemnie porównywalne co do rzędów wielkości oraz pozbawione mian dokonuje się ich standaryzacji. [zob. Walesiak 2003; Gatnar, Walesiak 2004].

Do badań wybrano siedem zmiennych będących stymulantami:  $x_2, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{11}$ . Te zmienne okazały się być istotne w innych badaniach [Mazur, Witkowska 2006].

## SYNTETYCZNY MIERNIK ROZWOJU

Syntetyczny miernik rozwoju (SMR) wykorzystuje się do liniowego porządkowania obiektów opisanych przez wiele zmiennych diagnostycznych [Pluta W. 1986], które zastępowane są przez jedną zmienną syntetyczną. Kolejne etapy konstrukcji syntetycznego miernika rozwoju są następujące:

1. normalizacja wartości zmiennych diagnostycznych ( $x_{ij}$ ), przedstawionych w postaci stymulant;
2. utworzenie wzorca czyli obiektu, który posiada najkorzystniejsze wartości zmiennych diagnostycznych ( $z_{0j} = \max_i \{z_{ij}\}$ , gdzie  $z_{ij}$  – wartości znormalizowane), jakie zostały zaobserwowane w całym zbiorze danych;
3. wyznaczenie odległości każdego obiektu od wzorca ( $d_i$ ).

Jedną z typowych formuł zapisu zmiennej syntetycznej dla  $i$ -tego obiektu opiera się na odległości euklidesowej i jest następująca:

$$d_i = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (z_{ij} - z_{0j})^2} \quad (1)$$

gdzie:  $i = 1, \dots, n$  – liczba obiektów;  $j = 1, \dots, m$  – liczba zmiennych;  $z_{ij}$  – znormalizowana wartość  $j$  – tej zmiennej dla  $i$  – tego obiektu,  $z_{0j}$  – wzorcowa znormalizowana wartość  $j$  – tej zmiennej.

Aby syntetyczny miernik był unormowany i jego większe wartości wskazywały na wyższy poziom badanego zjawiska odległość  $d_i$  przekształca się według następującej formuły:

$$z_i = 1 - \frac{d_i}{d_o} \quad (2)$$

gdzie:  $z_i$  – syntetyczny miernik rozwoju dla  $i$ -tego obiektu,  $d_o$  – norma zapewniająca przyjmowanie przez  $z_i$  wartości należące do przedziału od 0 do 1, którą można wyznaczyć np. jako wartość maksymalną  $d_i^1$ :

$$d_o = \max_i \{d_i\} \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Inne propozycje wyznaczania  $d_o$  podane są w pracy: Łuniewska M., Tarczyński W., 2006, s. 43-44.

W celu uwzględnienia różnego wpływu poszczególnych zmiennych diagnostycznych na badane zjawisko w procedurze konstrukcji syntetycznego miernika rozwoju wprowadza się wagi.

### WSKAŹNIK WZGLĘDNEGO POZIOMU ROZWOJU

Wskaźnik względnego poziomu rozwoju (BZW) jest miarą bez wzorca. Formuła wyznaczania tej syntetycznej miary rozwoju jest następująca [Łuniewska, Tarczyński 2006]:

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^k z_{ij}}{\sum_{j=1}^k \max_i \{z_{ij}\}} \quad (4)$$

$$z_{ij} = x_{ij}^* + \left| \min_i \{x_{ij}^*\} \right| \quad (5)$$

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{S_j} \quad (6)$$

gdzie:  $w_i$  – wskaźnik względnego poziomu rozwoju,  $\bar{x}_j$ ,  $S_j$  – średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe  $j$  – tej zmiennej.

Ta syntetyczna miara rozwoju jest unormowana, jej wartości mieszczą się w przedziale od 0 do 1. Im jej wartość jest bliższa 1 tym obiekt jest lepszy według przyjętego kryterium ogólnego.

### WYNIKI

W procesie konstrukcji syntetycznego miernika rozwoju nie uwzględniono wag zróżnicowanych dla zmiennych oraz przyjęto założenie, że wszystkie wyniki pomiaru pochodzą ze skali ilorazowej<sup>2</sup>. Obydwie syntetyczne miary rozwoju wyznaczono dla 151 obiektów. We wstępnej analizie danych wszystkie mieszkania zostały podzielone na cztery arbitralnie ustalone grupy cenowe (tabela 1). Po wyznaczeniu wartości syntetycznego miernika rozwoju (SMR) oraz wskaźnika względnego poziomu rozwoju (BZW) dla wszystkich mieszkań dokonano ich analizy z uwzględnieniem grup cenowych.

<sup>2</sup> Problem wyznaczania syntetycznych miar rozwoju w przypadku zmiennych mierzonych na różnych skalach został omówiony w pracy: Gatnar E., Walesiak M. (red.), 2004, s. 45-51.

Tabela 1. Struktura mieszkań według arbitralnie ustalonych grup cenowych

Cena w tys. zł	do 50	<50-75)	<75-100)	100 i powyżej
Grupa	I	II	III	IV
Liczebność	30	57	42	22

Źródło: Opracowanie własne.

Jak widać w tabeli 2 najwyższe wartości syntetycznego miernika rozwoju mają głównie obiekty z IV grupy cenowej. 17 mieszkań z tej grupy oraz 5 z grupy III ma wartości tej miary z przedziału od 0,84 do 0,44. W kolejnym przedziale wartości SMR (0,44; 0,32> znalazły się przede wszystkim mieszkania z grupy III – 30 oraz 5 z grupy IV i 2 z grupy II. W dalszej kolejności porządkowej według policzonego wskaźnika są mieszkania z II grupy, które przyjmują jego wartości z przedziału od 0,32 do 0,15. Najniższe wartości SMR (poniżej 0,15) otrzymano dla mieszkań z I grupy cenowej, chociaż znalazło się tutaj aż 10 obiektów z grupy II.

Tabela 2. Wartości miernika SMR w grupach cenowych obiektów

Wartości miary SMR	Liczba mieszkań z poszczególnych grup cenowych			
	I	II	III	IV
0,84-0,44	0	0	5	17
0,44-0,32	0	2	30	5
0,32-0,15	4	45	7	0
0,15-0,00	26	10	0	0
Razem	30	57	42	22

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 3 przedstawia pogrupowane w przedziały wartości wskaźnika względnego poziomu rozwoju dla mieszkań z poszczególnych grup cenowych. Podobnie jak przypadku wskaźnika SMR mieszkania zostały uporządkowane w ten sposób, że najwyższe wartości miary syntetycznej mają mieszkania najdroższe a najmniejsze – najtańsze. Widać jednak, że grupy cenowe I i II nie są wyraźnie oddzielone pod względem wartości tej miary. Wartości wskaźnika poniżej 0,44 otrzymano dla 27 mieszkań należących do grupy I, 25 do II i 2 do III.

Tabela 3. Wartości miernika BZW w grupach cenowych obiektów

Wartości miary BZW	Liczba mieszkań z poszczególnych grup cenowych			
	I	II	III	IV
0,90 - 0,67	0	0	4	13
0,67 - 0,56	0	9	28	9
0,56 - 0,44	3	23	8	0
0,44 - 0,00	27	25	2	0
Razem	30	57	42	22

Źródło: Opracowanie własne.



W tabeli 4 podano średnie wartości wyznaczonych miar syntetycznych w poszczególnych grupach. Widać, że im niższa grupa cenowa tym niższa średnia wartość policzonego wskaźnika.

Tabela 4. Średnie wartości syntetycznych miar rozwoju w grupach

Syntetyczna miara rozwoju	Liczba mieszkań z poszczególnych grup cenowych			
	I	II	III	IV
Syntetyczny miernik rozwoju (SMR)	0,0993	0,2136	0,3599	0,4907
Wskaźnik względnego poziomu rozwoju (BZW)	0,3434	0,4575	0,5940	0,6975

Źródło: Opracowanie własne.

W całym rozpatrywanym zbiorze mieszkań, 108 obiektów zostało tak samo zaklasyfikowanych przez oba wyznaczone wskaźniki, natomiast 43 mieszkania znalazły się w różnych grupach cenowych. W tabeli 5 przedstawiono strukturę obiektów w poszczególnych klasach, które w oparciu o wskazania każdego z mierników przydzielone zostały do innej grupy. Zauważmy, że pogrubione liczebności w tabeli 5 oznaczają liczbę poprawnie rozpoznanych mieszkań. Zatem posiłkując się miernikiem SMR poprawnie rozpoznane zostały 34 (spośród 43) obiekty, podczas gdy miernik BZW poprawnie zaklasyfikował tylko 7 (tj. 16%) mieszkań. Spośród mieszkań należących do I grupy cenowej, błędnie zaklasyfikowano do drugiej grupy cenowej dwa obiekty na podstawie miernika SMR, a w oparciu o miernik BZW - jedno mieszkanie. W grupie drugiej aż 24 obiekty zostały różnie zaklasyfikowane przez oba mierniki. Prawie wszystkie mieszkania z tej grupy zostały ocenione poprawnie przez syntetyczny miernik rozwoju, a niepoprawnie przez wskaźnik względnego poziomu rozwoju. Podobnie jest w grupie IV, gdzie pięć mieszkań poprawnie zaklasyfikowanych przez SMR zostało błędnie przydzielonych do grupy III przez BZW. W przypadku jednego obiektu w grupie IV zaistniała sytuacja odwrotna.

Tabela 5. Struktura obiektów inaczej zaklasyfikowanych przez obydwa mierniki

Grupa cenowa	SMR				BZW				Razem
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	
I	<b>1</b>	2	0	0	<b>2</b>	1	0	0	3
II	1	<b>23</b>	0	0	16	<b>1</b>	7	0	24
III	0	3	<b>5</b>	2	2	4	<b>3</b>	1	10
IV	0	0	1	<b>5</b>	0	0	5	<b>1</b>	6
Razem	2	28	6	7	20	6	15	2	43

Źródło: Opracowanie własne.

## PODSUMOWANIE

Wyznaczone syntetyczne miary rozwoju uporządkowały zbiór mieszkań od najlepszych do najgorszych. Mniejsze wartości tych wskaźników wskazują na niższą pozycję danego obiektu w uporządkowanym szeregu. Pogrupowane, według wartości policzonych mierników syntetycznych, mieszkania odniesiono do wcześniej ustalonych grup cenowych. Zarówno syntetyczny miernik rozwoju, jak i wskaźnik względnego poziomu rozwoju przyjmowały wartości większe dla mieszkań droższych a mniejsze dla tańszych. Największe wartości policzonych wskaźników otrzymano dla grupy IV czyli mieszkań najdroższych, a najmniejsze – dla grupy I czyli mieszkań najtańszych. Przy czym grupy I i II zostały słabiej wyodrębnione tzn. trudniej było określić wartość syntetycznej miary, która wyraźnie by je oddzielała.

Na podstawie analizy mieszkań, które zostały inaczej ocenione przez każdy ze wskaźników należy stwierdzić, że lepsze rezultaty klasyfikacji otrzymano dla syntetycznego wskaźnika rozwoju SMR. Wskaźnik względnego poziomu rozwoju BZW gorzej klasyfikował mieszkania, szczególnie te należące do II grupy cenowej.

Warto przy tym zauważyć, że na błędy klasyfikacji mogą mieć wpływ wartości wskaźników rozdzielające poszczególne grupy. W omawianym przypadku były one umownie ustalone według kryterium ciągu obiektów z tej samej grupy.

Podsumowując wyniki przeprowadzonych eksperymentów można stwierdzić, że zastosowanie syntetycznych mierników taksonomicznych umożliwia podział analizowanych obiektów do wcześniej zdefiniowanych klas. Ponadto w ramach poszczególnych grup cenowych dokonany został ranking obiektów, który wskazuje, iż warto kupować mieszkania o wyższych wartościach mierników porządkowania liniowego.

## LITERATURA

- Bryx M., Matkowski R. (2001) *Inwestycje w nieruchomości*, Poltext, Warszawa.
- Foryś I., Gdakowicz A. (2003) Wykorzystanie metod taksonomii w analizie rynku nieruchomości mieszkaniowych na przykładzie powiatów województwa zachodniopomorskiego, *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu*, Nr 988, Jajuga K., Walesiak M (red). *Taksonomia 10, Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław, s.41-49.
- Gatnar E., Walesiak M. (red.) (2004) *Metody statystycznej analizy wielowymiarowej w badaniach marketingowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. O. Langego, Wrocław.
- Kucharska-Stasiak E. (1999) *Nieruchomość a rynek*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

- Łuniewska M., Tarczyński W. (2006) Metody wielowymiarowej analizy porównawczej na rynku kapitałowym, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Mazur A., Witkowska D. (2006) Analiza cen mieszkań na wtórnym rynku nieruchomości, referat prezentowany na IV Konferencji: Rynek Kapitałowy. Skuteczne Inwestowanie, Kołobrzeg.
- Pluta W. (1986) Wielowymiarowa analiza porównawcza w modelowaniu ekonometrycznym, PWN, Warszawa.
- Walesiak M.(2003) Uogólniona miara odległości GDM jako syntetyczny miernik rozwoju w metodach porządkowania liniowego, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Nr 988, Jajuga K., Walesiak M (red). *Taksonomia 10, Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław, s.124-133.

### **Application of the taxonomic measures to estimate of the real estate**

**Summary:** In the research the data regarding the apartments, that were sold by their owners in Lodz region, are considered. Each apartment is described by the 11 attributes. In the paper we present the results of application some methods of statistical multivariate analysis to grouping of the apartments.

**Key words:** real estate market, statistical multivariate analysis, taxonomic measure, synthetic measure.

Joanna Miklewska  
Katedra Zastosowań Matematyki Akademia Rolnicza w Szczecinie  
e-mail: miklews@erl.edu.pl

## **MODELOWANIE OBSZARÓW PERI-URBAN ZASTOSOWANIE AUTOMATÓW KOMÓRKOWYCH I PODEJŚCIA AGENTOWEGO**

**Streszczenie:** Autorka w artykule przedstawia metodykę prowadzenia badań w projekcie finansowanym przez niemieckie Ministerstwo Edukacji i Badań pt. „Integrated catchment management and risk-based resource allocation in urban and peri-urban areas” oraz w granice wewnątrzuczelnianym AR w Szczecinie Nr BW/HE/03/03. Miejszem badań są obszary aglomeracji Stuttgartu nazywane w literaturze, peri-urban, mieszczące się na przejściowych obszarach między miastem a obszarami wiejskimi. Są to aktualnie obszary podlegające intensywnym badaniom ze względu na ich bardzo dużą dynamikę i stale zmieniające się funkcje miasta i jego centrum. Autorka stosuje podejście agentowe wychodząc od modeli automatów komórkowych. Definiuje podstawowe pojęcia takie jak: rodzaje automatów komórkowych, typy agentów, sąsiedztwo, stany komórki, renta położenia (bid rent), efekty zewnętrzne. W artykule autorka wyprowadza podstawowe zależności dla efektów zewnętrznych.

**Słowa kluczowe:** obszary peri-urban, automaty komórkowe, renta położenia, sąsiedztwo, agenci

### **WSTĘP**

Prezentowany w artykule model jest uproszczony (rozważane są dwa typy użytkowania ziemi), w grze bierze udział tylko dwóch agentów. Nie uwzględnia się decyzji związanych z planowaniem miasta i rozwojem obszarów wiejskich, obszarów na przejściu od wsi do miasta (peri-urban). Model uwzględnia jednak podstawowe procesy na obszarach peri-urban. Z literatury przedmiotu wynika, że w ubiegłych dekadach zachodziła konwersja ziemi rolniczej w ziemię zajmowaną przez rezydencje prywatne. Była to bardzo znacząca zmiana użytkowania ziemi, np. w Belgii ilość ziemi, która w ten sposób zmieniła właściciela wzrosła o 40% w okresie 1980 – 1995 po bardzo słabych zmianach w okresie 1950 – 1980 [Jehin 1998].

Należy podkreślić, że ziemia rolnicza jeszcze długo będzie głównym składnikiem obszarów peri-urban. Obecność i wpływ innych typów miejskiego użytkowania ziemi (np. usługi, infrastruktura) jest uwzględniana we wskaźniku gęstości powierzchni zajmowanej przez rezydencje.

W modelu rozważa się maksymalizację renty dla właścicieli ziemi lub maksymalizację funkcji użyteczności dla mieszkańców rezydencji. Ponieważ sąsiedztwo jest podstawą działania modeli CA (*cellular automata* – automaty komórkowe) i ze względu na to, że koszty przełączeń stanowią główny składnik kosztów w obrębie ekonomii miasta (dla komunikacji wewnątrz obszarów

badanych; używam pojęcia przełączeń gdyż pełniej oddaje ono istotę kosztów transportowych w odróżnieniu od słowa połączenie), oczywistym staje się połączenie i włączenie tych dwóch technik do analizy procesów rozwoju i wzrostu na obszarach peri-urban. Teoria ekonomii miasta jest nową teorią i ma swoje korzenie w teorii ekonomii, powstała z potrzeby rozwiązywania miejskich problemów (zagęszczenie, segregacja, rozrost obszarów sub-urban i peri-urban, zmniejszanie się roli centrów miast i powstawaniu CBD – Centralnych Obszaru Biznesu, tworzeniu się klastrów rozwojowych. Ekonomia miasta jest rozszerzeniem kontekstu lokalizacji i użytkowania ziemi prezentowanego min. w pracach [Alonso 1964; Muth 1969; Mills 1967] oraz w podstawowej pracy związanej z rozważaniem renty położenia (*bid-rent*) i rolniczego odniesienia się do obszarów peri-urban [Von Thünen 1826].

Zakłada się, że ewolucja obszaru peri-urban i jego przestrzenna struktura jest wynikiem działania, z jednej strony sił sprawczych pochodzących od całego regionu metropolitalnego, z drugiej strony jest wynikiem działania sił sprawczych, rozproszonych, pochodzących od lokalnych aglomeracji i działających w skali sąsiedztwa, takich jak koszty zamiany przełączeń komunikacyjnych, lokalny dostęp do usług i ich jakość oraz obecność obszarów zielonych i ich wartości estetyczne. Wymienione wyżej, poprawiające jakość życia wartości zewnętrzne (będące wynikiem istnienia efektów zewnętrznych), mogą być w prosty sposób modelowane za pomocą funkcji lokalnej gęstości zamieszkania. Do tych wartości zewnętrznych włączyć można również zmienne takie jak: stopień zatłoczenia, kontakty społeczne, dostęp do dóbr publicznych, itp.

Zakłada się, że każdy agent jest w stanie kupić przylegającą część ziemi. Przez  $R(r)$  oznaczmy rynkową rentę ziemi (zależną liniowo od rynkowej ceny ziemi). Istotą modelu jest funkcja *bid rent* (funkcja renty położenia), którą definiuje się jako maksymalną wartość pieniężną, którą gotów jest zapłacić agent za dany obszar ziemi przy danej odległości od CBD, która to wartość zapewni mu utrzymanie pożądanego, stałego poziomu użyteczności.

## POSTAWIENIE ZADANIA

Zdefiniujmy automat komórkowy (CA).

I definicja formalna. Jeżeli: 1) przez  $\alpha$  oznaczymy regularną, uporządkowaną siatkę złożoną z jednakowych komórek  $c$  o budowie zależnej od rozmiaru przestrzeni i od kształtu pojedynczej komórki, 2) przez  $S$  - skończony zbiór stanów, jaki może przyjąć komórka  $c$ , 3) przez  $N$  - skończony zbiór sąsiadów, spełniający warunek  $\forall c \in N, \forall r \in \alpha \rightarrow r + c \in \alpha$ , 4) a funkcję przejścia definiującą reguły ewolucji automatu w kolejnych krokach oraz dynamikę tych przejść zapiszemy jako  $f: S^m \rightarrow S$ , to automat komórkowy

definiujemy jako czwórkę  $A \equiv (\alpha, S, N, f)$ . Pełny opis automatu komórkowego wymaga określenie warunków brzegowych i początkowych.

II definicja [wg Edwarda Fredkina, <http://www.digitalphilosophy.org/>].

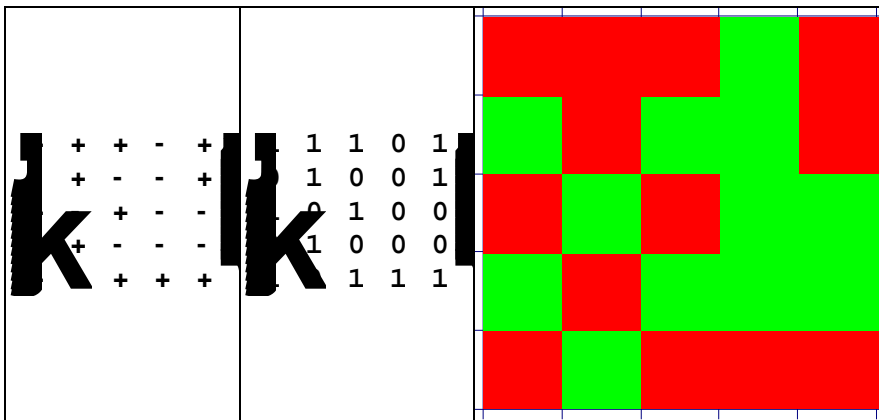
Podstawą jego definicji jest dwuwymiarowa kwadratowa siatka, w której każda komórka opisana jest przez wektor pozycji  $\vec{r} = (i, j)$ , gdzie  $i, j$  są indeksami kolumn i wierszy siatki. Stan każdej komórki w iteracji  $t$  jest opisywany przez  $\phi_i(\vec{r}, t)$  i może przyjmować wartości binarne 0 i 1. Na automat komórkowy składają się: 1) regularna siatka o  $d$ -wymiarowej przestrzeni, 2) ustanowienie początkowe  $\phi(\vec{r}, t) = \{\phi_1(\vec{r}, t), \phi_2(\vec{r}, t), \dots, \phi_m(\vec{r}, t)\}$  zmiennych boolowskich w każdym miejscu  $\vec{r}$  siatki, 3) reguła  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ , która ustala stan  $\phi(\vec{r}, t)$  w czasie  $\phi_j(\vec{r}, t + \tau) = R_j(\phi(\vec{r}, t), \phi(\vec{r} + \delta_1, t), \phi(\vec{r} + \delta_2, t), \dots, \phi(\vec{r} + \delta_q, t))$ , gdzie  $\vec{r} + \delta_q$  oznacza komórki należące do skończonego zbioru sąsiadów  $\vec{r}$ .

Zwykle pracujemy z dwu-wymiarowym automatem komórkowym, reprezentowanym przez prostokątny (w ogólności) obszar (Rys. 1).

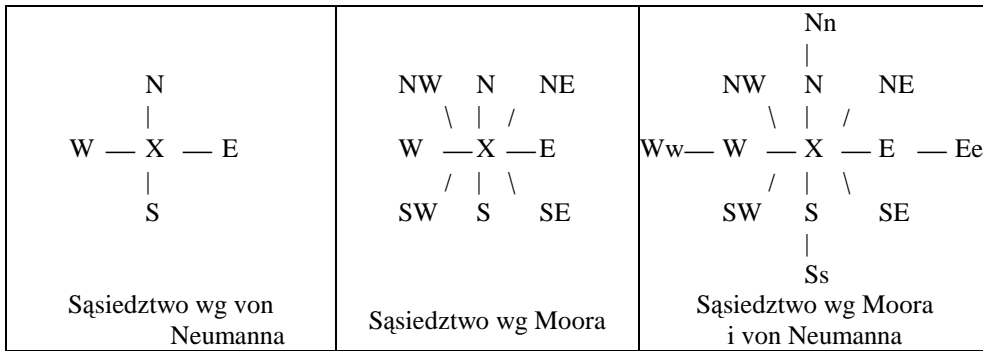
Najbardziej rozpowszechnione, ze względu na atrybut sąsiedztwa, są dwa rodzaje automatów komórkowych, von Neumanna i Moora, oraz rodzaj pośredni MvonN (Moora i von Neumanna) (Rys.1 i 2).

Automat komórkowy  $C_{i,j}^t$  (użytkowanie ziemi) charakteryzuje się sąsiedztwem innych CA i zmienia się w czasie  $t$ :

$$C_{ij}^t = f(C_{i,j}^{t-1}, C_{i-1,j}^{t-1}, C_{i+1,j}^{t-1}, C_{i,j-1}^{t-1}, C_{i,j+1}^{t-1}). \quad (1)$$



Rysunek 1. Przykłady automatów komórkowych wygenerowanych przez program MATHEMATICA (źródło: obliczenia własne)



Rysunek 2. Sąsiedztwa X w automatach komórkowych

W rzeczywistości zależy również od szeregu zmiennych  $Xn_{j,j}^t$  opisujących dynamikę zmian w automacie komórkowym i w jego otoczeniu:

$$C_{ij}^t = f(C_{i,j}^{t-1}, C_{i-1,j}^{t-1}, C_{i+1,j}^{t-1}, C_{i,j-1}^{t-1}, C_{i,j+1}^{t-1}, X1_{i,j}^{t-1}, \dots, Xn_{i,j}^{t-1}). \quad (2)$$

**Założenie 1.** Region jest reprezentowany przez dyskretną przestrzeń, w postaci siatki, ze skończoną ilością lokalizacji, z której każda posiada jedyny (wyłączny) tytuł własności.

Rozważmy siatkę posiadającą  $I$  kolumn i  $J$  wierszy, składającą się z  $G = I \times J$  komórek  $ij$  jednakowego kształtu i rozmiaru. Każda lokalizacja jest kwadratem, co jest bardzo wygodne w procesie symulacji i łatwo można zaadoptować ten typ prezentacji przestrzeni do danych rastrowych.

Każda lokalizacja jest charakteryzowana przez kolejny atrybut, rodzaj agenta posiadającego tytuł własności do tego minimalnego obszaru  $ij$ . Wyróżniamy tylko dwa typy agentów: rolnik ( $A$ ) i rezydent – właściciel rezydencji ( $H$ ). Stan komórki  $ij$  w czasie  $t$  zależy zarówno od rezydencji jak i od rolnictwa, głównie tych położonych najbliżej,  $C_{i,j}^t \in \{H, A\}$ . Miejsce podejmowania decyzji pokrywa się idealnie z typem użytkowania ziemi. Całkowita ilość agentów na danym obszarze jest równa  $G = H_G^T + A_G^T$ . To założenie powoduje, że modele CA są stosowane razem z modelami wielo-agentowymi.

**Założenie 2.** Bezwymiarowe CBD ma położenie  $(0, 0)$  w naszej siatce. CBD oferuje różne nie-rolnicze prace i zapewnia dostęp do dóbr konsumpcyjnych. Każda komórka  $ij$  jest ponadto charakteryzowana przez odległość euklidesową,  $d_{i,j}$ , od CBD, która jest odległością przełączaną (związaną z transportem i komunikacją).

**Założenie 3.** Obszar peri-urban jest systemem dynamicznym, w którym różne typy agentów podejmują decyzje dotyczące przyszłej lokalizacji w czasie  $t$  uwzględniając wiedzę na temat użytkowania ziemi w sąsiednich komórkach w czasie  $t-1$ . Poziom wartości zewnętrznych ułatwiających i poprawiających jakość

życia mieszkańców danego miejsca (dalej, efekty zewnętrzne) jest funkcją użytkowania ziemi w sąsiednich komórkach i jednocześnie funkcją odległości między tym miejscem a jego sąsiadami.

## MODEL

Wychodzimy z założenia, że podstawową informacją potrzebną do budowy modelu jest liczba rezydentów (właścicieli rezydencji) i ich konfiguracja w najbliższym sąsiedztwie rozważanej lokalizacji. Sąsiedztwem komórki  $ij$  jest zbiór komórek  $kl$ , który oznaczymy przez  $N_{i,j}$ . Każda komórka  $kl$  należąca do  $N_{i,j}$  charakteryzuje się odległością euklidesową  $x_{k,l}$  oddzielającą  $ij$  od  $kl$ , zwaną odległością ogniskową. Stopień sąsiedztwa oznaczymy przez  $\hat{x}$ , jest to maksymalna odległość ogniskowa w danym sąsiedztwie ( $x_{k,l} \leq \hat{x}$ ):

$$\hat{x} = \max_{k,l} x_{k,l}. \quad (3)$$

Sąsiedztwo  $N_{i,j}$  składa się z  $n$  komórek,  $n = n_{H_{i,j}} + n_{A_{i,j}}$ , gdzie  $n_{H_{i,j}}$  jest liczbą rezydentów a  $n_{A_{i,j}}$  jest liczbą rolników w danym  $N_{i,j}$ . Tym samym  $\hat{x}$  i  $n$  są zmiennymi egzogenicznymi i homogenicznymi w czasie i w przestrzeni.

## RÓWNOWAGA W DŁUGIM OKRESIE

Ciągła konfrontacja z rentą położenia (w rzeczywistości z rentami położenia) określa przynależność danej komórki  $C_{i,j}^t \in \{H, A\}$  do jednego z dwóch agentów (rolnika lub rezydenta) oraz determinuje rentę ziemi,  $R_{i,j}^t$ . Dodanie do modelu efektów zewnętrznych, stale branych pod uwagę przez rezydentów, prowadzi do wielu krzywych bid rent. W dalszych rozważaniach, opuścimy górny indeks  $t$ , gdyż zakładamy, że będziemy odnosić się do bieżącego czasu, chyba, że zapiszemy wyraźnie inną chwilę czasu.

Model skupia się na zachowaniach rezydenta. Stąd, rolnicza bid rent,  $\Phi_{i,j}$ , jest dana jako egzogeniczna zmienna zgodnie z liniową zależnością typu von Thüнена,  $\Phi_{i,j} = \Phi_{0,0} - b d_{i,j}$ . W pierwszym zbiorze symulacji, zakłada się, że rolnicza bid rent jest stała ( $\Phi_{i,j} = \Phi_{0,0}$ ). W następnym kroku, nachylenie  $b$  zmienia się egzogenicznie.

Rezydencjalną bid rent,  $\Psi_{i,j}$ , właścicieli rezydencji (wszystkie identyczne ze względu na preferencje i dochód) otrzymuje się z rozwiązania zadania maksymalizacji funkcji użyteczności pod warunkiem spełnienia ograniczeń wynikających z budżetu. Użyteczność rezydencjalna,  $U$ , jest funkcją koszyka dóbr konsumpcyjnych  $Z$  (niezwiązanych z przestrzenią), konsumpcji ziemi i efektów zewnętrznych. Lokalne sąsiedztwo dla danego lokalnego położenia jest źródłem zarówno dodatnich jak i ujemnych efektów zewnętrznych. Efekty zewnętrzne



dzieli się na dwie grupy: efekty zewnętrzne środowiskowe  $E_{i,j}$  (o małej gęstości), i efekty zewnętrzne społeczne,  $S_{i,j}$ , odzwierciedlające preferencje wobec społecznych usług i kontaktów, szkół, publicznego transportu, sieci usług, itp. Oba typy efektów zewnętrznych można włączyć do funkcji Cobb-Douglasa:

$$\text{Max}U(Z_{i,j}, E_{i,j}, S_{i,j}) = Z_{i,j} E_{i,j}^{\beta} S_{i,j}^{\gamma}. \quad (4)$$

Konsumpcja ziemi jest znormalizowana do wartości 1. Wielkości  $\beta$  i  $\gamma$  to odpowiednio elastyczność  $U$  względem  $E_{i,j}$  i  $S_{i,j}$ .  $\beta$  i  $\gamma$  przyjmują wartości dodatnie, możliwe są także dla nich przypadki przyjmowania wartości granicznych. W wielu symulacjach  $\gamma$  przyjmuje wartość 1.

Niech  $L_{i,j}$  oznacza całkowitą wielkość lokalnych efektów zewnętrznych zgromadzonych w sąsiedztwie  $ij$ , wówczas mamy:

$$L_{i,j} = E_{i,j}^{\beta} S_{i,j}^{\gamma} \quad (5)$$

Każdy rezydent przełącza się do CBD albo do pracy albo po zakupy albo po jedno i drugie. Otrzymuje stały dochód  $Y$ , z którego część musi być przeznaczona na koszty przełączeń,  $T(d_{i,j}) = ad_{i,j}$ , gdzie  $a$  jest kosztem przejazdu jednostki odległości  $a$ ,  $d_{i,j}$  jest odległością do CBD. Bilans budżetu rezydenta jest następujący ( $Z_{i,j}$  jest poziomem konsumpcji,  $R_{i,j}$  jest rentą z jednostki ziemi w lokalizacji  $ij$ ):

$$Y = ad_{i,j} + Z_{i,j} + R_{i,j} \quad (6)$$

i dalej, pośrednia funkcja użyteczności jest postaci:

$$V_{i,j} = (Y - ad_{i,j} - R_{i,j})L_{i,j}. \quad (7)$$

W długotrwałym stanie równowagi, wszyscy rezydenci cieszą się tym samym poziomem użyteczności,  $\bar{u}$ , odpowiadającym użyteczności otaczającego ich świata. Odpowiada to założeniom otwartego miasta. Funkcja bid rent jest wyrażona w maksymalnej wartości renty, którą gotowy jest zapłacić rezydent za mieszkanie w danej lokalizacji w celu osiągnięcia poziomu równowagi  $\bar{u}$  dla użyteczności. Zachodzi, więc:

$$\Psi_{i,j} = y - ad_{i,j} - \bar{u}L_{i,j}^{-1}. \quad (8)$$

Zakłada się, że efekty zewnętrzne sąsiedztwa,  $E_{i,j}$  i  $S_{i,j}$ , są funkcjami gęstości,  $\rho_{i,j}$ , rezydencji w sąsiedztwie  $N_{i,j}$ . Każdej komórce w sąsiedztwie  $N_{i,j}$  przyporządkujemy wagi  $w_{k,l}$ , zależne od odległości ogniskowej  $x_{k,l}$  i od stopnia sąsiedztwa,  $\hat{x}$ . Otrzymamy malejącą funkcję przy warunku  $0 < w_{k,l} \leq 1$ :

$$w_{k,l} = 1 - \left( \frac{x_{k,l} - 1}{\hat{x}} \right)^{\sigma}, \quad (9)$$

gdzie  $\sigma$  ma wartość dodatnią, efekt zanikanie znaczenia wagi maleje wypukle z odległością dla  $\sigma \in [0, 1]$  i liniowo dla  $\sigma = 1$ . Dla  $\sigma =$  ten efekt nie ma znaczenia.

Potencjalne lokalne interakcje, lub lokalna, ważona gęstość rezydencjalna wyraża się przez:

$$\rho_{i,j} = \frac{\sum_{k,l \in N_{i,j}} w_{k,l} H_{k,l}}{\sum_{k,l \in N_{i,j}} w_{k,l}}, \quad (10)$$

gdzie  $H_{k,l} = 1$  jeżeli  $C_{k,l} = H$  i  $H_{k,l} = 0$  w pozostałych przypadkach.

Wartości  $\rho_{i,j} \in [0, 1]$ .

Można teraz  $E_{i,j}$  i  $S_{i,j}$  zdefiniować jako funkcje  $\rho_{i,j}$ . Środowiskowe efekty zewnętrzne,  $E(\rho_{i,j})$ , z założenia maleją wraz z zwiększaniem się gęstości rezydencjalnej. W przestrzeni można zaobserwować proces utraty i defragmentacji obszarów zielonych (tworzenie się tzw „łat”) powodowany zwiększaniem się rezydencji w sąsiedztwie.  $E$  staje się lokalną siłą sprawczą rozpraszania. I przeciwnie,  $S(\rho_{i,j})$ , społeczne efekty zewnętrzne, wzrastają wraz ze wzrostem gęstości sąsiedztwa. Tym samym  $S$  staje się lokalną siłą sprawczą działającą na rzecz aglomeracji. Dodatkowi rezydenci pojawiający się w sąsiedztwie powoduje wzrost kontaktów osobistych, wzrost usług i wzrost obrotu różnymi rodzajami dóbr i towarów.

Zakładamy, że oba efekty zewnętrzne są funkcjami wykładniczymi:

$$E_{i,j} = e^{-(\rho_{i,j})^\Theta}, \quad S_{i,j} = e^{(\rho_{i,j})^\Phi}, \quad (11)$$

gdzie zarówno  $\Theta$  jak i  $\Phi$  mają wartości dodatnie. Przy tych założeniach otrzymujemy:

$$L_{i,j} = E_{i,j}^\beta S_{i,j}^\gamma = e^{(\gamma \rho_{i,j}^\Phi - \beta \rho_{i,j}^\Theta)}. \quad (12)$$

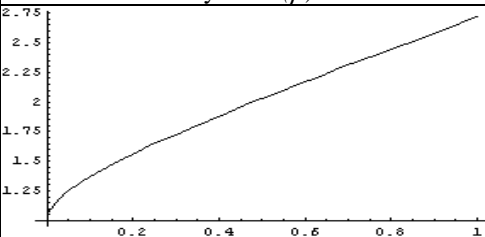
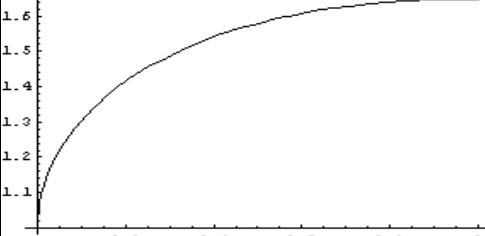
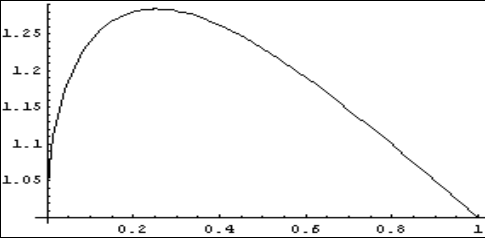
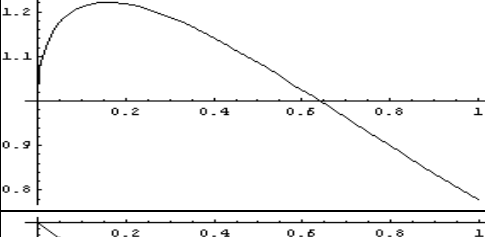
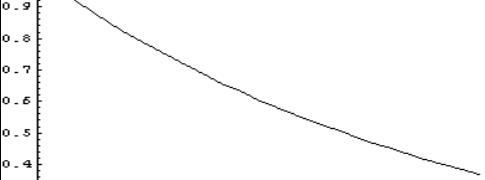
Dalej zakładamy, że każdy krańcowy wzrost gęstości lokalnej ma malejący wpływ na wielkość efektów zewnętrznych identyfikowanych przez rezydenta. Funkcja  $E(\rho)$  musi być, więc ściśle wypukła, zaś  $S(\rho)$  musi być ściśle wklęsła. Ze szczegółowych obliczeń wynika, że zmienność  $\rho$  w zakresie od 0 do 1 powoduje zmienność  $\Theta$  od 0 do 1 i zmienność  $\Phi$  od 0 do 0,5 (Tab. 1).

Posiadając już tak skonstruowane postaci funkcji można prześledzić zmienność całościowego efektu zewnętrznego  $L(\rho)$  (Tab. 1). Istnienie maksimum dla funkcji  $L(\rho)$  jest warunkowe. Maksimum istnieje dla warunku  $\Theta > \Phi$ , wówczas maksimum  $L(\rho)$  jest w punkcie:

$$\rho^* = \left( \frac{\Phi \gamma}{\Theta \beta} \right)^{1/(\Theta - \Phi)} \quad (13)$$

Dodatkowy warunek jest potrzebny, żeby wartość  $\rho^*$  zawierała się w przedziale  $[0, 1]$ , mianowicie musi zachodzić warunek  $\Theta \beta \geq \Phi \gamma$

Tabela 1. Prezentacja całkowitego efektu zewnętrznego i gęstość sąsiedztwa dla różnych preferencji rezydentów

Wartości zmiennych	Maksimum	$\rho^*$	Wykres $L(\rho)$
$\Theta = 1.00$ $\Phi = 0.50$ $\beta = 0.00$ $\gamma = 1.00$	nie istnieje $\Theta > \Phi$ $\Theta\beta \leq \Phi\gamma$	Nie istnieje	
$\Theta = 1.0$ $\Phi = 0.5$ $\beta = 0.50$ $\gamma = 1.00$	istnieje $\Theta > \Phi$ $\Theta\beta \geq \Phi\gamma$	$\rho^* = 1$	
$\Theta = 1.0$ $\Phi = 0.5$ $\beta = 1.00$ $\gamma = 1.00$	istnieje $\Theta > \Phi$ $\Theta\beta \geq \Phi\gamma$	$\rho^* = 0.25$	
$\Theta = 1.0$ $\Phi = 0.5$ $\beta = 1.25$ $\gamma = 1.00$	istnieje $\Theta > \Phi$ $\Theta\beta \geq \Phi\gamma$	$\rho^* = 0.16$	
$\Theta = 1.0$ $\Phi = 0.5$ $\beta = 1.00$ $\gamma = 0.00$	istnieje $\Theta > \Phi$ $\Theta\beta \geq \Phi\gamma$	$\rho^* = 0.00$	

Źródło: Obliczenia i wykresy autorka uzyskała stosując własne solvery w programie MATHEMATICA

Analizując wyniki przedstawione w tab.1 stwierdzamy, że niskie preferencje dla obszarów zielonych (mała wartość  $\beta$ ) powodują wysoką wartość parametru

gęstości sąsiedztwa. W tym przypadku, nawet dla zupełnie zurbanizowanego środowiska ( $\rho = 1$ ) rezydenci otrzymują profity wynikające z sąsiedztwa. Gdy stwierdzamy większe preferencje dla obszarów zielonych i wolnej przestrzeni (większa wartość  $\beta$ ) to obserwujemy szybsze osiągnięcie optymalnej gęstości sąsiedztwa i również szybsze zanikanie całkowitych efektów zewnętrznych ( $L$ ). Natomiast, ujemne efekty zewnętrzne ( $L(\rho) < 1$ ) są generowane, gdy  $\beta > \gamma$ , tj., gdy preferencje dla obszarów zielonych są wysokie i gdy sąsiedztwa mają wysoką gęstość rezydencjalną. Gdy  $\beta = \gamma$ , rezydenci nie mają zdecydowanego wyboru (postawa indyferentna) między w pełni zurbanizowanym sąsiedztwem ( $\rho = 1$ ) a zupełnie pustym sąsiedztwem ( $\rho = 0$ ), ale zwykle preferują pośrednie gęstości. Zmniejszanie wartości  $\Theta$  podkreśla cechę wypukłości (na wykresie) efektów zewnętrznych związanych z otwartą przestrzenią i kieruje więcej uwagi na znaczenie bardzo małej gęstości sąsiedztwa. Podobnie, zmniejszanie  $\Phi$  powoduje wklęsłość (na wykresie) społecznych efektów zewnętrznych i także kieruje uwagę na bardzo małe gęstości sąsiedztwa. W obu przypadkach optymalna gęstość może być mniejsza.

Rezydencjalną funkcję bid rent można teraz przedstawić w postaci funkcji ważonych gęstości sąsiedztwa,  $\rho_{i,j}$ :

$$\Psi_{i,j} = y - ad_{i,j} - \bar{u}e^{(\beta\rho_{i,j}^\ominus - \gamma\rho_{i,j}^\oplus)}. \quad (14)$$

Analizą tej funkcji autorka zajmie się w następnych publikacjach.

## PODSUMOWANIE

Autorka przedstawia pierwsze wyniki badań nad modelowaniem obszarów peri-urban. W artykule skoncentrowała się na wprowadzenie do metodyki badań, wynikających z uzgodnień wewnątrz zespołu badawczego, włączając do modeli automatów komórkowych problem działania agentów i ich preferencji. Pierwsze wyniki badań są obiecujące. W następnym etapie badania autorki będą skupiać się na problematyce wzrostu ekonomicznego na obszarach peri-urban, a więc na tematyce, którą autorka zajmowała się do tej pory.

## LITERATURA

- Alonso W. (1964) *Location and Land Use: toward a general theory of land rent*, Harvard University Press, Cambridge.
- Fredkin E., <http://www.digitalphilosophy.org/>.
- Jehin J.B. (1998) La périurbanisation et la rurbanisation à travers la consommation d'espace, *Bulletin de la Soci'et'e G'eographique de Li'ege*, 34, str. 45–52.
- Mills E.S. (1967) An aggregative model of resource allocation in a metropolitan area, *American Economic Review*, 57, str. 197–210.
- Muth R.F. (1969) *Cities and Housing*, University of Chicago Press, Chicago.

von Thünen J.H. (1875/1966) *Thünen's isolated state*. Ed. Peter Hall. Oxford: Pergamon Press. Original edition, *Der Isolierte Staat in Beziehung der Landwirtschaft und Nationalökonomie*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1826.

### **Modelling of the peri-urban areas application of the cellular automata and agent-based approach**

**Summary:** In this paper author described methodology of ongoing research projects. The first project is financed by German Ministry of Education and Research, entitled "Integrated catchment management and risk-based resource allocation in urban and peri-urban areas". The second is an inner grant in Agricultural University in Szczecin, No BW/HE/03/03. The study area is a peri-urban area located at GSR (The Great Stuttgart Region). A rapidly growing changes resulting from many different driving forces can be observed in this region. The main driving forces were identified as inner and outer dynamics, changing functions of the urban, decreasing the significance of the city centers. Author introduced cellular automata models and agent-based approach. Cellular automata types, neighborhood, cellular automata states, bid rent, and externalities were defined. The equation for total externalities was drawn out.

**Key words:** peri-urban areas, cellular automata, bid rent, neighborhood, agents.

Joanna Olbryś,  
Wyższa Szkoła Ekonomiczna w Białymstoku,  
Politechnika Białostocka,  
e-mail: joanna.olbrys@wse.edu.pl

## WŁASNOŚCI ESTYMATORÓW MIAR RYZYKA EXPECTED SHORTFALL (ES) ORAZ VALUE-AT-RISK (VAR)

**Streszczenie:** Koncepcja wartości zagrożonej Value-at-Risk pojawiła się w 1994r. Obecnie VaR jest najbardziej popularną wśród praktyków miarą ryzyka, zalecaną np. przez Basel Committee on Banking Supervision. Niestety, nie jest miarą subaddytywną, co może prowadzić do zaburzeń w ocenie ryzyka portfeli zdywersyfikowanych. Jako alternatywę w stosunku do VaR można stosować spójną miarę ryzyka Expected Shortfall (ES). Celem artykułu jest zaprezentowanie własności estymatorów wartości zagrożonej Value-at-Risk ( $VaR_\alpha$ ) i miary Expected Shortfall ( $ES_\alpha$ ) oraz wpływu tych własności na wielkość pomiaru ryzyka na przykładzie jednostek wybranych otwartych funduszy inwestycyjnych na rynku polskim.

**Słowa kluczowe:** estymator miary ryzyka, Value-at-Risk, Expected Shortfall, Otwarte Fundusze Inwestycyjne

### WARTOŚĆ ZAGROŻONA VALUE-AT-RISK ORAZ MIARA RYZYKA EXPECTED SHORTFALL

**Definicja wartości zagrożonej  $VaR_\alpha(X)$**  (niezależnie od postaci rozkładu zmiennej losowej  $X$ ) (Acerbi, Tasche 2002):

$$VaR_\alpha(X) = q_{1-\alpha}^-(X) = \inf \{x : P(X \leq x) \geq 1 - \alpha\} \quad (1)$$

czyli wartość zagrożona  $VaR_\alpha(X)$  dla przyjętego poziomu istotności  $\alpha$  jest zdefiniowana jako dolny  $(1-\alpha)$  - kwantyl  $q_{1-\alpha}^-(X)$  rozkładu strata/zysk, natomiast zmienna  $X$ , określona jako strata, przyjmuje następujące wartości:

$$\begin{cases} \text{strata} \Rightarrow X > 0 \\ \text{zysk} \Rightarrow X < 0 \end{cases}$$

**Wartość zagrożona  $VaR_\alpha$  w praktyce** (przy założeniu logarytmiczno – normalnego rozkładu stóp zwrotu) (Jackson, Staunton 2004):

$$VaR_\alpha = V_0 \cdot u_\alpha \cdot \sigma \quad (2)$$

gdzie:

$V_0$  - wartość pozycji narażonej na ryzyko,

$u_\alpha$  - wartość krytyczna, odczytana z tablicy rozkładu normalnego dla przyjętego poziomu istotności  $\alpha$  (np.  $\alpha = 0,05$ ,  $u_\alpha = 1,65$ ),

$\sigma$  - odchylenie standardowe (*volatility*) dziennych logarytmicznych stóp zwrotu instrumentu finansowego.

Dla danego horyzontu czasowego i poziomu prawdopodobieństwa  $\alpha$ , wartość zagrożona  $VaR_\alpha$  jest wartością krytyczną rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu. Jest to poziom straty, który może zostać przekroczony z prawdopodobieństwem co najwyżej  $\alpha$  (lub nie zostanie przekroczony z prawdopodobieństwem co najmniej  $1 - \alpha$ ). W porównaniu ze zwykłymi stopami zwrotu, logarytmiczne stopy zwrotu charakteryzują się większą symetrią (Jackson, Staunton 2004). Duże, gwałtowne zmiany logarytmicznych stóp zwrotu są bardzo mało prawdopodobne. Decydując, poprzez wybór poziomu istotności  $\alpha$  (np.  $\alpha = 0,05$ ), jak małe jest to prawdopodobieństwo, decydujemy jakie wielkości strat są praktycznie niemożliwe oraz ile kapitału należy utrzymać na ich ewentualne pokrycie.

Zastosowanie metody praktycznej (wzór (2)) na polskim rynku walutowym (Olbryś 2005) potwierdziło efekt niewielkiego zaniżania wartości ryzyka w przypadku wyznaczania miary  $VaR_\alpha$ , w stosunku do pomiarów uzyskanych za pomocą estymatora przedstawionego w kolejnym rozdziale (wzór (4)). Jednocześnie należy stwierdzić, że zwiększanie liczności próby prowadzi do zbliżania się wartości miary  $VaR_\alpha$ , oszacowanych na podstawie wzorów (2) oraz (4).

**Definicja miary ryzyka**  $ES_\alpha(X)$  (niezależnie od postaci rozkładu zmiennej losowej  $X$ ) (Yamai, Yoshihara 2002b):

Niech  $X$  będzie zmienną losową określoną jako strata z danego portfela oraz niech  $VaR_\alpha(X)$  będzie wartością zagrożoną tego portfela dla poziomu ufności  $(1 - \alpha)$ . Miarę ryzyka  $ES_\alpha(X)$  definiujemy jako „średnią stratę w najgorszych  $\alpha 100\%$  przypadkach” (Acerbi, Tasche 2002), gdzie  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$ES_\alpha(X) = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)] \quad (3)$$

Z definicji wynika, że  $ES_\alpha(X)$  jest warunkową wartością oczekiwaną straty, o ile strata ta przekroczy poziom  $VaR_\alpha(X)$ .

## ESTYMATORY MIAR VALUE-AT-RISK ORAZ EXPECTED SHORTFALL

Przypuśćmy, że ciąg  $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(n\alpha+1)}, X_{(n\alpha)}, \dots, X_{(2)}, X_{(1)}$  tworzą empiryczne wartości strat ( $X_i > 0$ ), uporządkowane w sposób rosnący. Wtedy, dla próby statystycznej o dużej liczności  $n$  estymator wartości zagrożonej

$VaR_\alpha(X)$ , zdefiniowanej jako dolny  $(1-\alpha)$  - kwantyl rozkładu strata/zysk dla przyjętego poziomu istotności  $\alpha$ , dany jest wzorem (Yamai, Yoshida 2002b):

$$\text{estymator } VaR_\alpha(X) = X_{(n\alpha+1)} \quad (4)$$

Przypomnijmy, że zgodnie z definicją  $VaR_\alpha(X)$  przyjętą w tej pracy (wzór (1)):

$$\begin{cases} \text{strata} \Rightarrow X_i > 0 \\ \text{zysk} \Rightarrow X_i < 0 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Jeśli  $(n\alpha + 1) \notin Z$ , gdzie  $Z$  jest zbiorem liczb całkowitych, to:

$$\text{estymator } VaR_\alpha(X) = X_{[n\alpha+1]} \quad (5)$$

gdzie  $[n\alpha + 1] \in Z$  jest częścią całkowitą liczby  $(n\alpha + 1) \notin Z$ .

Analogicznie, zgodnie z definicją miary ryzyka  $ES_\alpha(X)$  jako warunkowej wartości oczekiwanej straty  $X$ , o ile strata ta przekroczy poziom  $VaR_\alpha(X)$  (wzór (3)), w przypadku próby o dużej licznosci  $n$  estymator tej miary ma postać (Yamai, Yoshida 2002b):

$$\text{estymator } ES_\alpha(X) = \frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(n\alpha+1)}}{n\alpha + 1} \quad (6)$$

Podobnie, jak w przypadku estymatora wartości zagrożonej, gdy  $(n\alpha + 1) \notin Z$ , to:

$$\text{estymator } ES_\alpha(X) = \frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{[n\alpha+1]}}{[n\alpha + 1]} \quad (7)$$

## WŁASNOŚCI ESTYMATORÓW MIAR VALUE-AT-RISK ORAZ EXPECTED SHORTFALL

Najbardziej podstawowe, pożądane własności wszelkich estymatorów to: nieobciążoność, zgodność, efektywność oraz dostateczność (wystarczalność) (Jóźwiak, Podgórski 1998).

Estymator wartości zagrożonej  $VaR_\alpha(X)$ , określony jako odpowiedni element próby uporządkowanej w sposób rosnący i dany wzorem (5), jest estymatorem nieobciążonym wartości oczekiwanej straty. Własność nieobciążoności oznacza, że przy wielokrotnym losowaniu próby średnia z wartości przyjmowanych przez estymator nieobciążony równa jest wartości szacowanego parametru. W wyniku jednej próby ocena parametru różni się oczywiście od jego wartości, ale stosowanie estymatora nieobciążonego gwarantuje, że oceny parametru nie są obciążone błędem systematycznym.



Estymator miary ryzyka  $ES_\alpha(X)$ , określony jako średnia arytmetyczna i dany wzorem (7), jest estymatorem nieobciążonym oraz najefektywniejszym wartości oczekiwanej straty w rozkładzie logarymiczno – normalnym (czyli w przypadku logarymicznych stóp zwrotu). Wynika to z faktu, że średnia arytmetyczna jest lepszym (o mniejszej wariancji  $D^2$ ) estymatorem oczekiwanej straty, niż dowolna i-ta zmienna z próby:

$$D^2(\text{estymator } ES_\alpha(X)) = D^2\left(\frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{[n\alpha+1]}}{[n\alpha+1]}\right) = \frac{D^2(\text{estymator } VaR_\alpha(X))}{[n\alpha+1]} \quad (8)$$

$$D^2(\text{estymator } ES_\alpha(X)) < D^2(\text{estymator } VaR_\alpha(X))$$

Estymator miary ryzyka  $ES_\alpha(X)$  jest również, jako średnia arytmetyczna, zgodnym estymatorem wartości oczekiwanej straty. Własność ta oznacza, że dla dostatecznie dużych licznosci próby estymator przyjmuje z dużym prawdopodobieństwem wartości bliskie estymowanemu parametrowi (Gajek, Kałuszka 2000).

Ostatnią z podstawowych własności estymatorów jest dostateczność (wystarczalność). Estymator danego parametru jest dostateczny, jeżeli zawiera wszystkie informacje, jakie można uzyskać na temat tego parametru na podstawie próby statystycznej i żaden inny estymator nie umożliwi otrzymania dodatkowych informacji o szacowanym parametrze. Estymator dostateczny nie zawsze istnieje. Porównując estymatory dane wzorami (5) oraz (7) możemy stwierdzić, że *estymator*  $ES_\alpha(X)$ , jako średnia arytmetyczna, dostarcza więcej informacji na temat oczekiwanej straty, niż *estymator*  $VaR_\alpha(X)$ , będący jedynie określoną wartością zmiennej strata/zysk z próby statystycznej.

Podsumowując, należy podkreślić, że ze względu na własności estymatora miary  $ES_\alpha(X)$ , daje on lepsze, bardziej dokładne przybliżenie wartości oczekiwanej straty.

## PRZYKŁADY SZACOWANIA RYZYKA JEDNOSTEK WYBRANYCH OTWARTYCH FUNDUSZY INWESTYCYJNYCH ZA POMOCĄ ESTYMATORÓW MIAR VALUE-AT-RISK ORAZ EXPECTED SHORTFALL

We wszystkich prezentowanych przykładach otrzymane wartości miar  $VaR_\alpha$  oraz  $ES_\alpha$  interpretujemy jako poziom straty, który może zostać przekroczony odpowiednio z prawdopodobieństwem  $\alpha = 0,01$  lub  $\alpha = 0,05$ . Utrzymując pozycję długą (zakup) 1 jednostki danego otwartego funduszu inwestycyjnego możemy spodziewać się, że strata poniesiona w ciągu jednego dnia nie przekroczy poziomu  $VaR_\alpha$  lub  $ES_\alpha$  z prawdopodobieństwem odpowiednio 0,99 lub 0,95.

## Przykład 1

Przykład ten dotyczy szacowania ryzyka oraz analizy wyników w przypadku Otwartych Funduszy Inwestycyjnych akcji. Wybrane zostały cztery spośród najlepszych, ze względu na osiągniętą stopę zwrotu, funduszy z okresu obejmującego próbę statystyczną, czyli od 2 stycznia 2004r. do 30 marca 2006r.

Tabela 1 Wybrane OFI akcji uporządkowane malejąco według stopy zwrotu

Nazwa funduszu inwestycyjnego	Stopa zwrotu (bez prowizji i podatku)	Stopa zwrotu (po uwzględnieniu prowizji i podatku)
ARKA BZ WBK Akcji FIO	124,86%	95,67%
BPH FIO Akcji	84,40%	63,88%
DWS Polska FIO Akcji Plus	80,89%	58,20%
Skarbiec-Akcja FIO Akcji	80,80%	57,39%

Źródło: [www.money.pl](http://www.money.pl)

Pomiar jednodniowego ryzyka dłuższej pozycji 1 jednostki uczestnictwa każdego z funduszy dokonany został na podstawie próby statystycznej o licznosci  $n = 570$  dziennych obserwacji (dane z okresu: I kwartał 2004r. - I kwartał 2006r., czyli 02.01.2004 – 30.03.2006). Wartości miar  $VaR_{\alpha}$  oraz  $ES_{\alpha}$  podane są w PLN. Obliczenia wykonano dla poziomów istotności  $\alpha = 0,01$  oraz  $\alpha = 0,05$ .

Tabela 2 Wartości estymatorów miar Value-at-Risk oraz Expected Shortfall w przypadku wybranych OFI akcji

Nazwa funduszu inwestycyjnego	Wartość jednostki uczestnictwa w PLN (dn. 30 marca 2006)	Estymator $VaR_{0,01}$ wzór (2.2)	<b>Estymator <math>ES_{0,01}</math> wzór (2.4)</b>	Estymator $VaR_{0,05}$ wzór (2.2)	Estymator $ES_{0,05}$ wzór (2.4)
ARKA BZ WBK Akcji FIO	35,01	0,51	<b>0,64</b>	0,32	0,45
BPH FIO Akcji	297,57	4,81	<b>5,99</b>	2,51	3,79
DWS Polska FIO Akcji Plus	197,97	3,21	<b>3,86</b>	1,69	2,52
Skarbiec-Akcja FIO Akcji	253,90	4,05	<b>4,81</b>	2,17	3,24

Źródło: opracowanie własne

## Przykład 2

Kolejny przykład dotyczy estymacji ryzyka oraz analizy wyników w przypadku Otwartych Funduszy Inwestycyjnych papierów dłużnych. Wybrane

zostały cztery najlepsze, ze względu na osiągniętą stopę zwrotu, fundusze z okresu obejmującego próbę statystyczną, czyli od 2 stycznia 2004r. do 30 marca 2006r.

Tabela 3 Wybrane OFI papierów dłużnych uporządkowane malejąco według stopy zwrotu po uwzględnieniu prowizji i podatku

Nazwa funduszu inwestycyjnego	Stopa zwrotu (bez prowizji i podatku)	Stopa zwrotu (po uwzględnieniu prowizji i podatku)
DWS Polska FIO Konwergencji	20,42%	16,05%
ARKA BZ WBK Obligacji FIO	16,71%	13,54%
PIONEER Obligacji Skarbowych FIO	18,41%	13,23%
KBC Obligacyjny FIO	16,73%	12,61%

Źródło: [www.money.pl](http://www.money.pl)

Pomiar jednodniowego ryzyka pozycji długiej 1 jednostki uczestnictwa każdego z funduszy dokonany został na podstawie próby statystycznej o licznosci  $n = 570$  dziennych obserwacji (dane z okresu: I kwartał 2004r. - I kwartał 2006r., czyli 02.01.2004 – 30.03.2006). Wartości miar  $VaR_{\alpha}$  oraz  $ES_{\alpha}$  podane są w PLN. Obliczenia zostały wykonane dla poziomów istotności  $\alpha = 0,01$  oraz  $\alpha = 0,05$ .

Tabela 4 Wartości estymatorów miar Value-at-Risk oraz Expected Shortfall w przypadku wybranych OFI papierów dłużnych

Nazwa funduszu inwestycyjnego	Wartość jednostki uczestnictwa w PLN (dn. 30 marca 2006)	Estymator $VaR_{0,01}$ wzór (2.2)	Estymator $ES_{0,01}$ wzór (2.4)	Estymator $VaR_{0,05}$ wzór (2.2)	Estymator $ES_{0,05}$ wzór (2.4)
DWS Polska FIO Konwergencji	128,52	0,64	<b>0,95</b>	0,39	0,56
ARKA BZ WBK Obligacji FIO	12,64	0,06	<b>0,09</b>	0,03	0,05
PIONEER Obligacji Skarbowych FIO	11,90	0,03	<b>0,05</b>	0,02	0,03
KBC Obligacyjny FIO	125,48	0,43	<b>0,51</b>	0,25	0,36

Źródło: opracowanie własne

Zaprezentowane wyniki szacowania ryzyka jednodniowej długiej pozycji jednostki wybranego funduszu inwestycyjnego za pomocą estymatorów miar

$VaR_\alpha$  oraz  $ES_\alpha$  dostarczają informacji, ile kapitału należy utrzymać na pokrycie ewentualnej straty, która może mieć miejsce raz na 100 dni (dla  $\alpha=0,01$ ) lub raz na 20 dni (w przypadku  $\alpha=0,05$ ). Otrzymane oszacowania estymatorów obu miar dla poszczególnych funduszy są bardzo zróżnicowane, ponieważ zależą od wartości jednostki uczestnictwa danego funduszu. O ile na przykład wartości estymatora  $ES_{0,01}$  w grupie funduszy akcyjnych (Tabela 2) wahają się od 0,64 PLN (ARKA Akcji) do 5,99 PLN (BPH Akcji), to już wartości procentowe oczekiwanych strat są bardzo zbliżone. W przypadku OFI akcji (Tabela 2) maksymalne wartości estymatora wartości zagrożonej, czyli  $ES_{0,01}$  stanowią od ok. 1,8% (ARKA Akcji) do ok. 2,0% (BPH Akcji) wartości jednostki uczestnictwa danego funduszu (przeciętnie ok. 1,9% w tej grupie funduszy). Natomiast w grupie OFI papierów dłużnych (Tabela 4) stosunek maksymalnej wartości narażonej na ryzyko, mierzonej estymatorem  $ES_{0,01}$ , do wartości jednostki uczestnictwa odpowiedniego funduszu jest dużo niższy i wynosi od ok. 0,4% (PIONEER Obligacji Skarbowych i KBC Obligacyjny) do ok. 0,7% (DWS Konwergencji i ARKA Obligacji). Średnio w grupie funduszy obligacyjnych stosunek ten jest równy ok. 0,55%. Oznacza to, że przeciętnie wartość zagrożona stanowi ok. 1,9% wartości jednostki uczestnictwa funduszu akcji oraz, odpowiednio ok. 0,55% wartości jednostki uczestnictwa funduszu papierów dłużnych. Jest to interesujące spostrzeżenie, które może znacznie ułatwić inwestorowi ocenę ryzyka zajętej pozycji, o ile dokona estymacji miary  $ES_{0,01}$  dla wszystkich dostępnych na rynku funduszy wybranego typu i ustali przeciętny procentowy udział wartości estymatora w wartości jednostki uczestnictwa funduszu. Jak pokazują przedstawione przykłady, odchylenia udziałów procentowych od wartości średniej w przypadku wybranych funduszy są minimalne.

Przykłady potwierdzają większą restrykcyjność miary  $ES_\alpha$  w stosunku do wartości zagrożonej  $VaR_\alpha$ , co ujawnia się w wyższych wartościach estymatora  $ES_\alpha$  przy tym samym poziomie prawdopodobieństwa  $\alpha$ , dla tego samego funduszu i próby statystycznej z tego samego okresu. Oznacza to, że stosowanie miary  $ES_\alpha$  wymusza utrzymanie większego kapitału na pokrycie ewentualnych strat, co może wydawać się dość dużym ograniczeniem. Należy jednak pamiętać, że estymator  $ES_\alpha(X)$  ma lepsze własności, niż estymator  $VaR_\alpha(X)$ , zatem daje lepsze oszacowanie wartości oczekiwanej straty.

Przedstawione obliczenia pozwalają również zaobserwować własność monotoniczności obu miar ze względu na poziom prawdopodobieństwa  $\alpha$ . Wartości estymatorów  $VaR_{0,01}$  oraz  $ES_{0,01}$  są wyższe, niż wartości  $VaR_{0,05}$

i  $ES_{0,05}$  odpowiednio, niezależnie od rodzaju funduszu. Wartości estymatora  $ES_{0,01}$  zawsze są maksymalne (wartości wyróżnione w tabelach 2 oraz 4).

## PODSUMOWANIE

Podsumowując należy stwierdzić, że przykłady empiryczne, uzyskane z wykorzystaniem estymatorów miar  $VaR_\alpha$  oraz  $ES_\alpha$ , potwierdziły znane z literatury przedmiotu własności obu miar (Olbryś 2005). Ważną własnością miar  $VaR_\alpha$  oraz  $ES_\alpha$  jest ich monotoniczność ze względu na poziom prawdopodobieństwa  $\alpha$  (Arcebi, Tasche 2002). Im niższa jest wartość  $\alpha$ , tym większa jest wartość miary ryzyka danego portfela. Zarządzający portfelem decyduje o wyborze wartości współczynnika  $\alpha$  i w zależności od tego szacuje ryzyko portfela.

Miara  $ES_\alpha$ , pomimo zalet wynikających z własności spójności, posiada też słabe strony (Yamai, Yoshida 2002a). Zdefiniowana jako wartość oczekiwana strat przewyższających poziom  $VaR_\alpha$ , jest trudna do testowania wstecznego. Testy wsteczne powinny porównywać wartość średnią faktycznie zrealizowanych strat przekraczających poziom  $VaR_\alpha$ , z uzyskanym estymatorem miary  $ES_\alpha$ . Wymaga to dużej liczby danych statystycznych, ponieważ straty przekraczające wartość  $VaR_\alpha$  występują rzadko.

Błąd estymacji wartości zagrożonej  $VaR_\alpha$ , oszacowanej na podstawie tej samej próby statystycznej z reguły jest mniejszy, niż błąd estymacji miary  $ES_\alpha$  (Yamai, Yoshida 2002b). Oznacza to, że uzyskanie zbliżonej dokładności estymacji wymaga, w przypadku miary  $ES_\alpha$ , większej liczby danych.

Poza tym, w przeciwieństwie do wartości zagrożonej  $VaR_\alpha$ , nie jest możliwe, poprzez wybór odpowiedniego poziomu prawdopodobieństwa  $\alpha$ , „dopasowanie” miary  $ES_\alpha$  do indywidualnych potrzeb monitorowania ryzyka danej instytucji finansowej. Jest to jedna z głównych przyczyn nieobecności miary  $ES_\alpha$  wśród narzędzi pomiaru ryzyka stosowanych powszechnie przez praktyków.

## LITERATURA

- Acerbi C., Tasche D. (2002) On the coherence of Expected Shortfall, In: Szegö G. (Ed.) „Beyond VaR“ (special issue), Journal of Banking & Finance 26 (July)
- Gajek L., Kałużka M. (2000) Wnioskowanie statystyczne, WNT, Warszawa
- Jackson M., Staunton M. (2004) Zaawansowane modele finansowe z wykorzystaniem Excela i VBA, Wydawnictwo Helion, Gliwice
- Jóźwiak J., Podgórski J. (1998) Statystyka od podstaw, PWE, Warszawa

Olbryś J. (2005) Estymatory miar Expected Shortfall i Value-at-Risk: przykłady zastosowania do pomiaru ryzyka walutowego, Inwestycje finansowe i ubezpieczenia. Tendencje światowe a rynek polski. Prace naukowe AE im. O.Langego we Wrocławiu, Nr 1088, 65-72

Tasche D. (2002) Expected Shortfall and beyond, Journal of Banking & Finance 26, 1519-1533

Yamai Y., Yoshida T. (2002a) On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall, Monetary and Economic Studies, January, 57-85

Yamai Y., Yoshida T. (2002b) Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition and Optimization, Monetary and Economic Studies, January, 87-121

[www.kpwig.gov.pl](http://www.kpwig.gov.pl)

[www.money.pl](http://www.money.pl)

Strony internetowe wybranych Towarzystw Funduszy Inwestycyjnych:

[www.wbkaib.pl](http://www.wbkaib.pl)

[www.dws.com.pl](http://www.dws.com.pl)

[www.skarbiec.com.pl](http://www.skarbiec.com.pl)

[www.bph.pl](http://www.bph.pl)

[www.kbctfi.pl](http://www.kbctfi.pl)

[www.pioneer.com.pl](http://www.pioneer.com.pl)

### **Properties of estimators of risk measures Expected Shortfall (ES) and Value-at-Risk (VaR)**

**Summary:** Concept of Value-at-Risk appears in 1994. Nowadays VaR is the most popular risk measure. Unfortunately, it fails to reward diversification, as it is not subadditive. In the search for a suitable alternative to VaR, Expected Shortfall (ES) has been characterized as the smallest coherent risk measure to dominate VaR. The aim of this paper is a presentation of the Expected Shortfall and Value-at-Risk estimators properties and an application of ES and VaR estimators to risk estimate examples on the Polish Open-end Investment Funds market. The paper also offers a comparison of ES and VaR estimators as the risk measures.

**Key words:** Risk Measure Estimator, Value-at-Risk, Expected Shortfall, Open-end Investment Funds

Agnieszka Orwat  
Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: agaorwat@poczta.onet.pl, aorwat@ux2.math.us.edu.pl

## **PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA METODY ODPORNEJ W MODELOWANIU FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH**

**Streszczenie:** Założenia, na których opierają się parametryczne metody estymacji dotyczące normalności rozkładu populacji oraz niezależności zmiennych, często nie są spełnione w przypadku danych finansowych. Dlatego istotną kwestią jest stosowanie metod estymacji odpornej (*robust estimation*) na te założenia, a tym samym na jakość obserwacji.

Celem pracy jest implementacja metody odpornej do modelowania szeregu czasowego wartości indeksu giełdowego WIG20 o piętnastominutowej częstotliwości notowań w dniu 13.02.2006. Do szacowania parametrów strukturalnych modelu zastosowano estymatory odporne Welscha.

**Słowa kluczowe:** obserwacje odstające, obserwacje nietypowe, obserwacje wpływowe, estymacja odporna, estymatory Welscha.

### **WSTĘP**

Założenia, na których opierają się parametryczne metody estymacji, dotyczące normalności rozkładu populacji oraz niezależności zmiennych, często nie są spełnione w przypadku danych finansowych. Dlatego istotną kwestią jest stosowanie metod estymacji odpornej (*robust estimation*) na te założenia, a tym samym na jakość obserwacji.

Čzęsto w zbiorze danych można wyróżnić wartości wyraźnie różniące się pewnymi cechami od pozostałych, tzw. obserwacje odstające. Występowanie takich wartości może być zarówno wynikiem błędnych pomiarów jak również pochodzenia z innej populacji. Wpływ obserwacji odstających na wyniki szacowania parametrów klasyczną metodą najmniejszych kwadratów (KMNK) jest istotny.

Wykrywanie obserwacji odstających oraz zapobieganie ich wpływowi poprzez stosowanie metod estymacji odpornej stanowi ważny problem analizy statystyczno-ekonometrycznej. Znaczna grupa metod odpornych polega na odrzuceniu obserwacji uważanych za nietypowe, a następnie na estymowaniu parametrów na podstawie pozostałych obserwacji. Usunięcie obserwacji odstającej w przypadku trendu oznacza zaburzenie kolejności czasowej. Dlatego, w celu szacowania parametrów modelu szeregu czasowego zawierającego obserwacje odstające, zastosowana zostanie metoda odporna, oparta na przyporządkowywaniu tym obserwacjom wag zaproponowanych przez Welscha. Konsekwencją takiego

podejścia jest zastosowanie uogólnionej metody najmniejszych kwadratów (UMNK).

## DIAGNOSTYKA TYPÓW OBSERWACJI

Rozważmy ogólny model postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.1)$$

gdzie:  $\mathbf{y}$  jest  $n$  wymiarowym wektorem losowym, którego wartości są niezależnymi obserwacjami zmiennej objaśnianej,  $\mathbf{X}$  jest  $n \times (k+1)$  wymiarową macierzą obserwacji będących wartościami  $k$  niezależnych zmiennych objaśniających modelu,  $\boldsymbol{\beta}$  jest  $(k+1)$  wymiarowym wektorem nieznanych parametrów strukturalnych modelu.

Zakłada się, że składnik losowy  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ma  $n$ -wymiarowy rozkład normalny z wartością oczekiwaną  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$  oraz macierzą kowariancji  $\Sigma$  postaci:  $\Sigma = Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ , gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową o wymiarach  $n \times n$ .

Wyniki zastosowania określonych metod estymacji modelu (1.1) w istotny sposób zależą od jakości danych. Na  $i$ -tą daną  $z_i$  składają się w tym przypadku obserwacje będące wartościami  $k$  zmiennych objaśniających oraz zmiennej objaśnianej  $\mathbf{y}$ , tzn:

$$z_i = [x_{i1}, \dots, x_{ik}, y_i], \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

Obserwacje  $z_i$  mogą różnić się zarówno wpływem na wartość ocen estymowanych parametrów, jak również położeniem w przestrzeni  $R^{k+1}$ . W konsekwencji, w zbiorze danych mogą występować tzw. obserwacje odstające, wyraźnie różniące się pewnymi cechami od pozostałych. Zbiór obserwacji, utworzony po usunięciu obserwacji odstającej nazywany jest rdzeniem.

Na obserwacje odstające składają się dwa rodzaje obserwacji, mianowicie obserwacje nietypowe (*outliers*) oraz obserwacje wpływowe (*influential observations*).

Obserwacje nietypowe charakteryzują się większymi wartościami reszt niż obserwacje należące do rdzenia. Natomiast obserwacje wpływowe silnie wpływają na wartości estymatorów parametrów oraz istotnie oddziałują na kształt modelu. Wartości reszt tych obserwacji nie są duże w stosunku do wartości reszt obserwacji należących do rdzenia.

Wykrywanie obserwacji odstających może być często problemem złożonym, zwłaszcza w przypadku wielowymiarowym. Zastosowanie odpowiednich narzędzi służących identyfikacji tego rodzaju obserwacji stanowi punkt wyjścia w stosowaniu metod estymacji odpornej.



## WYKRYWANIE OBSERWACJI WPŁYWOWYCH

Podstawowym narzędziem służącym wykrywaniu obserwacji wpływowych jest macierz rzutowania  $\mathbf{H}$  (*hat matrix*) o wymiarach  $n \times n$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \quad (1.1.1)$$

$\mathbf{H}$  jest macierzą rzutu ortogonalnego przestrzeni  $R^n$  na podprzestrzeń  $R(X)$  generowaną przez kolumny macierzy  $\mathbf{X}$ . Elementy diagonalne macierzy rzutowania, oznaczane w skrócie jako  $h_i$ , noszą nazwę wielkości wpływowych (*leverage*). Wielkości te określają wpływ poszczególnych obserwacji na ocenę parametrów modelu.

Z faktu, że macierz rzutowania jest idempotentna ( $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}$ ), wynika, że

$$0 \leq h_i \leq 1 \quad (1.1.2)$$

Wpływ  $i$ -tej obserwacji na zmianę teoretycznej wartości zmiennej objaśnianej zależy wyłącznie od wielkości reszty oraz  $i$ -tej wielkości wpływowej. Wartości  $h_i$  bliskie jedności istotnie wpływają na wartości teoretyczne  $i$ -tej zmiennej, nawet jeśli wartość  $i$ -tej reszty jest mała (Ostasiewicz, 1998). R.E Welsch (Hoaglin i in., 1978) zaproponował próg równy  $h_H = 2(k+1)/n$ , pozwalający stwierdzić, czy dana obserwacja jest obserwacją wpływową. Przyjmuje się, że jeśli wartość  $h_i$  odpowiadająca  $i$ -tej obserwacji spełnia warunek:

$$h_i > h_H \quad (1.1.3)$$

wówczas  $i$ -tą obserwację można uznać za wpływową.

## WYKRYWANIE OBSERWACJI NIETYPOWYCH

Jednym z narzędzi służących identyfikacji obserwacji nietypowych są standaryzowane reszty  $e_{(i)}^*$  postaci:

$$e_{(i)}^* = \frac{e_i}{s_{(i)} \sqrt{1 - h_i}}, \quad (1.2.1)$$

gdzie  $s_{(i)}^2 = \frac{n-k-1}{n-k-2} s^2 - \frac{e_i^2}{(n-k-2)(1-h_i)}$  jest oceną wariancji  $\sigma^2$  składnika

losowego po usunięciu  $i$ -tej obserwacji.

Reszty dane wzorem (1.2.1) nazywane resztami studentyzowanymi, mają rozkład  $t$ -Studenta o  $(n-k-2)$  stopniach swobody [Staudte i in. 1990, str. 210-211]. Fakt ten umożliwia przeprowadzenie testu statystycznego weryfikującego hipotezę zerową postaci:  $H_0$ :  $i$ -ta obserwacja jest elementem rdzenia, wobec hipotezy alternatywnej  $H_1$ :  $i$ -ta obserwacja nie jest elementem rdzenia, czyli jest nietypowa.

Jeżeli zachodzi warunek  $|e_{(i)}^*| > t_{n-k-2}(\alpha)$ , hipotezę zerową  $H_0$  odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej  $H_1$  na poziomie istotności  $\alpha$ .

## ŁĄCZNE WYKRYWANIE OBSERWACJI WPŁYWOWYCH ORAZ NIETYPOWYCH

Wskaźnikiem identyfikującym w sposób łączny nietypowość i wpływowość  $i$ -tej obserwacji jest standaryzowana różnica między wartościami teoretycznymi zmiennej objaśnianej wyznaczonymi dla modelu oszacowanego na podstawie wszystkich obserwacji oraz modelu oszacowanego na podstawie zbioru nie zawierającego  $i$ -tej obserwacji:

$$DFITS_i = \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{(i)}}{s_{(i)}\sqrt{h_i}} = e_{(i)}^* \sqrt{\frac{h_i}{1-h_i}} \quad (1.3.1)$$

Przyjmuje się, że  $i$ -ta obserwacja jest odstająca, jeśli zachodzi następujący warunek:

$$|DFITS_i| > 2\sqrt{(k+1)/n} \quad (1.3.2)$$

## METODOLOGIA ESTYMACJI ODPORNEJ OPARTEJ NA WAŻONYCH ESTYMATORACH WELSCHA

Wśród szerokiej grupy metod estymacji odpornej znajdują się m.in. metody polegające na odrzuceniu obserwacji uważanych za nietypowe, a następnie estymowaniu parametrów modelu na podstawie pozostałych obserwacji. Otrzymane tym sposobem estymatory nazywane są estymatorami uciętymi. Usunięcie obserwacji odstającej w przypadku trendu oznacza zaburzenie kolejności czasowej. Dlatego, w celu szacowania parametrów modelu szeregu czasowego na podstawie wszystkich obserwacji, poszczególnym obserwacjom przyporządkowywane są wagi  $w_i$  o wartościach z przedziału  $(0,1]$ . Obserwacjom odstającym tego szeregu przypisywane są wówczas wagi o mniejszych wartościach, natomiast elementom rdzenia wagi równe 1. Zauważmy, że uogólniając tą metodę na przypadek, w którym obserwacjom odstającym przyporządkowywane są wagi równe 0, a elementom rdzenia wagi równe 1, otrzymujemy metodę opartą na odrzucaniu obserwacji odstających.

Konsekwencją podejścia opartego na przypisywaniu poszczególnym obserwacjom wag  $w_i$ , spełniających warunek  $0 < w_i \leq 1$  jest zastosowanie uogólnionej metody najmniejszych kwadratów do estymacji parametrów strukturalnych szeregu czasowego.

W metodzie tej zakłada się, że składnik losowy  $\epsilon$  ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną  $E(\epsilon) = 0$  oraz macierzą kowariancji  $\Sigma$  postaci  $\Sigma = Cov(\epsilon) = \sigma^2 \mathbf{W}^{-1}$ , gdzie  $\mathbf{W}$  jest znaną symetryczną dodatnio określoną macierzą o wymiarach  $n \times n$ .

Istnieje wówczas symetryczna i dodatnio określona macierz  $\mathbf{W}^{1/2}$  taka, że  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{W}^{1/2}$ .

Tak określony problem można sprowadzić do klasycznego przypadku MNK, wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\mathbf{y}_w = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{Y} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{X}_w = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{X} \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_w = \mathbf{W}^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

Ogólne równanie modelu sprowadza się wówczas do postaci:

$$\mathbf{y}_w = \mathbf{X}_w \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_w, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_w \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}), \quad (2.6)$$

Estymator  $\mathbf{b}_w$  wektora parametrów  $\boldsymbol{\beta}$  będący rozwiązaniem następującego równania normalnego:

$$\mathbf{X}_w^T \mathbf{y}_w = (\mathbf{X}_w^T \mathbf{X}_w) \mathbf{b}_w \quad (2.7)$$

jest równy:

$$\mathbf{b}_w = (\mathbf{X}_w^T \mathbf{X}_w)^{-1} \mathbf{X}_w^T \mathbf{y}_w \quad (2.8)$$

Uwzględniając w powyższej równości zależności (2.1) oraz (2.2), łatwo zauważyć, że estymator  $\mathbf{b}_w$  wektora parametrów  $\boldsymbol{\beta}$  postaci (2.8) wyraża się wzorem:

$$\mathbf{b}_w = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (2.9)$$

Jest on więc uogólnionym estymatorem MNK.

Wartość oczekiwana i macierz kowariancji estymatora  $\mathbf{b}_w$  są postaci:

$$E(\mathbf{b}_w) = \boldsymbol{\beta}, \quad \Sigma = \text{Cov}(\mathbf{b}_w) = \sigma^2 (\mathbf{X}_w^T \mathbf{X}_w)^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \quad (2.10)$$

Estymator wariancji  $\sigma^2$  wynosi:

$$s_w^2 = \mathbf{e}_w^T \mathbf{e}_w / (n - k - 1) \quad (2.11)$$

gdzie wektor reszt jest postaci (2.12)

$$\mathbf{e}_w = \mathbf{y}_w - \mathbf{X}_w \mathbf{b}_w \quad (2.12)$$

Rozważać będziemy macierz  $\mathbf{W}$  diagonalną o elementach będących wagami odpowiednio przyporządkowanymi poszczególnym obserwacjom. Wówczas estymator  $\mathbf{b}_w$  nazywany jest ważonym estymatorem MNK.

Jeden ze sposobów wyznaczania wartości wag  $w_i$   $i$ -tej obserwacji został opracowany przez R.E Welscha. Zaproponowane wagi  $w_i$  są następującej postaci:

$$w_i = w \left( \mathbf{x}_i, \frac{e_i}{s_{(i)}} \right) = \min \left\{ \frac{c}{|DFITS|}, 1 \right\} \quad (2.13)$$

Stała  $c$  określona jest zależnością:

$$c = p \sqrt{(p+1)/n}, \quad \text{gdzie } p=1,2, \quad (2.14)$$

W opisanym powyżej procesie estymacji, obserwacjom odstającym szeregu czasowego przypisywane są wagi o wartościach równych  $\frac{c}{|DFITS|}$ .

Pozostałym obserwacjom przypisywane są wagi równe 1.

Estymator ważony  $\mathbf{b}_w$  parametrów  $\boldsymbol{\beta}$ , uzyskany przy wagach postaci (2.13) nazywany jest ważonym estymatorem Welscha. Estymator ten jest odporny zarówno na obserwacje wpływowe, jak i na obserwacje nietypowe.

Metoda estymacji odpornej oparta na ważonych estymatorach Welscha jest metodą iteracyjną. W każdym kroku iteracyjnym wyznaczane są wartości wag, estymatory parametrów strukturalnych oraz wariancji  $\sigma^2$ . Macierz rzutowania  $\mathbf{H}$  w kolejnych iteracjach wynosi:

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}_w (\mathbf{X}_w^T \mathbf{X}_w)^{-1} \mathbf{X}_w^T \quad (2.15)$$

Uwzględniając w powyższej równości postać macierzy  $\mathbf{X}_w$  danej zależnością (2.2), otrzymujemy:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}^{1/2} \quad (2.16)$$

## IMPLEMENTACJA METODY

Przedmiotem analizy jest szereg czasowy wartości indeksu giełdowego WIG20 o piętnastominutowej częstotliwości notowań w dniu 13.02.2006. Okres badawczy obejmuje obserwacje zidentyfikowane w kolejnych kwadransach między momentem określenia wartości kursu na otwarciu (godzina 9.30) a momentem określenia wartości kursu na zamknięciu (godzina 16.30).

Dla szeregu czasowego tych obserwacji stosowanie KMNK celem szacowania parametrów strukturalnych modelu liniowego nie znajduje uzasadnienia, m.in. ze względu na fakt, że nie są spełnione założenia tej metody. Wyznaczone w pracy wartości ocen estymatorów parametrów modelu liniowego za pomocą KMNK oraz wartości statystyk określających jakość uzyskanej funkcji trendu, służą przede wszystkim uzasadnieniu potrzeby zastosowania metod estymacji odpornych na odstępstwa od metody klasycznej. Wyniki estymacji uzyskane przy użyciu KMNK zawiera kolumna 1 tabeli 1, natomiast wykres liniowej funkcji trendu otrzymanej tą metodą oznaczono linią ciągłą na rysunku 1.

W przypadku analizowanego szeregu, na wyniki szacowania parametrów KMNK mają wpływ obserwacje odstające. Z porównania wartości wpływowych  $h_i$   $i$ -tej obserwacji,  $i=1, \dots, 27$ , wyliczonymi na podstawie (1.1.1) z wartością progową równą  $h_H = 0,14$ , wynika, że obserwacjami mogącymi oddziaływać na położenie linii trendu wyznaczonego KMNK oraz wartości ocen szacowanych parametrów są obserwacje pierwsza i ostatnia. Ponieważ dla trzech ostatnich obserwacji szeregu czasowego zachodzi warunek  $|e_{(i)}^*| > t_{24}(0,1) = 1,71$ , można

wnioskować na poziomie istotności 0,1, że obserwacje te stanowią grupę obserwacji nietypowych badanego szeregu wobec trendu liniowego uzyskanego w wyniku zastosowania KMNK. Wartości reszt studentyzowanych oraz wskaźnika  $DFITS$  ostatnich czterech obserwacji zawiera kolumna druga i trzecia tabeli 2. Ponieważ warunek  $|DFITS_i| > 0,54$  zachodzi tylko dla ostatnich czterech obserwacji, można przyjąć, że rdzeń w przypadku trendu liniowego wyznaczonego KMNK, składa się z wszystkich pozostałych obserwacji.

Wykorzystując wagi Welscha, wyliczone w oparciu o wartości wskaźników  $DFITS$ , wyznaczono wartości estymatorów odpornych na zidentyfikowane obserwacje odstające. Wyniki zawarte, w kolumnie drugiej tabeli 1, uzyskane w pierwszej iteracji metodą odporną, wskazują na lepszą jakość otrzymanego modelu. Stopień dopasowania wartości teoretycznych do danych empirycznych tworzących rdzeń, nieznacznie się polepszył.

W przeciwieństwie do wyników, jakie uzyskano klasyczną metodą estymacji, wartości ocen parametrów uzyskane metodą odporną, są istotnie różne od zera na poziomie istotności 0,05. Wartościami odstającymi od trendu liniowego wyznaczonego po pierwszej iteracji przez oceny estymatorów odpornych są dane obserwowane w czasie  $t = 24, 25, 26$ .

Wyniki dotyczące estymacji odpornej zawarte w tabeli 1 wskazują, że wraz z każdą z pięciu dokonanych iteracji jakość uzyskiwanych modeli odpornych polepsza się. Zmiany położenia linii trendu w przestrzeni  $R^2$  zilustrowane na rysunku 1, odzwierciedlają wzrost współczynników kierunkowych prostych wyznaczanych w kolejnych iteracjach. Tym samym wzrasta wartość wpływu  $h_1$  pierwszej obserwacji szeregu, podczas gdy wartości wpływowe obserwacji odstających maleją z każdą iteracją. Przykładowo, wyniki uzyskane w pierwszych dwóch iteracjach dotyczące wartości współczynników  $DFITS$  oraz reszt studentyzowanych ostatnich czterech obserwacji zamieszczono w tabeli 2.

Istotnym problemem identyfikacji obserwacji odstających oraz stosowania metod odpornych jest odpowiednia specyfikacja modeli trendu, uwzględniających charakter kształtowania się wartości analizowanych zmiennych. Najlepszą funkcją trendu opisującą zmiany wartości indeksu giełdowego WIG20 jest wielomian szóstego stopnia, gdyż współczynnik determinacji dla tego trendu przyjmuje największą wartość w klasie trendów będących funkcjami elementarnymi.

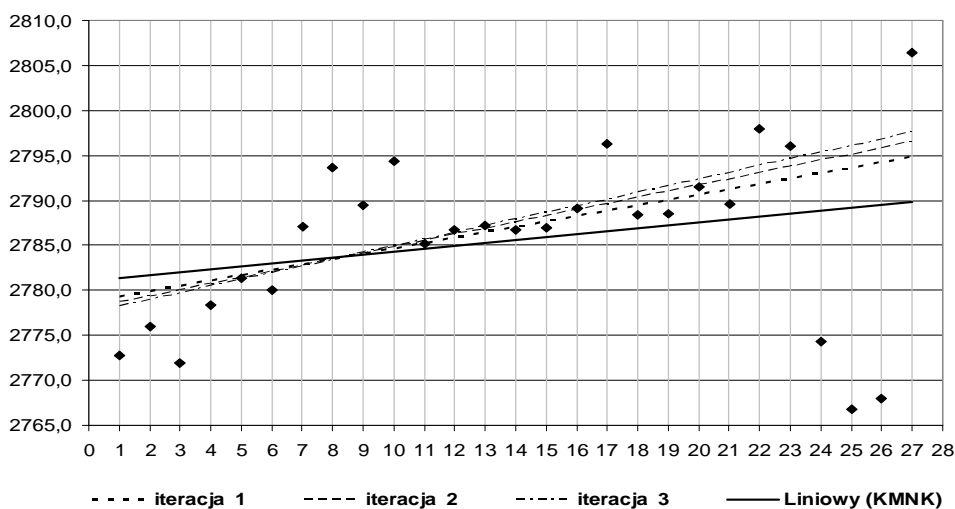
Oceny szacowanych za pomocą KMNK nieznanymi parametrów strukturalnych modelu oraz wartości statystyk określających jakość uzyskanej funkcji trendu zawiera kolumna 1 tabeli 3. Wykres wielomianowej funkcji trendu otrzymanej tą metodą oznaczono linią ciągłą na rysunku 2. Podobnie, jak w przypadku trendu liniowego wyznaczonego za pomocą KMNK, najwyższe wartości wpływowe  $h_i$  równe 0,84 posiadają obserwacje pierwsza oraz ostatnia. Ponieważ wartości reszt studentyzowanych odpowiadające obserwacjom w momencie  $t = 22, 23, 26, 27$ , spełniają warunek  $|e^*_{(t)}| > t_{20}(0,1) = 1,72$ , można wnioskować na poziomie istotności 0,1, że obserwacje te są nietypowe wobec

trendu wielomianowego, którego parametry strukturalne oszacowano KMNK. Wyznaczone wartości wskaźnika DFITS dla poszczególnych obserwacji wskazują, że obserwacja pierwsza oraz dwie ostatnie nie są elementami rdzenia. Wyniki jakie uzyskano na wskutek estymacji parametrów strukturalnych modelu wielomianowego metodą klasyczną oraz w kolejnych dwóch iteracjach odpornej metody Welscha, zawarte są w tabeli 3. Wykresy otrzymanych funkcji trendów wielomianowych przedstawia rysunek 2.

Tabela 1. Wyniki estymacji KMNK oraz OMW dla trendu liniowego

	KMNK		Odporna Metoda Welscha (OMW)									
	1		Iteracja 1		Iteracja 2		Iteracja 3		Iteracja 4		Iteracja 5	
	$b^{(0)}$	Stat. $t$	$b^{(1)}$	Stat. $t$	$b^{(2)}$	Stat. $t$	$b^{(3)}$	Stat. $t$	$b^{(4)}$	Stat. $t$	$b^{(5)}$	Stat. $t$
$b_0$	2781,03 (3,724)	746,86	2778,75 (2,740)	1013,99	2777,98 (2,477)	1121,71	2777,49 (2,273)	1221,92	2777,05 (2,072)	1308,31	2776,76 (2,004)	1426,04
$b_1$	0,3253 (0,232)	1,4	0,5956 (0,188)	3,17	0,6862 (0,172)	3,98	0,7427 (0,159)	4,66	0,8723 (0,125)	4,98	0,9307 (0,103)	5,03
$R^2$	0,0727		0,2694		0,3689		0,4389		0,5299		0,6745	
$S_e^2$	88,4853		64,5536		55,7583		49,5725		41,5339		28,7583	
$S_{ew}^2$			43,6984		35,1170		29,3015		22,574		17,834	

Źródło: obliczenia własne

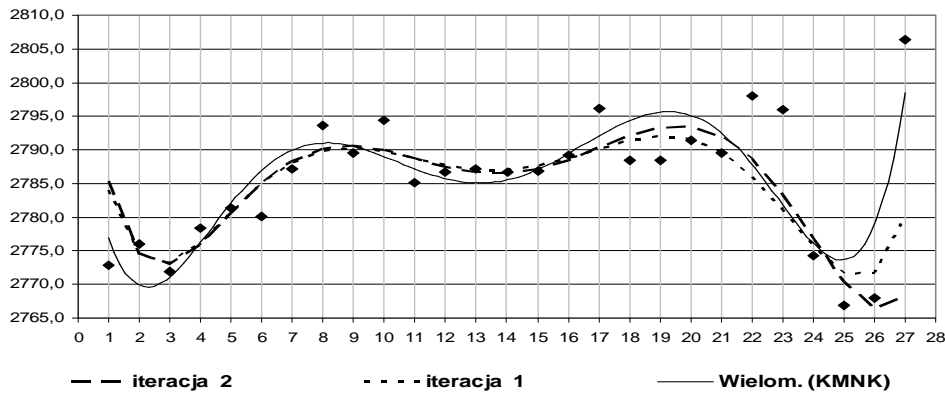


Rysunek 1. Wykresy liniowych funkcji trendu wartości indeksu WIG20 uzyskanych metodami: klasyczną i odporną

Tabela 2. Charakterystyki obserwacji odstających względem trendu liniowego

Nr obserwacji	KMNK		Odporna Metoda Welscha			
	DFITS	$ e^*_{(i)} $	Iteracja 1		Iteracja 2	
			DFITS	$ e^*_{(i)} $	DFITS	$ e^*_{(i)} $
24	<b>0,56</b>	1,69	<b>0,98</b>	<b>3,57</b>	<b>0,98</b>	<b>4,65</b>
25	<b>1,01</b>	<b>2,85</b>	<b>1,56</b>	<b>7,27</b>	<b>3,38</b>	<b>19,16</b>
26	<b>1,03</b>	<b>2,74</b>	<b>1,54</b>	<b>6,84</b>	<b>2,93</b>	<b>15,48</b>
27	<b>0,82</b>	<b>2,02</b>	0,52	<b>1,91</b>	0,49	<b>1,75</b>

Źródło: Obliczenia własne



Rysunek 2. Wykresy funkcji trendów wielomianowych szóstego stopnia wartości indeksu WIG20 uzyskanych metodami: klasyczną i odporną

Tabela 3. Wyniki estymacji KMNK oraz OMW dla trendu wielomianowego

	KMNK		Odporna Metoda Welscha (OMW)					
	1		Iteracja 1		Iteracja 2		3	
	$\mathbf{b}^{(0)}$	Stat. $t$	$\mathbf{b}^{(1)}$	Stat. $t$	$\mathbf{b}^{(2)}$	Stat. $t$	$\mathbf{b}^{(2)}$	Stat. $t$
$h_0$	2799,3949 (14,444)	193,81	2807,5223 (7,989)	351,42	2810,5821 (19,771)	142,15		
$b_1$	-32,7649 (12,912)	-2,54	-32,6950 (7,289)	-4,49	-35,1736 (15,054)	-2,34		
$b_2$	12,0174 (3,750)	3,20	10,5827 (2,156)	4,91	11,2191 (4,027)	2,79		
$b_3$	-1,7339 (0,485)	-3,57	-1,4159 (0,284)	-4,97	-1,4839 (0,503)	-2,95		
$b_4$	0,1186 (0,031)	3,83	0,0919 (0,018)	4,95	0,0949 (0,032)	2,99		
$b_5$	-0,0038 (0,001)	-4,02	-0,0029 (0,0005)	-4,90	-0,0029 (0,001)	-2,94		
$b_6$	0,00004 (0,00001)	4,18	0,00001 (0,00001)	4,83	3,40486E-05 (0,00001)	2,85		
$R^2$	0,6541		0,4938		0,7174			
$S_e^2$	41,2491		44,7157		24,9683			
$S_{ew}^2$			17,5595		12,0123			

Źródło: Obliczenia własne

## PODSUMOWANIE

Występowanie obserwacji odstających ma szczególnie znaczenie w modelowaniu wartości zmiennych mających postać finansowych szeregów czasowych. Ponieważ usunięcie obserwacji odstających w przypadku trendu oznacza zaburzenie kolejności czasowej, kluczowym problemem staje się dobór odpowiednich metod estymacji parametrów modelu szeregu czasowego.

W niniejszej pracy omówiono i zastosowano jedną z metod estymacji, które uwzględniają obserwacje odstające i jednocześnie są na nie odporne. W tym celu do szacowania parametrów strukturalnych szeregu czasowego wartości indeksu giełdowego WIG20 wykorzystano ważone estymatory Welscha. Istotną zaletą tych estymatorów jest odporność na obserwacje odstające, zarówno ze względu na wpływowość jak i nietypowość. Własność ta ma szczególne znaczenie w procesie modelowania finansowych szeregów czasowych, w którym ważną rolę odgrywa odpowiednia specyfikacja możliwych do zastosowania funkcji trendu. Wybór postaci funkcji trendu determinuje bowiem identyfikację obserwacji odstających, które z kolei mają istotny wpływ na oceny szacowanych parametrów modelu.

## LITERATURA

- Hoaglin D.C., Welsch R.E. (1978), "The Hat Matrix in Regression and ANOVA", *The American Statistician*, Vol.32, Issue 1, str. 17
- Ostasiewicz W. (1998), „Statystyczne metody analizy danych”, Wyd. AE Wrocław str: 235-274.
- Rousseeuw P. J., Leroy A. M. (2003), "Robust Regression and Outlier Detection", John Wiley&Sons, New Jersey.
- Staudte R.G, Sheather S.J. (1990), "Robust Estimation and Testing", John Wiley&Sons, New York.

**Sample applications of the robust estimation to financial time series**

**Summary:** The assumptions which constitute the basis for parametric estimation techniques, relating to the normality of distribution of the population as well as independent variables, are often not fulfilled in the case of financial data. Therefore it is important to use robust estimation methods, both in terms of these assumptions and in terms of the quality of observations. The paper aims to implement the robust estimation to modelling the time series of the WIG20 index of the 15-minute frequency on 13 February 2006. The structural parameters of the model were estimated with the use of the Welsch estimators.

**Key words:** outliers, influential observations, robust estimation, Welsch estimators



Maria Parlińska, Marcin Adamczyk  
Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW  
e-mail: mparlinska@mors.sggw.waw.pl; marcinadamczyk@tlen.pl

## PROGNOZA LICZBY EMITOWANYCH KART PŁATNICZYCH

**Streszczenie:** Wraz z rozwojem nowoczesnych technologii informacyjnych zrodziły się koncepcje społeczeństwa informacyjnego. Mimo, że nie jest to pojęcie jednoznaczne, wiele krajów, także Unia Europejska, uznały budowę społeczeństwa informacyjnego za priorytetowy cel. Zwiększona podaż informacji i wzrost możliwości wzajemnego komunikowania się w społeczeństwie i w gospodarce doprowadziły do znaczących zmian w zasadach prowadzenia biznesu. Banki znakomicie wykorzystały możliwości związane z rozwojem Internetu i gospodarki sieciowej. Inwestując duże środki i dostosowując swoje strategie marketingowe do nowych realiów zaoferowały klientom usługi bankowości elektronicznej, w tym bankowości internetowej, umożliwiając im zarządzanie swoimi finansami przez całą dobę, siedem dni w tygodniu z dowolnego miejsca na świecie. W artykule przeprowadzono analizę wybranego produktu bankowości internetowej - karty wirtualnej w kontekście tradycyjnych kart płatniczych z prognozą na najbliższe dwa kwartały.

**Słowa kluczowe:** Bankowość elektroniczna, bankowość internetowa, karty płatnicze, karty wirtualne

### WSTĘP

Prestizowym tytułem Człowieka Roku Polskiego Internetu edycja 2005 uhonorowano Sławomira Lachowskiego, twórcę pierwszego wirtualnego banku w Polsce – mBanku, który odbierając wyróżnienie powiedział: "Jeszcze 5 lat temu nikt nie przypuszczał, że bankowość internetowa osiągnie taki sukces. Co prawda sam jestem niepoprawnym optymistą, ale przyznaję że w 2000 roku nie wierzyłem, iż w dniu 5 urodzin mBanku z naszych usług korzystać będzie milion osób."<sup>1</sup>

Słowa założyciela mBanku to również dowód na to, że Internet w ciągu zaledwie kilku lat zrewolucjonizował sektor bankowy. Rewolucja ta wpływa na wszystkie banki bez wyjątku - od małych spółdzielczych obsługujących lokalne społeczności po gigantyczne banki działające globalnie. Wpływa na obsługę klientów, ofertę produktową i cenową, koszty działania, marketing i strategię rozwoju banków.

Bez wątpienia za sprawą Internetu sektor bankowy już nigdy nie będzie taki jak wcześniej. Jaki będzie w przyszłości, trudno jednoznacznie wyrokować, bo odwołując się do słów prezesa Lachowskiego - tylko kilka lat wystarczy na radykalne zmiany na tym rynku. Bankowość internetowa jest bardzo młoda, a sam

---

<sup>1</sup> "Twórca mBanku - Człowiekiem Polskiego Internetu" witryna mBanku  
[http://media.mbank.pl/notatka\\_48304.html](http://media.mbank.pl/notatka_48304.html) 09.12.2005

Internet ciągle jest nazywany nowym zjawiskiem. Niemniej tych kilka lat rozwoju bankowości internetowej w Polsce i ponad dekada od powstania pierwszego banku internetowego na świecie, uprawniają do przeprowadzenia analiz tego zjawiska. W niniejszym artykule zamierzamy przyrzeć się zagadnieniom coraz wszechstronniejszego wykorzystania Internetu przez banki. Szczególnej analizie poddano jeden z produktów bankowości internetowej – tzw. karty wirtualne.

## SPOŁECZEŃSTWO INFORMACYJNE

W drugiej połowie XX w., nastąpiła prawdziwa "eksplozja informacji" mających praktyczne zastosowanie w rozwoju społeczeństw. Twórcą terminu "eksplozja informacji" jest Francuz Georges Anderl, który w 1973 r. realizował projekt badawczy na zlecenie Organizacji Współpracy Gospodarczej i Rozwoju (OECD). Biorąc za jednostkę poziom informacji, jakim według jego szacunków dysponowała ludzkość w pierwszym roku naszej ery, obliczył jak zwiększała się wiedza ludzkości aż do naszych czasów. W średniowieczu, około 1500 r., ilość informacji, jaką dysponowała ludzkość, osiągnęła poziom dwóch jednostek (o wzroście zadecydowało wejście druku oraz stosowanie księgowości). Kolejne podwojenia ilości wiedzy nastąpiły według niego w latach 1750, 1900, 1950, 1960, 1967 i 1973, kiedy to badanie zostało zakończone [Bloor 2001]

W ciągu ostatnich 30 lat następowało jeszcze większe przyspieszenie rozwoju rozwiązań technicznych, w szczególności miniaturyzacja komputerów i produkcja komputerów osobistych, udoskonalenie sieci telekomunikacyjnych poprzez dołączenie do nich sieci informatycznych i opracowanie specyficznych dla tych sieci protokołów wymiany danych (w szczególności TCP/IP<sup>2</sup> [Trejderowski 2002]): "Zintegrowana sieć informacyjna, telekomunikacyjna i infrastruktura teleinformatyczna stają się dzisiaj decydującymi czynnikami przyspieszenia i racjonalizacji rozwoju gospodarczego i społecznego. Infrastruktura informatyczna w postaci urządzeń, sieci, technologii i usług jest obok edukacji i nauki istotnym elementem funkcjonującej już cywilizacji informacyjnej i gospodarki opartej na wiedzy."<sup>3</sup>

## INFORMACJA I KOMUNIKACJA W GOSPODARCE

Rozwój technologii związanych z przetwarzaniem, przesyłaniem i tworzeniem informacji doprowadził do jakościowych zmian w funkcjonowaniu gospodarki i społeczeństwa. Bardzo wzrosło znaczenie informacji w gospodarce.

---

<sup>2</sup> Transmission Control Protocol and Internet Protocol - podstawowy protokół (zbiór zasad) między lokalnymi sieciami komputerowymi połączonymi w sieć globalną.

<sup>3</sup> Por. Rozwój infrastruktury informatycznej i telekomunikacyjnej, w: POLSKA 2025. Długookresowa strategia trwałego i zrównoważonego rozwoju, Rządowe Centrum Studiów Strategicznych, Warszawa 2000 r., s. 104 -105

Jest niezbędna w procesie podejmowania decyzji. Równie niezbędna jest komunikacja. Informacja i komunikacja to "pojęcia zbliżone, często ze sobą mylone, ale zasadniczo różne. (...)Wiele wysiłku włożono w przeszłości, by gromadzić informacje, które będą własnością nielicznych, a dla wielu pozostaną w głębokiej tajemnicy. Większość aktów ludzkiej komunikacji nie przekazuje tego, co nazywamy 'prawdziwą' informacją, lecz co najwyżej komunikaty z selektywnie wybranych i celowo zinterpretowanych faktów"<sup>4</sup>. Szczególną formą komunikacji marketingowej jest komunikacja elektroniczna. Jej rozwój nie oznacza wyeliminowania w firmach sprzedawców czy pośredników, ale ich liczebność może się zmniejszać, podczas gdy liczba kontaktów z klientami wzrośnie<sup>5</sup>.

W społeczeństwie informacyjnym określa się model społeczeństwa, w którym zasadniczymi czynnikami konkurencyjności stają się dostęp do informacji oraz sprawność jej przetwarzania, a technologie informatyczne i telekomunikacyjne stanowią podstawę funkcjonowania instytucji publicznych w zakresie- e-government i gospodarki e-business. Informacja staje się podstawowym zasobem gospodarczym zmniejszając znaczenie dotychczasowych jej podstaw, ziemi, kapitału i pracy<sup>6</sup>.

## BANKOWOŚĆ ELEKTRONICZNA

Bankowość elektroniczna jest formą usług oferowanych przez banki, umożliwiającą klientom korzystanie z usług bankowych poprzez zdalne kanały dostępu przez 24 h na dobę, 7 dni w tygodniu, z dowolnego miejsca na świecie. Obejmuje wszystkie możliwości zdalnej obsługi: telefon, modem, niektóre rodzaje bankomatów, telegazetę oraz inne urządzenia umożliwiające wykonywanie operacji bankowych bez konieczności udawania się do banku. Istotą tej koncepcji jest wykorzystanie systemu elektronicznego transferu płatności bez obiegu dokumentów papierowych. Bankowość elektroniczna jest jednym z podstawowych elementów procesu określanego angielskim skrótem EDI (Electronic Data Interchange), czyli Elektronicznej Wymiany Danych. Pewne cechy bankowości

<sup>4</sup> Mikułowski Pomorski J., Społeczeństwo informacji czy społeczeństwo komunikujące się, w: Mattelart A., "Społeczeństwo informacji", Towarzystwo Autorów i Wydawców Prac Naukowych UNIVERSITAS, Kraków 2004 r.,

<sup>5</sup> Por. Lambin J.- J., Strategiczne decyzje w zakresie komunikacji, w: " Strategiczne zarządzanie marketingowe", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001 r., s. 550 - 551.

<sup>6</sup> Program działań mających przyspieszyć rozwój społeczeństwa informacyjnego w Europie zawarty jest w opracowanym przez kraje UE dokumencie "eEurope 2005 - "Information Society for All", [http://europa.eu.int/information\\_society/eeurope/news\\_library/documents/eeurope2005/eeurope2005/\\_en.pdf](http://europa.eu.int/information_society/eeurope/news_library/documents/eeurope2005/eeurope2005/_en.pdf) , za: Kisiel M., Internet a konkurencyjność banków w Polsce, Warszawa 2005 r., s. 39

elektronicznej różnią ją od bankowości tradycyjnej. A. Janc i G. Kotliński<sup>7</sup> rozumieją bankowość elektroniczną jako całościową koncepcję, zakładającą wykorzystanie w praktyce operacyjnej systemów informatyczno-komunikacyjnych do usprawnienia i przyspieszenia obiegu pieniądza bezgotówkowego. T. Porębska-Miąc<sup>8</sup> uważa, że istotę bankowości elektronicznej stanowi możliwość korzystania z usług bankowych niezależnie od miejsca i czasu. W. Chmielarz<sup>9</sup> uważa, iż podstawą koncepcji bankowości elektronicznej jest dążenie do stworzenia systemu, w którym rozliczenia finansowe odbywać się będą bez obiegu mediów papierowych, komunikacja pomiędzy bankiem a jego klientami oraz w obrębie samego banku odbywać się będzie na drodze teletransmisji.

Ekspansja sieci internetowej w różnych obszarach działalności gospodarczej prowadziła do powstawania pierwszych banków internetowych.<sup>10</sup>

W trzy lata po amerykańskim bankowym debiucie internetowym dokonanym przez SFNB (Security First Network Bank) w październiku 1998 roku, Powszechny Bank Gospodarczy (włączony później do Banku Pekao) otworzył pierwszy w Polsce "oddział elektroniczny", dzięki któremu klienci mogli poprzez Internet wykonywać przelewy, zakładać lokaty, sprawdzać saldo i historię rachunku.

PBG był pierwszym bankiem w Europie Środkowo-Wschodniej oferującym swoje usługi przez Internet. W 2000 roku działało w Polsce już pięć internetowych oddziałów - poza PBG/Pekao - otworzyły je: Wielkopolski Bank Kredytowy (obecnie Bank Zachodni WBK), Handlobank (włączony do Citibanku), Fortis Bank oraz Bank Przemysłowo-Handlowy. Pod koniec 2000 roku ruszył w Polsce pierwszy bank prowadzący działalność wyłącznie w Internecie - z tego powodu nazywany także bankiem wirtualnym - mBank.

Tworzenie oddziałów wirtualnych opiera się na zaoferowaniu klientom dysponującym komputerem i dostępem do Internetu pakietu standardowych usług dostępnych poprzez funkcjonowanie dwóch serwisów internetowych - serwisu informacyjnego WWW oraz serwisu transakcyjnego - umożliwiającego składanie zleceń i podgląd operacji dokonywanych na rachunku użytkownika<sup>11</sup>. Wszystkie informacje przekazywane od klienta i z banku do klienta są szyfrowane, gdzie przy

---

<sup>7</sup> A. Janc, G. Kotliński: Determinanty wykorzystania bankowości elektronicznej w rozwoju wybranych usług bankowych. W: Zastosowania rozwiązań informatycznych w bankowości. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu" nr 828. Pod red. A. Gospodarowicza. Wrocław: Wyd. AE 1999.

<sup>8</sup> T. Porębska-Miąc: Bankowość elektroniczna jako element e-biznesu. W: Zastosowania rozwiązań informatycznych w bankowości. „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu” nr 855. Pod red. A. Gospodarowicza. Wrocław: Wyd. AE 2000.

<sup>9</sup> W. Chmielarz: Systemy elektronicznej bankowości i cyfrowej płatności. Warszawa: Wyższa Szkoła Ekonomiczno-Informatyczna 1999.

<sup>10</sup> Por. Kisiel M., Internet a konkurencyjność banków ..., op. cit. s. 79.

<sup>11</sup> Por. Kisiel M., Internet a konkurencyjność banków ..., op. cit. s. 94

połączeniach wykorzystuje się technologie kryptologii niesymetrycznej (para kluczy – prywatny, publiczny dł. 1024 bity, im dłuższy klucz tym wyższy poziom bezpieczeństwa). Przy transakcji danych stosuje się technologię kryptografii symetrycznej (klucz sesyjny o dł. 128 bitów). Najwyższy poziom bezpieczeństwa gwarantowany jest protokołem SSL (Secure Socket Layer)<sup>12</sup>.

## KARTY PŁATNICZE

Karty płatnicze są bezgotówkowym instrumentem płatności, inicjującym bezgotówkowy transfer płatności między dwoma rachunkami bankowymi. Do najważniejszych systemów kart występujących w naszym kraju należą: system VISA, którego operatorem jest Visa International, oraz system Eurocard/Mastercard, którego operatorem jest firma Europay International.<sup>13</sup>

W powszechnym użyciu znajduje się wiele różnych rodzajów kart płatniczych. Można je podzielić według organizacji płatniczych wydających karty, typów kart, sposobów obciążenia, rodzajów nośnika pamięci, zasięgów oraz zakresów stosowania.

Podstawowym kryterium jest sposób regulowania płatności, który dzieli karty na: karty kredytowe (*credit cards*) - umożliwiają posiadaczowi karty dokonywanie płatności bezgotówkowych na podstawie umowy kredytu;; karty obciążeniowe (*charge cards*) - są to karty z odroczonym terminem płatności; karty debetowe (*debit cards*) - wydawane zazwyczaj do istniejącego rachunku bankowego, a posiadacze takich kart mogą się nimi posługiwać tylko do wysokości salda na rachunku<sup>14</sup>. Przykładem takiej karty jest karta Visa Electron lub karta Maestro;

Biorąc pod uwagę zasięg stosowania kart płatniczych dzielimy je na: karty krajowe (*domestic cards*) i karty międzynarodowe (*international cards*). Karty płatnicze są wydawane przez banki we współpracy z jedną z organizacji płatniczych. Do najważniejszych organizacji wydających karty płatnicze należą: Visa InternationalEuropay, American Express, Diners Club, JCB (Japan Credit Bureau).

Ze względu na zakres stosowania, wyodrębnia się dwa rodzaje kart magnetycznych: karty płaskie (Visa Electron, Maestro) - używane wyłącznie w terminalach elektronicznych (POS) i w bankomatach, oraz karty wypukłe (Visa Classic, EuroCard/MasterCard), zwane również embosowanymi, używane zarówno w terminalach elektronicznych, jak i poza nimi, a nawet bez fizycznej obecności

---

<sup>12</sup> Parlińska M., Dystrybucja informacji w wirtualnym środowisku. Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2002, s. 40

<sup>13</sup> A. Gospodarowicz: Technologie informatyczne w bankowości. Wrocław: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu 2002

<sup>14</sup> Serwis Bankowość internetowa. 2005-11-28

karty w punktach sprzedaży z autoryzacją telefoniczną (głosową) lub zakupach dokonywanych drogą zdalną (np. przez telefon, Internet).

Uwzględniając sposób zapisu informacji, karty można podzielić na karty magnetyczne - na karcie znajduje się pasek magnetyczny, na którym zapisane są dane identyfikacyjne karty, oraz karty elektroniczne (chipowe) - na karcie znajduje się mikroprocesor odpowiedzialny za identyfikację karty oraz za "pamiętanie" o funkcjach karty.

Karty elektroniczne są wielofunkcyjne, łączą w sobie funkcje płatnicze i niepłatnicze. Za wybór funkcji karty odpowiada mikroprocesor, w którym zapisane są czynności możliwe do zrealizowania daną kartą. Terminale elektroniczne odczytują spis funkcji karty z mikroprocesora, dzięki czemu posiadacz karty może wybrać odpowiadającą mu w danej chwili funkcję.

Posiadacze tradycyjnych kart płatniczych, używając ich do płatności poprzez Internet, są zmuszeni do podawania numerów kart. Obawy o bezpieczeństwo takich transakcji hamują rozwój handlu sieciowego. Wychodząc naprzeciw zapotrzebowaniom rynku internetowego, zostały wprowadzone tzw. wirtualne karty płatnicze, których zadaniem jest zapewnianie bezpieczeństwa transakcji dokonywanych poprzez sieć.

Pierwszym bankiem, który zaoferował w Polsce kartę wirtualną był Invest-Bank S.A. Produkt pojawił się na rynku w listopadzie 2000 roku. Następną była karta PKO BP S.A., która ukazała się w drugiej połowie 2001 roku. Karty wirtualne zaoferował również mBank oraz MultiBank.

Karta ta, wydawana do rachunku oszczędnościowo-rozliczeniowego, ma charakter karty debetowej - wartość dokonywanych nią transakcji nie może przekroczyć dziennych i miesięcznych limitów w ramach zgromadzonych na koncie środków lub przyznawanych linii kredytowych.

## PROGNOZA LICZBY EMITOWANYCH KART PŁATNICZYCH

Jednym z elementów składającym się na powszechność bankowości elektronicznej jest liczba wyemitowanych kart płatniczych, jej szybki przyrost w ostatnim dziesięcioleciu, stąd powstał pomysł analizy tych danych. W kontekście bankowości internetowej, szczególną uwagę poświęcono analizie tzw. kart wirtualnych. Obserwując dynamiczny rozwój sektora bankowego w Polsce dochodzi się do przekonania, że w tym obszarze metody analizy ilościowej mogą dostarczyć interesujących wyników. W wyniku zarządzenia prezesa Narodowego Banku Polskiego z 1998 roku dane o liczbie wyemitowanych kart płatniczych publikowane są kwartalnie począwszy od IV kwartału 1998 roku, więc na podstawie tych danych został zbudowany szereg czasowy składający się z 28 kwartałów. Na bazie tego szeregu sporządzono prognozę liczby wyemitowanych kart do końca IV kwartału 2005 roku oraz do końca I kwartału 2006 roku. Pierwotnie postanowiono zbudować model liniowy – tabela 1.

Tabela 1. Analiza regresji. Regression analysis - Linear model:  $Y = a + b \cdot X$ 

Dependent variable: liczba kart wyemitowanych				
Independent variable: kwartał				
		Standard	T	
Parameter	Estimate	Error	Statistic	P-Value
Intercept	6024,33	595,881	10,11	0,0000
Slope	488,797	35,9004	13,6154	0,0000

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych NBP przygotowane z wykorzystaniem pakietu statystycznego Statgraphics Plus 4.1.

Przeprowadzona analiza pozwala na opisanie trendu zmian liczby wyemitowanych kart w układzie kwartalnym. Równanie opisujące dopasowany model ma postać: liczba kart wyemitowanych =  $6024,33 + 488,797 \cdot \text{kwartał}$

Przewidywane wartości oraz odpowiednie przedziały ufności zostały obliczone za pomocą procedury „Forecasts” w programie Statgraphics Plus 4,1. i zaprezentowane w Tabeli 2.

Tabela 2. Przewidywane wartości. Predicted values

		99,00%		99,00%	
		Prediction limits		Confidence limits	
	Predicted	Lower	Upper	Lower	Upper
X	Y				
1,0	6513,13	1969,52	11056,7	4943,74	8082,52
28,0	19710,6	15167,0	24254,3	18141,3	21280,0
29,0	20199,4	15625,3	24773,6	18543,7	21855,2
30,0	20688,2	16081,6	25294,9	18944,6	22431,8

Źródło: Obliczenia własne z wykorzystaniem pakietu statystycznego Statgraphics Plus 4.1.

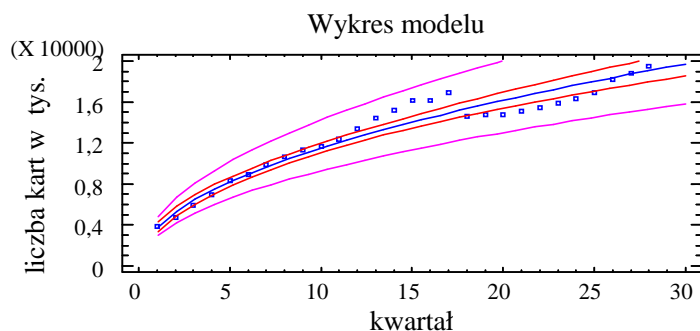
Jak widzimy w powyższej tabeli przewidywana wartości liczby wyemitowanych kart na 4 kwartał 2005 (obserwacja  $x = 29$ ), jest równa 20199,4 tysiące, a na pierwszy kwartał 2006 (obserwacja  $x = 30$ ) wynosi 20688,2 tysiące. Zostały tutaj wyznaczone także przedziały tolerancji dla możliwych nowych obserwacji oraz przedziały ufności dla oczekiwanej wartości liczby wyemitowanych kart na poziomie ufności  $1 - \alpha = 0,99$ . W celu sprawdzenia, jaki model jest najlepszy do opisanie trendu, porównano alternatywne modele. Okazało się, że lepiej dopasowanym modelem jest model funkcji potęgowej, który w 96,9% wyjaśnia zmienność liczby kart wyemitowanych dając około 9% lepsze dopasowanie niż model liniowy:

$$\text{liczba kart wyemitowanych} = 3720,26 \cdot \text{kwartał}^{0,490179}, \text{ b\aa}d\text{z} \text{ r\o}wnowa\text{z}n\text{\aa} \\ \ln(\text{liczba kart wyemitowanych}) = 8,22155 + 0,490179 \cdot \ln(\text{kwartał})$$

Tabela 3. Porównanie modeli alternatywnych Comparison of alternative models.

Model	Correlation	R-Squared
Multiplicative	0,9843	96,89%
Square root-X	0,9695	94,00%
Linear	0,9365	87,70%

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych NBP przygotowane z wykorzystaniem pakietu statystycznego Statgraphics Plus 4.1.



Rysunek 1. Wykres modelu funkcji potęgowej.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych NBP przygotowane z wykorzystaniem pakietu statystycznego Statgraphics Plus 4.1.

Po dopasowaniu modelu zbudowano prognozę na bazie wyżej wymienionego otrzymanego modelu funkcji potęgowej.

Tabela 4. Przewidywane wartości. Predicted values

Predicted		Prediction limits		Confidence limits	
X	Y	Lower	Upper	Lower	Upper
1,0	3720,26	2916,73	4745,15	3290,65	4205,96
28,0	19052,0	15316,9	23697,9	17962,8	20207,2
29,0	19382,5	15577,3	24117,2	18251,6	20583,5
30,0	19707,3	15832,9	24529,7	18534,6	20954,2

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych NBP przygotowane z wykorzystaniem pakietu statystycznego Statgraphics Plus 4.1.

Jak wynika z powyższej tabeli przewidywana wartości liczby wyemitowanych kart na 4 kwartał 2005 (obserwacja  $x = 29$ ), jest równa 19382,5 tysiące a na pierwszy kwartał 2006 (obserwacja  $x = 30$ ) wynosi 19707,3 tysiące. Zostały tutaj wyznaczone także przedziały tolerancji dla możliwych nowych obserwacji oraz przedziały ufności dla oczekiwanej wartości liczby wyemitowanych kart na poziomie ufności  $1-\alpha = 0,99$ .

W świetle przeprowadzonej analizy mamy większe zaufanie do prognoz wykorzystujących funkcję potęgową. Pełna weryfikacja przedstawionych prognoz z pewnością będzie możliwa po zebraniu danych z końca IV kwartału 2005 oraz I kwartału 2006.



## PROGNOZA LICZBY EMITOWANYCH KART WIRTUALNYCH

Pionierskim bankiem, który zaoferował w Polsce kartę wirtualną był Invest-Bank S.A. Produkt pojawił się na rynku w listopadzie 2000 roku. Następna w kolejności była karta PKO BP S.A., która ukazała się w drugiej połowie 2001 roku. Trochę później, karty wirtualne zaoferował również mBank oraz MultiBank. W chwili obecnej dostępne są jedynie karty mBanku i Multibanku. PKO BP oraz Invest-Bank S.A. nie oferują już takich kart.

Karty wirtualne w statystykach wyemitowanych kart prowadzonych przez Narodowy Bank Polski pojawiły się dopiero w 3 kwartale roku 2001. Liderem bankowości wirtualnej w tym zakresie jest mBank.

Na podstawie szeregu czasowego liczby wyemitowanych kart wirtualnych, w układzie kwartalnym, od III kwartału 2001 do III kwartału 2005, podjęto próbę zbudowania prognozy. Oczywiście autorzy mają świadomość faktu, że szereg jest stosunkowo krótki (17 obserwacji). Nie mniej podjęte analizy pokazały, że tym razem model liniowy, który najlepiej opisuje tendencje emisji kart wirtualnych, może być uznany za istotny na poziomie istotności  $\alpha = 0,01$ , dając najlepsze dopasowanie przy współczynniku determinacji równym 74,8%, co w takiej wielkości wyjaśnia zmiany w liczbie wyemitowanych kart wirtualnych.

Na podstawie dopasowanego, liniowego modelu zbudowano prognozę na kolejne kwartały, co zostało zaprezentowane w tabeli 5 oraz tabeli 6.

Tabela 5. Analiza regresji (Regression analysis - Linear model:  $Y = a + b \cdot X$ )

Dependent variable: liczba kart wirtualnych				
Independent variable: kwartał				
		Standard	T	
Parameter	Estimate	Error	Statistic	P-Value
Intercept	-3,39686	3,11971	-1,08884	0,2934
Slope	2,03362	0,304453	6,67961	0,0000

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych NBP przygotowane z wykorzystaniem pakietu statystycznego Statgraphics Plus 4.1.

Tabela 6. Przewidywane wartości (Predicted values)

		99,00%		99,00%	
		Prediction limits		Confidence limits	
X	Y	Lower	Upper	Lower	Upper
17,0	31,1748	11,1946	51,1549	22,7589	39,5907
18,0	33,2084	12,8887	53,5281	24,0155	42,4013
19,0	35,242	14,5494	55,9346	25,2519	45,2321

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych NBP przygotowane z wykorzystaniem pakietu statystycznego Statgraphics Plus 4.1.

Podobne analizy zostały przeprowadzone dla wartości transakcji w PLN oraz liczby transakcji, a także korelacji między nimi. Otrzymano równie ciekawe prognozy, które ze względu na ograniczenia objętości artykułu będą przedstawione tylko w prezentacji.

## PODSUMOWANIE

W latach dziewięćdziesiątych minionego wieku wiodące firmy na świecie zaczęły zamieniać dotychczasową orientację marketingową ku orientacji rynkowej<sup>15</sup>. Zmiany te wymuszone zostały przez walkę konkurencyjną, a umożliwione przez postęp technologiczny i zwiększającą się dostępność informacji oraz dostępność nowych rynków, m.in. w krajach Europy Środkowo-Wschodniej. Bez wątpienia Internet wymusił na bankach zmianę strategii marketingowych oraz stworzył nowe pole konkurencji. Z powodu rozwoju bankowości internetowej doszło już do znaczących zmian na polskim rynku bankowym. Niekwestionowany lider bankowości detalicznej - bank PKO BP - by wzmocnić swoją ofertę internetową przejął w listopadzie 2002 roku działającą wówczas zaledwie od półtora roku wirtualny bank Inteligo<sup>16</sup>. A specjalizujący się wcześniej w bankowości korporacyjnej BRE Bank za sprawą wirtualnego banku mBanku - obsługującego obecnie ponad 1 mln klientów i zarządzającego aktywami wynoszącymi niemal 4 mld PLN<sup>17</sup> - stał się jednym z ważniejszych graczy na rynku bankowości detalicznej. Kolejne istotne zmiany na polskim rynku bankowym na pewno przed nami.

## LITERATURA

- Bloor R., (2001) Wirtualny b@zar, Wydawnictwo K.E. Liber, Warszawa.  
 Chmielarz W., (1999) Systemy elektronicznej bankowości i cyfrowej płatności, Wyższa Szkoła Ekonomiczno-Informatyczna, Warszawa.  
 Gospodarowicz A., (2002) Technologie informatyczne w bankowości., Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.  
 Janc A., Kotliński G. (1999) Determinanty wykorzystania bankowości elektronicznej w rozwoju wybranych usług bankowych., w. Zastosowania rozwiązań informatycznych w bankowości, Wrocław.  
 Kisiel M., (2005) Internet a konkurencyjność banków w Polsce., Warszawa.  
 Lambin J.- J., (2001) Strategiczne zarządzanie marketingowe., Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

---

<sup>15</sup> Por. Lambin J.- J., "Strategiczne zarządzanie marketingowe", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001 r., s. 48.

<sup>16</sup> "O Inteligo", Inteligo, witryna [http://www.inteligo.pl/infosite/html/oInteligo\\_o-inteligo.htm](http://www.inteligo.pl/infosite/html/oInteligo_o-inteligo.htm)

<sup>17</sup> "Milion klientów na 5 urodziny", mBank, 2005.11.23, witryna [http://media.mbank.pl/notatka\\_47193.html](http://media.mbank.pl/notatka_47193.html)

- Materiały NBP, System płatniczy w Polsce, październik 2002.
- Mattelart A., (2004) Społeczeństwo informacji., Towarzystwo Autorów i Wydawców Prac Naukowych UNIVERSITAS, Kraków.
- Niedźwiecki G., Parlińska M., (2004) Integracja usług bankowych w jednoczącej się Europie. w. Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – IV. Red. A. Orłowski, Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Parlińska M., (2002) Dystrybucja informacji w wirtualnym środowisku., Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Porębska-Miąc T., (2000) Bankowość elektroniczna jako element e-biznesu. w: Zastosowania rozwiązań informatycznych w bankowości. red. A. Gospodarowicz, Wydawnictwo AE, Wrocław.
- Trejderowski T., (2002) Po prostu Internet, Wydawnictwo HELION, Warszawa.

### **Forecasting the number of the emitted payment cards**

**Summary:** The development of modern technologies promoted the idea of the information society. Despite different meanings of this concept, many of nations, as well as the European Union itself, recognised the development of the information society as its long-term strategy goal. Access to information and growth of the role of communication in society and economy mean a substantial change in the approach to the mission concept and marketing strategies in business, concentrating on chances given by the Internet and the economy of network.

**Key words:** Electronic banking, internet banking, payments carts, virtual carts.

Robert Pietrzykowski, Paweł Kobus  
Katedra Ekonometrii i Informatyki, SGGW  
e-mail: rpietrzykowski@mors.sggw.waw.pl

## ZASTOSOWANIE MODYFIKACJI METODY K-ŚREDNICH W ANALIZIE PORTFELOWEJ.

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono modyfikację metody k - średnich oraz jej zastosowanie do analizy spółek giełdowych notowanych na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych w roku 2004. W podziale na grupy uwzględniono 206 spółek, które grupowano ze względu na najczęściej wykorzystywane wskaźniki finansowo - ekonomiczne.

**Słowa kluczowe:** analiza portfelowa, analiza skupień, metoda k – średnich,

### WSTĘP

Prognozowanie w analizie finansowej spółek odbywa się zwykle na podstawie danych historycznych. Zwykle wykorzystuje się ceny poszczególnych akcji aby wnioskować o ich zakupie bądź sprzedaży. Jednak oprócz tych danych wykorzystuje się również inne wskaźniki, które określają kondycję finansową spółki. W podejmowaniu trudnych dla inwestora decyzji wykorzystuje się różne metody statystyczne. Ze względu na złożoność problemu i branie pod uwagę wielu wskaźników, rozważa się wielowymiarowe metody statystyczne i tak do lat osiemdziesiątych najbardziej popularną metodą była analiza dyskryminacyjna. W latach dziewięćdziesiątych zaczęto stosować metody regresji logistycznej oraz sieci neuronowych. Natomiast w ostatnich latach wykorzystuje się metody taksonomiczne takie jak: analiza skupień, analizy k-średnich i inne.

W pracy zaprezentowano modyfikację metody k-średnich, którą zastosowano do podziału spółek giełdowych ze względu na najczęściej wykorzystywane wskaźniki w analizie fundamentalnej.

### METODA K-ŚREDNICH.

Metoda k – średnich należy do metod podziałowych analizy skupień. Metody podziałowe polegają na dzieleniu całego zbioru obiektów zgodnie z ogólną zasadą maksymalizacji wariancji pomiędzy poszczególnymi grupami, przy jednoczesnej minimalizacji wariancji wewnątrz badanych grup. Idea metody k-średnich została opracowana w latach pięćdziesiątych przez T. Daleniusa, który przedstawił iteracyjną procedurę podziału populacji na k grup, tak by zminimalizować wielkość wewnątrzgrupowej wariancji. D.R.Cox [Cox, 1957]

w swojej pracy podał funkcję mierzącą wielkość strat związanych z podziałem obiektów na  $k$  grup według jednowymiarowej zmiennej o rozkładzie normalnym. Uogólnienie dla przypadku wielowymiarowego przedstawił G. S. Sebestyen [Sebestyen, 1962]. Autorstwo metody  $k$ -średnich, przypisuje się jednak J. McQueen'owi [McQueen, 1967], który rozpatrywał efektywność tejże metody z punktu widzenia losowego doboru obiektów do wyróżnionych grup. [Grabiński, 1992].

Metoda  $k$ -średnich należy do metod optymalizacyjno-iteracyjnych. Istota tej grupy metod polega na tym, iż optymalizowana jest pewna funkcja jakości podziału obiektów. Funkcję kryterium można zapisać w postaci formuły minimalizującej ślad macierzy wariancji wewnątrzgrupowej lub maksymalizującej ślad macierzy wariancji międzygrupowej [Gatnar, 1998]. Metodę  $k$ -średnich wykorzystuje się do analizy dużych ilości danych, a jej istota polega na zredukowaniu dużej ilości nagromadzonych informacji do kilku podstawowych kategorii, co pozwala na łatwe zorientowanie się w danym zjawisku, wyciągnięcie wniosków uogólniających. Zastosowanie metody  $k$ -średnich daje możliwość ustalenia typologii w zakresie badanych obiektów oraz określenie jednorodnych przedmiotów analizy, w której łatwiej jest wyodrębnić czynniki systematyczne oraz ewentualne związki przyczynowo-skutkowe. Jej zastosowanie może prowadzić do zmniejszenia nakładów czasu i kosztów badań przez ograniczenie rozważań do najbardziej typowych faktów, zjawisk czy obiektów przy stosunkowo niewielkich stratach informacji. Działanie metody  $k$ -średnich można zawrzeć w następujących punktach. Punktem wyjścia jest wstępny podział zbioru na  $k$  skupień, arbitralnie wrzucając obiekty do tych grup. Poszukuje się takiego przypisania obiektów do grup, by w ich obrębie osiągnąć maksymalne podobieństwo przy zachowaniu maksymalnych różnic międzygrupowych. Algorytm stosuje się do momentu otrzymania takiego podziału jednostek, aby uzyskać jak najbardziej istotne wyniki analizy wariancji. Problem z jakim spotyka się badacz w analizie  $k$ -średnich to ustalenie wstępnego podziału na liczbę skupień. Podziału tego można dokonać w sposób losowy lub opierając się na ocenie ekspertów, która wynika z intuicji lub znajomości przedmiotu badań. Można również wykorzystać inne metody taksonomiczne.

Ogólna idea tych procedur polega na poprawianiu danego podziału obiektów z punktu widzenia odpowiednio zdefiniowanego kryterium optymalności podziału. Zakładamy, iż  $k \in (2, n-1)$ , gdzie  $n$  jest liczbą obiektów.

Wariant metody  $k$ -średnich można opisać następująco. Niech  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_n$  będą obiektami  $p$  cechowymi. (to znaczy  $\mathbf{X}_1 = [x_{11}, \dots, x_{1m}]$ ). Na początku ustala się wyjściową macierz środków ciężkości grup

$$B = [\bar{x}_{lj}] \quad (l = 1, \dots, p; j = 1, \dots, m) \quad (1)$$

gdzie  $m$  – liczba zmiennych

Dla każdej z grup obliczamy średnią (położenie centroidu). Wyznacza się odległości pierwszej nieprzydzielonej jednostki od środków ciężkości

poszczególnych grup i kwalifikuje ją do grupy najbliższej położonej. Następnie wyznacza się wartość wyjściowego błędu podziału obiektów między k grup

$$e = \sum_{i=1}^n d_{il}^2 \quad (2)$$

gdzie:  $d_{il}^2$  – odległość Euklidesa między i-tym obiektem a najbliższym l-tym środkiem ciężkości:

$$d_{il}^2 = \sum_{j=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_{lj})^2 \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

Zestaw odległości euklidesowych obliczany jest pomiędzy poszczególnymi elementami zbioru a kolejnymi centroidami. Dla pierwszego obiektu określa się zmiany błędu podziału wynikające z przyporządkowania go kolejno do wszystkich aktualnie występujących grup:

$$\Delta e_l^{(1)} = \frac{n_k d_{1k}^2}{n_k + 1} - \frac{n_{k_1} d_{1k_1}^2}{n_{k_1} - 1} \quad (4)$$

gdzie:  $n_k$  – liczebność k - tej grupy,  $d_{1k}$  – odległość pierwszego obiektu od środka ciężkości k - tej grupy,  $n_{k_1}$  – liczebność grupy zawierającej pierwszy obiekt,  $d_{1k_1}$  – odległość pierwszego obiektu od najbliższego środka ciężkości.

Jeżeli minimalna wartość wyrażenia  $\Delta e_l^{(1)}$  dla wszystkich  $l \neq l_1$  jest ujemna, to pierwszy obiekt przypisuje się do grupy, dla której  $\Delta e_l^{(1)} = \min$ . Następnie powtarza się obliczenia to znaczy od nowa oblicza się środki ciężkości grup **B** uwzględniając dokonaną transformację obiektu oraz wyznacza aktualną wartość błędu podziału. Jeżeli minimalna wartość wyżej przedstawionego wyrażenia jest dodatnia lub równa zero, to nie dokonujemy już żadnych zmian. Operacje opisane powyżej powtarza się dla każdego następnego obiektu. Gdy nie obserwujemy już żadnych przesunięć obiektów z grupy do grupy, czyli gdy każdy element jest w grupie, w której centroid jest mu najbliższy, wówczas postępowanie się kończy w pierwszej wersji podziału. W przeciwnym wypadku rozpoczyna się następną iterację, aż do momentu, w którym ich liczba nie przekroczy zadanej wartości [Zeliaś i in., 1989, Witkowska, 2002]. Istnieje wiele modyfikacji tej metody niektóre z nich można znaleźć u Grabińskiego, Zeliasia i innych. [Grabiński, 1992, Zeliaś i in., 1989]

## MODYFIKACJA METODY K - ŚREDNICH.

Obserwowane obiekty  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  są obiektami p cechowymi, to znaczy  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{ip})$ , gdzie  $i = 1, \dots, N$ . Ponieważ liczba k skupień jest z góry ustalona, szukamy najlepszego podziału  $\mathbf{J}(k) = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ , którym będzie podział zbioru  $\{1, \dots, N\}$  na k rozłącznych podzbiorów. Wybieramy najlepszy spośród wszystkich uzyskanych podziałów, to znaczy taki, dla którego zróżnicowanie

wewnątrzgrupowe było najmniejsze oraz zmienność pomiędzy grupami była jak największa czyli oznaczając taki podział przez  $\mathbf{J}^*(k)$  (to taki podział na  $k$  grup, że zróżnicowanie międzygrupowe w stosunku do zróżnicowania wewnątrzgrupowego jest największe.)

Jako miernik zróżnicowania międzygrupowego przyjęto:

$$S_{A(J(k))}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \left\| \bar{x}_i - \bar{x}_{J(k)} \right\|^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k d_i^2 \quad (5)$$

gdzie:

$$\bar{x}_{J(k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_{G_i} \quad - \text{środek ciężkości proponowanego podziału } J(k)$$

$$\bar{x}_{G_i} \quad - \text{środek ciężkości } i\text{-tej grupy.}$$

$$\|X\| \quad - \text{oznacza normę euklidesową wektora } \mathbf{X}_1 = (x_{i1}, \dots, x_{ip}) \text{ to}$$

$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^p X_i^2$$

Jako miernik zróżnicowania wewnątrzgrupowego zaproponowano:

$$S_{E(J(k))}^2 = \frac{1}{N-k-1} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{k_i} \|x_{ij} - \bar{x}_{G_i}\|^2 \right) = \frac{1}{N-k-1} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{k_i} d_{ij}^2 \right) \quad (6)$$

Wtedy  $\mathbf{J}^*(k)$  będzie takim podziałem na  $k$  grup, że:

$$\frac{S_{A(J^*(k))}^2}{S_{E(J^*(k))}^2} = \max_{J(k)} \frac{S_{A(J(k))}^2}{S_{E(J(k))}^2} \quad (7)$$

oraz niech

$$f(k) = \frac{S_{A(J^*(k))}^2}{S_{E(J^*(k))}^2} \quad (8)$$

Funkcja kryterium to ogólna suma odległości wewnątrzgrupowych liczonych od środka grup, których współrzędne wyznaczono jako średnie arytmetyczne wartości cech obiektów należących do danej podgrupy. Jako optymalny podział  $\mathbf{J}^*(k)$  obiektów na skupienia wybiera się ten, dla którego funkcja określona wzorami 7, 8 osiąga maksimum [Pietrzykowski i in., 2005].

## DANE DOŚWIADCZALNE.

W analizie wykorzystano spółki notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych od stycznia do grudnia 2004. Pominięto spółki, które w badanym okresie zostały wycofane z notowań, oraz takie, dla których

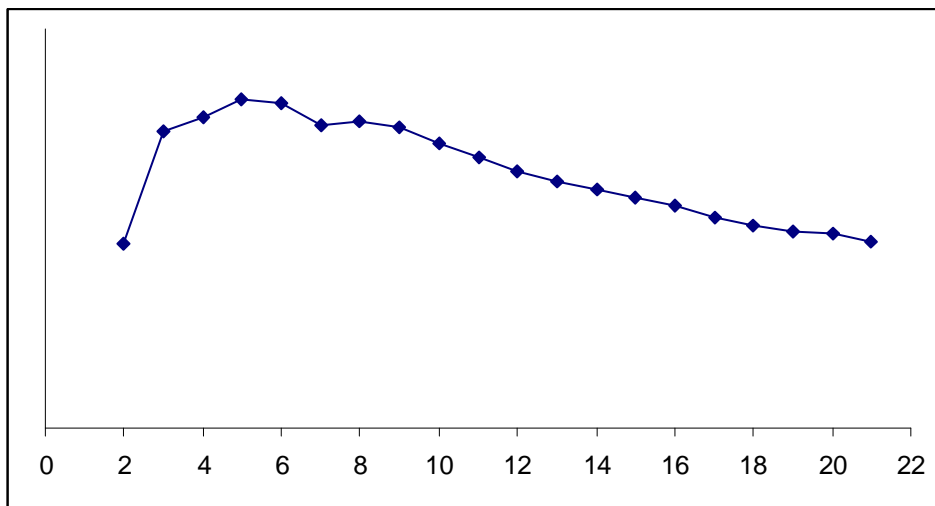
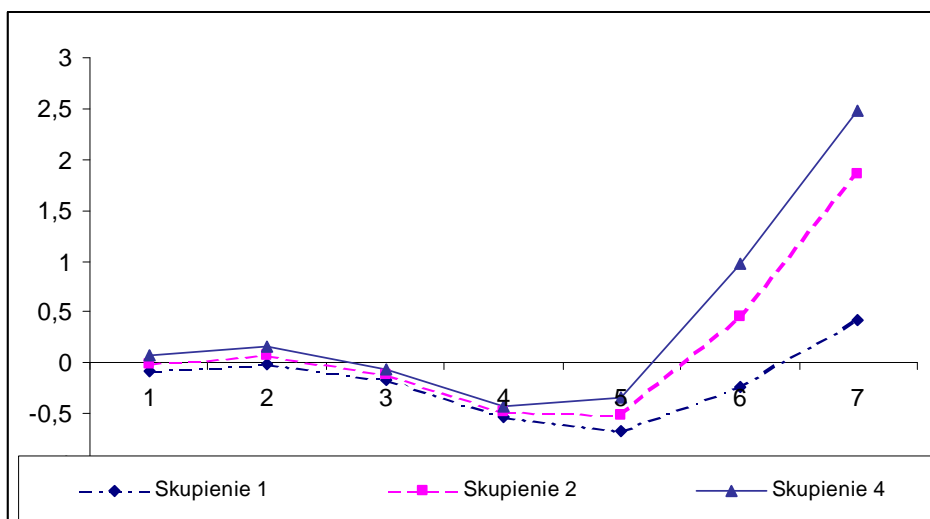
dane ekonomiczno – finansowe były niekompletne. W rezultacie analizę przeprowadzono na 206 spółkach giełdowych.

Jako zestaw zmiennych charakteryzujących decyzje inwestycyjne oraz ryzyko ich podejmowania wykorzystuje się pięć grup wskaźników opisujących kondycję ekonomiczno – finansową firmy. Jako zmienne grupujące do analizy wybrano siedem wskaźników ekonomiczno-finansowych. Powodem wybrania takiej kombinacji jest ich duże zróżnicowanie jak i stosunkowo dokładne odzwierciedlenie kondycji finansowej firmy. Wybrane wskaźniki finansowe to miary klasyczne, powszechnie stosowane do określenia kondycji finansowej firmy. Dzięki nim można zidentyfikować mocne i słabe strony działalności gospodarczej firmy. Są one również źródłem informacji o zagrożeniach i szansach rozwoju strategicznego firmy. Największą wadą jest fakt, iż mają znaczenie historyczne. Z reguły wyznacza się je na koniec roku obrachunkowego lub kwartalnie, a w przyszłości ich znaczenie z miesiąca na miesiąc spada. W dalszej analizie wykorzystano następujące wskaźniki ekonomiczno – finansowe (w nawiasie podano przyjęte oznaczenia wskaźników): ROI (W1); ROE (W2); ROA (W3); wskaźnik rentowności sprzedaży (W4); wskaźnik zyskowności netto (W5); wskaźnik kapitałowy (W6); obrotowość (produktywność) aktywów ogółem (W7). Wskaźniki W1 i W4 należą do grupy wskaźników zwrotu z inwestycji. Wskaźniki W2, W3 i W5 zalicza się do grupy wskaźników zyskowności. Wskaźnik W6 to wskaźnik zaliczany do grupy wskaźników kapitałowych, a wskaźnik oznaczony jako W7 należy do grupy wskaźników aktywności gospodarczej.

## WYNIKI

Na wykresie 1 przedstawiono wartości funkcji  $f(k)$ , gdzie na osi poziomej znajdują się liczby skupień. Jak widać na wykresie funkcja osiągnęła maksimum dla pięciu skupień. Z badań przeprowadzonych dla polskiego rynku kapitałowego wynika, że dobrze zdywersyfikowany portfel otrzymuje się dla akcji z przedziału od pięciu do piętnastu spółek dlatego maksimum funkcji szukano w takim zakresie.



Wykres 1. Wartości funkcji  $f(k)$ 

Wykres 2. Średnie dla trzech skupień.

Powstaje problem jak wybrać spółki z poszczególnych skupień do naszego portfela akcji. Jak wspomniano wcześniej pomijamy te skupienia, w których jest jedna bądź dwie spółki. Pozostaje więc wybór spółek z trzech skupień. Problemem jest jednak, które spółki wybrać. Na wykresie 2 przedstawiono, wpływ poszczególnych wskaźników na przydzielenie spółek do odpowiednich skupień. Jak można zauważyć wskaźnik który najbardziej różnicował otrzymane podziały to obrotowość (produktywność) aktywów ogółem (W7), chociaż można powiedzieć, że podobnie działał wskaźnik kapitałowy (W6).

W tabeli 1 przedstawiono spółki, które zostały przydzielone do poszczególnych skupień. Najmniej liczne skupienia to skupienie trzecie i piąte. W skupieniu trzecim znalazły się dwie spółki, a w skupieniu piątym tylko jedna. Spółki, które znalazły się w tych skupieniach są spółkami albo bardzo dobrymi lub bardzo słabymi ze względu na badane wskaźniki ekonomiczne. W skupieniu pierwszym, drugim i czwartym znalazły się pozostałe spółki. W poszczególnych skupieniach znalazły się spółki, które były podobne ze względu na wskaźniki finansowo-ekonomiczne, a nie koniecznie podobne ze względu na prowadzona działalność gospodarczą lub oddziaływanie na rynku gospodarczym. Z tych skupień najbardziej liczne jest skupienie czwarte.

Tabela 1. Spółki przydzielone do poszczególnych skupień przy podziale  $k = 5$ .

Numer skupienia	Nazwa Spółki
Skupienie pierwsze	PRÓCHNIK; AMREST; BICK; BYTOM; ELEKTROEX; IBSYSTEM; MOSTALZAB; PEMUG; SWARZĘDZ; SWISSMED; WFM OBORNIKI;
Skupienie drugie	ATLANTIS; BUDOPOL; TELL; TIM; PGF; AMPLI; KAREN NOTEBOOK; NEONET; JAGO; INDYKPOL; ZREW; ORFE; ODLEWNIE; PROVIMI-ROLIMPEX; FARMACOL; ALMA MARKET; STALPRODUKT; CSS; INTERIA; SOKOŁÓW; ŚRUBEX; MCI; POLMOS BIA.; MEDIATEL; TORFARM; ELDORADO; EUROCASH; ROPCZYCE; WAWEL; PROSPER; IGROUP; OPTIMUS; MACROSOFT; DECORA; LENA; STALPROFIL; CAPITAL P.; PROJPRZEM;
Skupienie trzecie	ŁDA INVEST; FON
Skupienie czwarte	EKODROB; TUP; AL PRAS; PPWK; RESBUD; IDMSAPL; FAMEG; EUROFAKTOR; TVN; PEP; POLNORD; PROCHEM; NKT CABLES; STRZELEC; STALEXPORT; ELMONTWAR; ECHO; PKN ORLEN; POLNA; GANT; ZETKAMA; TRAVELPLANET; RMF FM; HOOP; MOSTALWAR; PROKOM; TRAS-INTUR; BUDIMEX; KOPEX; BEEF SAN; EFEKT; BARLINEK; NAFTOBUDOWA; REDAN; VARIANT; MIESZKO; SOFTBANK; TP SA; BAUMA; 7BULLS.COM; POLIGRAFIA; NOVITA; KOGENERACJA; TECHMEX; PBG; GRAAL; FERRUM; BETACOM (); INTERCARS; RELPOL; KRUK; CERSANIT; EMAX; ELBUDOWA; COMARCH; PRATERM; MUZA; AMICA; KOELNER; WÓLCZANKA; FASING; CENSTALGD; KROSNO; BĘDZIN; RAFAKO; KOZIENICE; ŻYWIEC; MEWA; LPP; KGHM; WANDALEX; KRUSZWICA; HYGIENIKA; ZTS_ERG; CIECH; WISTIL; COMPUTERLAND; AQUA; IRENA; PEPEES; KOMPAP; MNI; IMPEXMETAL; PAGED; WSiP; BIOTON; POLLENA; ARTMAN; MASTERS; SIMPLE; GROCLIN; ELSTAR OILS; PLASTBOX; ELZAB; POLMOS LUB.; APATOR; FORTE; HOGA; BEST; BORYSZEW; HUTMEN; CCC; ORBIS; ODRATRANS; BOLESŁAWIEC; IMPEL; GRUPA ONET; LUBAWA; DWORY; JUTRZENKA; REMAK; AGORA; SANOK; GRAJEWÓ; KĘTY; ŚNIEŻKA; SPIN; DUDA; ZEG; ATM GRUPA; FAM; WILBO; VISTULA; MILMET; DĘBICA; ATM; SANWIL; COMP; OZC; SKOTAN; PONARFEH; JELFA; LZPS PROTEKTOR; MPEC; ZELMER; SUWARY; POLICE; LOTOS; JCAUTO; MONDI; LENTEX; TALEX; NETIA; PUŁAWY; DGA; HYDROTOR; POLCOLORIT; PERMEDIA; ABG STER-PROJEKT; OPOCZNO; MENNICA; PEKAES; NOWAGALA; UNIMIL; .
Skupienie piąte	ELEKTRIM

Do portfela przyjęto te spółki, które najmniej różniły się od średnich odległości określających poszczególne wskaźniki ekonomiczne - finansowe ze szczególnym uwzględnieniem wskaźnika obrotowość (produktywność) aktywów ogółem. W efekcie uzyskano portfel składający się z pięciu spółek: Próchnik, Amrest, PGF, Mondy, Budimex.

## PODSUMOWANIE.

Metoda k-średnich jest pomocna w tworzeniu portfela akcji. Ze względu na pominięcie spółek ze skupień jedno i dwuelementowych, powstaje jednak problem wyboru akcji tak by zdywersyfikować portfel. Należy więc stwierdzić, że metoda k-średnich nie jest metodą która określa, które spółki powinny znaleźć się w portfelu. Można powiedzieć, że jest ona prostym narzędziem dzięki któremu można przeprowadzać szybkie analizy wielowymiarowe. Zastosowanie modyfikacji tej metody pozwoliło określić na ile skupień podzielić badane obiekty. W standardowej metodzie k-średnich liczbę skupień przyjmujemy arbitralnie, a tym samym nie jesteśmy do końca pewni czy nasz podział można uznać za „najlepszy”. Dzięki tej metodzie udało się dobrać spółki, z różnym gałęzi gospodarki w oparciu o wskaźniki finansowo-ekonomiczne czyli oprócz dywersyfikacji poziomej uwzględniono również dywersyfikację pionową. Wybrane spółki wydają się być podobne ze względu na badane wskaźniki co można wpływać na dywersyfikację ryzyka portfela.

## LITERATURA

- Cox D.R. "Note of grouping", Journal of The American Statistical Association, 1957.  
 McQueen J. "Some methods for classification and analysis of multivariate observations", 5'th Berkaley Symposium on Mathematics, "Statistics and Probability", 1967.  
 Gatnar E. „Symboliczne metody klasyfikacji danych” PWN, Warszawa, 1998  
 Grabiński T. „Metody taksonometrii” wyd. Akademii Ekonomicznej w Krakowie, 1992  
 Pietrzykowski R., Zieliński W., Koziół D. „Wykorzystanie metody k-średnich w taksonomii portfela akcji” wyd. Wyższej Szkoły Ekonomiczno – Informatycznej, Warszawa, 2005, s. 3, 74-76  
 Sebestyen G.S. "Decision making process in pattern recognition", John Wiley and Sons, New York, 1962.  
 Witkowska D. Sztuczne sieci neuronowe i metody statystyczne. C. H. Beck, Warszawa 2002  
 Zeliaś A, Grabiński T, Wydmus S., Metody taksonomii numerycznej w modelowaniu zjawisk społeczno – gospodarczych PWN Warszawa, 1989

**Application of modify k-means method to portofolio analysis.**

**Summary:** In the paper propose some modification method of k-means to portofolio analysis. As an example, consider partitions into k clusters of 206 stocks for Warsaw Stock Exchange in 2004 year.

**Key words:** portofolio analysis, method k-means, cluster analysis.

Jacek Strojny  
Katedra Statystyki Matematycznej Akademii Rolniczej w Krakowie  
e-mail: rrstrojn@cyf-kr.edu.pl

## **PRZEWAGI KOMPARATYWNE A WYMIANA HANDLOWA PRODUKTAMI ROLNYMI KRAJÓW UE**

**Streszczenie:** Niniejsze badanie koncentruje się na konkurencyjności rolnictwa krajów wchodzących w skład obszaru gospodarczego UE. Założeniem analizy jest, że niezależnie od źródła przewagi komparatywnej w danej dziedzinie ostatecznie znajduje ona odbicie w wymianie handlowej z innymi krajami. Konkurencyjność uwidacznia się poprzez specjalizację produkcyjną.

**Słowa kluczowe:** przewaga komparatywna, konkurencyjność rolnictwa, kraje UE

### **WSTĘP**

Integracja gospodarki polskiej z rynkiem światowym oznacza zwiększoną intensywność konkurencji. Usprawiedliwia to rosnące zainteresowanie problematyką rywalizacji ekonomicznej. Dla produktów przemysłowych międzynarodowa konkurencyjność gospodarki jest bezpośrednim odzwierciedleniem struktury produkcji. W przypadku produktów pochodzenia rolniczego, gdzie mamy do czynienia z szerszym zakresem regulacji stosunków ekonomicznych ta zależność już nie jest tak oczywista.

Niniejsze badanie koncentruje się na konkurencyjności sektora rolno-żywnościowego, obserwowanej z perspektywy międzynarodowej wymiany handlowej produktami rolniczymi krajów wchodzących w skład obszaru gospodarczego UE. Założeniem analizy jest, że niezależnie od źródła przewagi komparatywnej w danej dziedzinie ostatecznie znajduje ona odbicie w wymianie handlowej z innymi krajami i pozwala na osiągnięcie korzystniejszego salda bilansu handlu zagranicznego w pewnych kategoriach produktowych. Konkurencyjność poszczególnych krajów uwidacznia się poprzez ich specjalizację produkcyjną.

### **OCENA KONKURENCYJNOŚCI GOSPODARKI: KWANTYFIKACJA KONKURENCYJNOŚCI**

Mimo iż zagadnieniu konkurencyjności rolnictwa od strony teoretycznej poświęciło wiele uwagi liczne grono badaczy, między innymi Woś (2001a i 2001b), to problemy związane z precyzyjnym jego zdefiniowaniem znajdują odzwierciedlenie w trakcie procesu kwantyfikowania zjawiska. Najczęściej wskaźniki konkurencyjności gospodarki spotykane w literaturze opisują jej wybrany aspekt. Zjawisko konkurencyjności wydaje się jednak cechować

wieloaspektowością. Tym niemniej do jego scharakteryzowania wykorzystuje się zarówno wskaźniki syntetyczne, jak i cząstkowe. Inna perspektywa klasyfikacji zagadnienia kwantyfikacji problemu to rozróżnienie na mierniki ilościowe bądź opisowe, które jednak wprowadzają element subiektywizmu usprawiedliwianego intencją ujęcia kompleksowego problemu konkurencyjności. Przegląd stosownej literatury dostarcza wielu przykładów kategoryzacji mierników konkurencyjności gospodarki. Każda próba systematyzacji zawiera jednak w sobie jakiś element niedoskonałości. Misala (1995) proponuje ujęcie konkurencyjności w ramy wskaźników *ex post* oraz *ex ante*. Często spotykanym rozróżnieniem jest podział na wskaźniki cenowe i pozacenowe. Bieńkowski (1995) opowiada się za wyróżnieniem pięciu klas wskaźników konkurencyjności:

ogólnego rozwoju gospodarczego, struktury czynników wytwarzania i zmian strukturalnych, efektywności wykorzystania czynników wytwarzania, zaawansowania form instytucjonalnych gospodarki, międzynarodowej pozycji konkurencyjnej.

Mierniki ilościowe odwołują się do cech ilościowych i umożliwiają dokonanie porównań zachowujących walor obiektywności między obiektami i okresami czasu. Wskaźniki ilościowe mają charakter *ex post*. Cechują się one właściwościami umożliwiającymi ocenę ogólnej sytuacji ekonomicznej. Miejsce uzyskiwane w międzynarodowej wymianie gospodarczej w znacznym zakresie może być utożsamiane z ogólnym poziomem rozwoju gospodarczego. Wskaźniki handlu zagranicznego mogą być traktowane jako surogaty konkurencyjności międzynarodowej ponieważ rynki ponadnarodowe są trudniejsze od wewnętrznych.

## KONKURENCYJNOŚĆ A SPECJALIZACJA GOSPODARKI

Zagadnienia takie jak: kierunki specjalizacji gospodarki narodowej, przewagi komparatywne, konkurencyjność wzajemnie się przenikają w kontekście międzynarodowego podziału pracy, a w konsekwencji kształtu i rozmiaru międzynarodowej wymiany handlowej. Niniejsze opracowanie bazuje na wskaźniku specjalizacji poszczególnych branż gospodarki rolno-żywnościowej badanych obiektów. Jest to miernik ilościowy – wskaźnik udziału danego sektora w bilansie handlowym wymiany z zagranicą produktami rolnymi (CTB – contribution to trade balance<sup>1</sup>).

Korzyść komparatywna oznacza zdolność gospodarki danego kraju do produkowania określonego dobra bardziej efektywnie niż w innych państwach i wyraża się ona poprzez specjalizację eksportową. Zdolność ta jest determinowana przez relatywne wyposażenie w czynniki produkcji, technologie, przez strukturę kosztów produkcji, strukturę popytu, korzyści skali, itp. (Person, Salenbier 1983).

---

<sup>1</sup> CEPII, La mesure des avantages comparatifs révélés, Lafay 1997, Economie Prospective Internationale.

Bardziej dynamiczne podejście do zagadnienia obejmuje zasoby naturalne, infrastrukturę ekonomiczną, kapitał, technologie, kapitał ludzki, efektywną alokację zasobów, zdolność do generowania innowacji, zdolność do antycypowania zmieniających się warunków wewnętrznych i międzynarodowych (Bieńkowski 1988).

Specjalizacja interpretowana w tym kontekście również jako przewaga konkurencyjna, ma miejsce jeżeli kraj eksportuje większość swojej produkcji w jakiejś dziedzinie. W takich okolicznościach wskaźnik udziału grupy towarowej w bilansie handlowym (CTB) przyjmuje wartości dodatnie. Konsekwentnie, jeżeli większość popytu rynku krajowego w danej dziedzinie jest zaspokajana importem, można mówić o braku specjalizacji, której źródeł należy upatrywać w braku przewagi konkurencyjnej (komparatywnej) w danej branży. O takiej pozycji rozpatrywanej gałęzi gospodarki świadczy negatywna wartość wskaźnika CTB. Wskaźnik odnosi się do wielkości produktu krajowego brutto i jest wyrażony w jednostkach: 1000/PKB. Przyjmuje on postać:

$$CTB = \left[ \frac{((E_b - I_b) - ((E - I) \times (E_b + I_b)))}{(E + I)} \right] \times \frac{1000}{PKB} \quad (2.1)$$

gdzie:

- E – eksport produktów rolnych kraju
- I – import produktów rolnych kraju
- $E_b$  – eksport branży  $b$
- $I_b$  – import branży  $b$
- PKB – produkt krajowy brutto

Wskaźnik CTB porównuje bilans handlu zagranicznego produktami rolnymi dla danej branży, skorygowany wielkością PKB, z teoretycznym bilansem handlowym w sytuacji neutralnej – gdyby dla branży nie istniała przewaga komparatywna. Teoretyczny bilans handlowy jest wyznaczany dla sytuacji zakładającej brak specjalizacji. Specjalizacja utożsamiana jest z przewagą konkurencyjną. Sytuacja taka ma miejsce, gdy eksport kraju w danej dziedzinie wyraźnie przewyższa import.

## MATERIAŁ EMPIRYCZNY

Badaniu zostało poddanych 25 krajów członkowskich UE oraz Bułgaria i Rumunia jako państwa mające wkrótce do tego obszaru gospodarczego dołączyć. Z uwagi na swą specyfikę informacje dla Belgii i Luksemburga są prezentowane w formie zagregowanej. Dane statystyczne pochodzą z FAO (FAOSTAT database) i obejmują okres 1993-2004. Materiał empiryczny odwołuje się do 154 kategorii produktowych powiązanych z gospodarką rolno-żywnościową, które są przedmiotem wymiany międzynarodowej: importu i eksportu. Oryginalne dane źródłowe zostały wyrażone w jednostkach wartościowych. Wszystkie produkty zostały pogrupowane w szersze kategorie, dla których obliczono wskaźniki

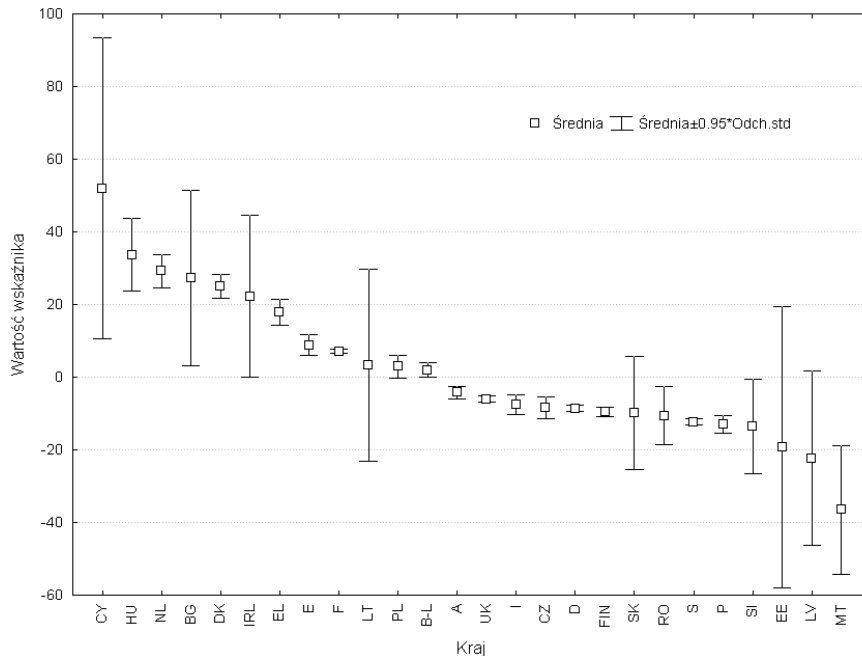
specjalizacji branżowej. Kategorie produktowe, które poddano badaniu to: zboża i produkty zbożowe, ziemniaki i skrobia ziemniaczana, owoce, warzywa, kawa, herbata, kakao z przetworami, nasiona roślin strączkowych, orzeszki ziemne, pistacje, migdały, kasztany, rośliny oleiste, tłuszcze roślinne, rośliny przemysłowe, wybrane przetworzone produkty oparte na surowcach roślinnych, mięso, przetwory mięsne, produkty mleczne i jaja. W ramach kategorii przetworzone produkty oparte na surowcach roślinnych zebrane zostały wyroby charakteryzujące się nie tylko wysokim stopniem przetworzenia surowców rolniczych, ale również wywierające znaczny wpływ na wyniki finansowe nie tylko branż, których dotyczą, ale całości gospodarki rolno-żywnościowej. Znalazły się tutaj: cukier, wino i piwo, wyroby tytoniowe.

## SZACOWANIE KONKURENCYJNOŚCI SEKTORÓW GOSPODARKI ŻYWNOŚCIOWEJ KRAJÓW UE

Agregacja wymiany handlowej produktami pochodzenia rolniczego badanych krajów stanowiła podstawę oszacowania ogólnej miary ich pozycji konkurencyjnej. Rys. 1 prezentuje uśrednione za okres 1993-2004 wskaźniki specjalizacji eksportowej traktowane również jako wskaźniki przewagi komparatywnej sektorów rolniczych studiowanych obiektów. Na wykresie oprócz estymatorów tendencji centralnej (średnie) pozwalających na usunięcie wpływu wahań udziału w międzynarodowej wymianie handlowej produktami rolnymi (bardzo podatnymi na tą właściwość) zaznaczone zostały także oszacowania rozrzutu miernika. Dla utrzymania wysokiej pozycji konkurencyjnej fundamentalne znaczenie ma nie tylko bezwzględna wysokość wskaźnika lecz także zdolność do utrzymania tej przewagi w czasie. Mimo iż w rolnictwie warunki klimatyczne w znacznym zakresie determinują warunki produkcji badany aspekt konkurencyjności stymulowany jest raczej rodzajem rynku, na którym dany kraj lokuje przeważającą część swojej produkcji – wyższy stopień przetworzenia produkcji generalnie wpływa na stabilizację pozycji konkurencyjnej.

Miernik ogólny konkurencyjności (rys. 1) pozwala na wyróżnienie w UE niewielkiej liczby krajów, które zyskały w skali międzynarodowej realną przewagę komparatywną (mierzoną efektami w wymianie handlowej) dla swoich sektorów rolnych. Mimo iż można wymienić w tym miejscu Cypr, Węgry, Holandię Bułgarię, Danię, Irlandię Grecję, Hiszpanię i Francję to jedynie kraje wywodzące się z dawnej „piętnastki” w okresie analizy utrzymywały swoją przewagę na stabilnym poziomie. Litwa, Polska i Belgia z Luksemburgiem odnotowały w tym zakresie niewielkie pozytywne wartości miernika. Jednak dla Polski i Litwy odnotowano znaczne zakresy wahań współczynników CTB. Pozostałe państwa posiadały uśrednione wskaźniki poniżej zera, co należy interpretować jako brak przewagi komparatywnej dla rolnictwa tych krajów na płaszczyźnie międzynarodowej. Uwagę należy zwrócić jednak na fakt, że niektóre kraje

zachodnioeuropejskie mimo niekorzystnych warunków klimatycznych do produkcji rolnej (np.: Finlandia, Szwecja) lub niewielkim areale ziemi wykorzystywanej rolniczo przypadającym na jednego mieszkańca zdołały uzyskać silniejszą stabilniejszą pozycję w handlu zagranicznym produktami rolnymi w porównaniu do „nowych” krajów członkowskich.



Rysunek 1. Uśrednione wskaźniki CTB dla produktów pochodzenia rolniczego za okres 1993-2004

\* Objaśnienia symboli krajów w tab.2.

Rozpatrując najważniejsze składowe (produkcja: zwierzęca, roślinna, przetworzona) zidentyfikowanych powyżej pozycji konkurencyjnych należy stwierdzić, że niewiele krajów z obszaru gospodarczego UE posiada przewagi komparatywne (równoznaczne w tym wypadku z dodatnim bilansem wymiany zagranicznej) w zakresie rolniczych produktów roślinnych (rys. 2). Konsekwentnie do przyjętej metodologii, do krajów wyspecjalizowanych w produkcji w produkcji roślinnej zaliczyć można Bułgarię i Grecję. Dodatni indeks o niższym poziomie posiada w tej dziedzinie również Rumunia. Pozostałe państwa posiadają ujemne wartości wskaźnika CTB (o różnym nasileniu) dla wymiany handlowej produktami pochodzenia roślinnego. Znacznie większa liczba krajów zdołała uzyskać korzystną pozycję w zakresie wymiany wybranymi produktami przetworzonymi opartymi na surowcach roślinnych. Szczególnie dotyczy to Portugalii i Holandii, krajów z niskimi ujemnymi indeksami dla produktów roślinnych i wysokimi pozytywnymi dla produktów przetworzonych. Zupełnie odmiennie ukształtowały



się relacje konkurencyjne w zakresie międzynarodowego obrotu produktami pochodzenia zwierzęcego. Na tym rynku w wyrażnie niekorzystnym konkurencyjnie położeniu są wyłącznie Grecja i Malta. Nieznaczne ujemne wartości omawianego indeksu posiadają także Włochy, Cypr, Wielka Brytania, Portugalia i Szwecja. Pozostałe państwa dla produktów zwierzęcych odnotowały pozytywne średnie wartości wskaźnika CTB. Szczególnie wysokie wartości miernika posiadają Dania, Litwa, Irlandia, Estonia, Holandia oraz w mniejszym nasileniu Węgry i Belgia z Luksemburgiem. Nadmienić warto, że zróżnicowanie stopnia specjalizacji w kategorii produktów zwierzęcych jest nieporównywalnie większe niż w obrębie produktów pochodzenia roślinnego.

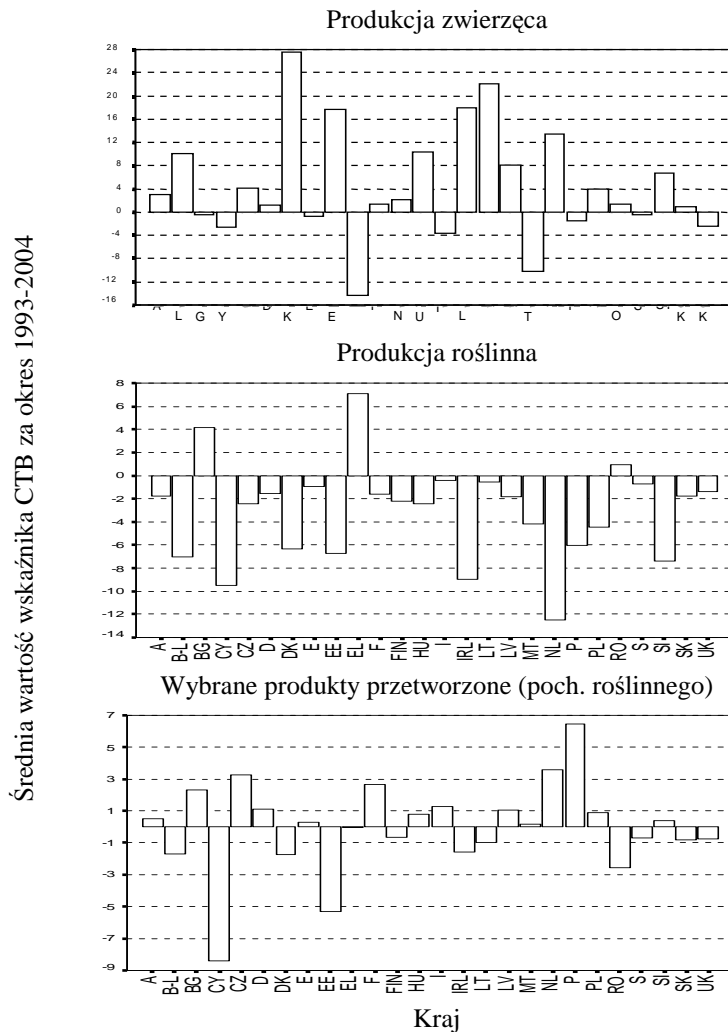
Spośród trzynastu kategorii produktowych stanowiących podstawę analizy konkurencyjnej została wydzielonych metodą analizy czynnikowej (techniką głównych składowych) mniejsza liczba pięciu agregatów – wzorców specjalizacji krajów UE w handlu międzynarodowym produktami pochodzenia rolnego. Redukcja wymiarów badania metodą czynnikową przeprowadzona została na wskaźnikach CTB. Tab. 1 zawiera jej szczegółowe wyniki i umożliwia powiązanie wyjściowych grup produktowych z otrzymanymi drogą analityczną agregatami. Wysokie wartości (wyróżniona czcionką) dla danej grupy produktowej na poszczególne składowe pozwalają na wiązanie między ze sobą tych kategorii. Niskie wartości ujemne (zaciemnione pola) sugerują brak związku odpowiedniego typu produktu z rozważaną składową.

Tabela 1. Zredukowany obraz wymiany handlowej krajów UE – macierz rotowanych składowych

Grupa produktowa	Składowa				
	1	2	3	4	5
wybrane przetworzone produkty	<b>0,865</b>	-0,087	-0,026	-0,111	-0,135
zboża i produkty zbożowe	<b>0,622</b>	<b>0,408</b>	<b>0,475</b>	0,109	-0,048
rośliny przemysłowe	<b>0,564</b>	-0,153	-0,281	-0,413	-0,413
orzeszki ziemne, pistacje, migdały, kasztany	0,119	-0,070	<b>0,803</b>	-0,108	0,215
nasiona roślin strączkowych	0,118	<b>0,895</b>	0,194	0,014	0,018
warzywa	0,112	-0,802	-0,002	-0,072	-0,158
przetwory mięsne	0,032	0,037	0,025	<b>0,860</b>	0,095
mięso	0,027	0,060	-0,332	<b>0,833</b>	-0,086
rośliny oleiste, tłuszcze roślinne	0,019	<b>0,514</b>	<b>0,734</b>	-0,234	-0,128
kawa, herbata, kakao z przetworami	-0,017	0,007	0,212	-0,116	<b>0,917</b>
produkty mleczne i jaja	-0,027	<b>0,400</b>	-0,195	0,312	<b>0,638</b>
owoce	-0,512	-0,564	0,367	-0,265	-0,259
ziemniaki i skrobia ziemniaczana	-0,844	-0,087	-0,326	-0,253	-0,214

Metoda wyodrębniania czynników: głównych składowych. Metoda rotacji: Varimax z normalizacją Kaisera.

Źródło: Obliczenia własne na podstawie FAO.



Rysunek 2. Częstkowe oszacowania przewag komparatywnych krajów UE w zakresie produktów pochodzenia rolniczego (\* Objaśnienia symboli krajów w tab.2.)

Aby możliwe było przyporządkowanie zredukowanego obrazu międzynarodowej wymiany handlowej produktami rolnymi członków UE do poszczególnych krajów konieczne było oszacowanie ocen czynnikowych dla poszczególnych państw. Dokonane to zostało metodą regresyjną. Tab. 2 umożliwia ustalenie siły związku poszczególnych krajów agregatami informacji wyjściowej (z punktu widzenia analizy danych), które to struktury mogą być postrzegane jako

wzorce wymiany zagranicznej produktami rolnymi<sup>2</sup> występujące na badanym obszarze gospodarczym. Podążając wytyczonym kierunkiem interpretacji składowych wyodrębnionych w tab.1 związek z nimi (wysoka wartość ocen czynnikowych na składową) może być postrzegany jako forma specjalizacji branżowej danego kraju wywodząca się z posiadanych przewag komparatywnych / konkurencyjnych w jakiejś dziedzinie. Niskie ujemne wartości ocen czynnikowych wskazują natomiast na wyraźną despecializację w stosunku do sektorów gospodarki żywnościowej, których dotyczą.

Tabela 2. Oceny czynnikowe badanych krajów na wyodrębnione składowe.

L.p.	Kraj	Symbol	Składowa				
			1	2	3	4	5
1	Austria	A	0,260	0,269	0,287	-0,213	0,090
2	Belgia-Luksemburg	B-L	0,946	0,166	0,315	-0,740	-0,854
3	Bułgaria	BG	-0,035	-1,397	-0,360	1,071	0,779
4	Cypr	CY	-4,319	-0,391	-0,990	-0,740	-1,070
5	Czechy	CZ	0,539	1,673	-0,321	-0,530	-0,133
6	Dania	DK	-0,173	0,672	-0,379	2,745	-0,889
7	Estonia	EE	-1,218	0,506	0,073	0,481	3,596
8	Finlandia	FIN	0,073	0,293	0,330	-0,309	0,244
9	Francja	F	0,458	0,566	0,365	-0,172	-0,382
10	Grecja	EL	0,346	-1,087	0,655	-1,623	-0,987
11	Hiszpania	E	-0,026	-3,205	1,479	0,395	0,211
12	Holandia	NL	1,263	-1,497	-3,776	0,325	0,011
13	Irlandia	IRL	-0,186	0,349	-0,488	0,852	-0,177
14	Litwa	LT	0,018	0,897	-0,407	0,276	1,092
15	Łotwa	LV	0,489	0,572	-0,323	-0,174	0,718
16	Malta	MT	-0,030	-0,018	-1,194	-1,815	-0,924
17	Niemcy	D	0,403	0,365	-0,103	-0,603	0,389
18	Polska	PL	0,028	0,060	0,123	0,274	-0,228
19	Portugalia	P	0,871	-0,785	0,509	-0,504	0,641
20	Rumunia	RO	-0,548	0,482	1,415	0,127	-0,447
21	Słowacja	SK	0,144	1,244	0,362	-0,517	-0,316
22	Słowenia	SI	0,051	0,077	0,279	1,254	-0,298
23	Szwecja	S	0,109	0,254	0,484	-0,495	0,324
24	Węgry	HU	0,244	0,431	0,551	1,841	-1,923
25	Wielka Brytania	UK	0,215	0,468	-0,054	-1,155	0,332
26	Włochy	I	0,079	-0,964	1,169	-0,052	0,202

Źródło: Obliczenia własne na podstawie FAO

<sup>2</sup> Wyższa wartość oceny czynnikowej sugeruje silniejszy związek obiektu z daną składową. Ujemna wartość oceny czynnikowej wskazuje na niewystępowanie u danego obiektu pewnej formy przewagi komparatywnej.

## ZAKOŃCZENIE

Mając świadomość dynamicznego charakteru koncepcji konkurencyjności, zmian jej charakteru należy wykazać daleko idącą elastyczność w definiowaniu problemu i poszukiwaniu koncepcji jego pomiaru. Próba kwantyfikacji zjawiska, które nie zostało do tej pory precyzyjnie zdefiniowane z założenia musi prowadzić do wyników wywołujących kontrowersje. Akceptując założenie, że konkurencyjność posiada charakter wielowymiarowy zachodzi konieczność korzystania do jej opisu z zestawu wskaźników cząstkowych lub z miary syntezującej, jak w powyższym opracowaniu.

Oszacowany w badaniu miernik ogólny konkurencyjności pozwala na zidentyfikowanie w UE niewielkiej liczby krajów, które wypracowały dla sektorów rolnych realną przewagę komparatywną mierzoną efektami w międzynarodowej wymianie handlowej. Mimo iż w skład tej grupy zaliczyć można kilka państw to jedynie kraje wywodzące się z dawnej „piętnastki” w latach 1993-2004 utrzymały swoją przewagę na stabilnym poziomie.

## LITERATURA

- Bieńkowski W. (1995) Reaganomika i jej wpływ na konkurencyjność gospodarki amerykańskiej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Bieńkowski W. (1988) The Applicability of Western Measurement Methods to Assess East European Competitiveness, *Comparative Economic Studies*, vol. 30, No. 3.
- Misala J. (1995) Teoretyczne podstawy międzynarodowej konkurencyjności gospodarki, Prace i Materiały Instytutu Gospodarki Światowej SGH, Warszawa.
- Person Ch., Salenbier G. (1983) Trade Employment and Adjustment Essays in International Economics, Montreal.
- Woś A. (2001a) Konkurencyjność potencjalna polskiego rolnictwa, Wydawnictwo IERiGŻ, Warszawa.
- Woś A. (2001b) Konkurencyjność wewnętrzna rolnictwa, Wydawnictwo IERiGŻ, Warszawa.

### **Comparative advantages and agricultural products' trade of UE countries**

**Summary:** The study focuses on the competitiveness of agricultural sectors of EU economic area countries. The analysis is based on an assumption that irrespective of the source of an particular country comparative advantage it is reflected in the international trade. The competitiveness finds expression in production specialization.

**Key words:** comparative advantage, agricultural competitiveness, EU countries

Wiesław Szczesny<sup>1</sup>, Teresa Kowalczyk<sup>2</sup>, Marek Wiech<sup>2</sup>,  
<sup>1</sup>Katedra Ekonometrii i Informatyki SGGW, <sup>2</sup>Instytut Podstaw Informatyki PAN  
e-mail: wszczesny@mors.sggw.waw.pl,

## KONCEPCJE POMIARU NIERÓWNOŚCI DLA WIELU ZMIENNYCH<sup>1</sup>.

**Streszczenie:** Praca składa się z trzech głównych części. W pierwszej z nich wprowadzone zostają pojęcia kierunkowej krzywej Lorenza i kierunkowego wskaźnika Giniego, uogólnione następnie na odpowiednie pojęcia przy pomiarze koncentracji. W części drugiej wprowadzone pojęcia wykorzystane są do przedstawienia pewnych metod pomiaru nierówności, określanych jako podejście gradacyjne dla tablic z wieloma zmiennymi. Jako przykłady służą trzy tablice z danymi dla pięciu banków i trzech ich cech: stanu depozytów oraz stanów kredytów złotówkowych i kredytów dewizowych. Końcowa część pracy to porównanie wskaźników gradacyjnych z proponowanymi przez Moslera i Koshevoya oraz krótkie odniesienie do innych koncepcji pomiaru nierówności.

**Słowa kluczowe:** kierunkowa krzywa Lorenza, kierunkowy wskaźnik Giniego, koncentracja, nierówność, zróżnicowanie, tau Kendalla, gradacyjna analiza danych

### WSTĘP

Tabela 1 przedstawia przykładowe tabele danych dla pięciu banków i trzech cech:  $D$  – stan depozytów,  $KZ$  – stan kredytów złotych,  $KW$  – stan kredytów walutowych. Na tych przykładach zilustrujemy różne koncepcje pomiaru nierówności, wprowadzane jako szczególny przypadek pomiaru koncentracji. W ujęciu intuicyjnym koncentracja środków finansowych jest w pierwszej i drugiej tabeli większa niż w trzeciej, ale trudno wydać intuicyjny osąd porównujący koncentracje w pierwszej i drugiej tabeli, chociaż można się raczej skłaniać ku temu, że większa jest nierówność w pierwszej tabeli. Ten intuicyjny osąd będzie w pracy zestawiony z ocenami koncentracji dokonanymi za pomocą paru wybranych wskaźników.

W rozdziale 2 przypomnimy znane od ponad stu lat pojęcia krzywej Lorenza i wskaźnika Giniego, które posłużą następnie do wprowadzenia *kierunkowej krzywej Lorenza* i *kierunkowego wskaźnika Giniego*, po czym uogólnimy te pojęcia na kierunkową krzywą i wskaźnik *koncentracji* (por. rozdział 4 w [Kowalczyk i in.

---

<sup>1</sup> Artykuł częściowo finansowany z projektu badawczego nr 3 T11C 053 28, przyznanego przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji

2004]). W rozdziale 3 wykorzystamy pojęcia wprowadzone w rozdziale 2 do przedstawienia pewnych metod pomiaru nierówności dla tablic z wieloma zmiennymi opisującymi zbiór obiektów (banków). To podejście do pomiaru nierówności dla wielu zmiennych (wprowadzone w [Kowalczyk i in. 2006]) będziemy nazywać podejściem *gradacyjnym*. Następnie w rozdziale 4 porównamy podejście gradacyjne z wysoko cenionym w środowisku statystycznym podejściem proponowanym przez Koshevoya i Moslera [1997] i omówimy tabelę zawierającą wartości wszystkich rozpatrywanych wskaźników dla tabel 1a, 1b i 1c. Inne koncepcje pomiaru nierówności zostaną krótko wspomniane w rozdziale 5.

W całym opracowaniu zajmujemy się tylko  $k$ -tkami (wektorami) addytywnych zmiennych o wartościach nieujemnych, które są mierzone na skali ilorazowej. Trójka zmiennych  $D$ ,  $KZ$  i  $KW$  spełnia te założenia. Chcemy również podkreślić, że używając w rozdziałach 2-4 słowa *zmienna* mamy zawsze na myśli zmienne o podanych wyżej własnościach.

Tabele 1a, 1b, 1c są uzupełnione wierszami zawierającymi sumy i średnie kolumn oraz kolumną wartości zmiennej  $Z$ , która jest sumą zmiennych  $D$ ,  $KZ$  i  $KW$ :

$$Z = D + KZ + KW.$$

Tabela 1. Zbiory danych dla pięciu banków i trzech zmiennych ( $D$  – depozyty,  $KZ$  – kredyty złotówkowe,  $KW$  – kredyty walutowe).

a)		$D$	$KZ$	$KW$	$Z$
	B <sub>1</sub>	400	300	80	<b>780</b>
	B <sub>2</sub>	50	30	6	<b>86</b>
	B <sub>3</sub>	15	25	8	<b>48</b>
	B <sub>4</sub>	10	30	4	<b>44</b>
	B <sub>5</sub>	25	15	2	<b>42</b>
	<b>suma</b>	500	400	100	1000
	<b>średnia</b>	<b>100</b>	<b>80</b>	<b>20</b>	<b>200</b>

b)		$D$	$KZ$	$KW$	$Z$
	B <sub>1</sub>	400	15	0	<b>415</b>
	B <sub>2</sub>	50	30	3	<b>83</b>
	B <sub>3</sub>	15	25	5	<b>45</b>
	B <sub>4</sub>	10	30	90	<b>130</b>
	B <sub>5</sub>	25	300	2	<b>327</b>
	<b>suma</b>	500	400	100	1000
	<b>średnia</b>	<b>100</b>	<b>80</b>	<b>20</b>	<b>200</b>

c)		$D$	$KZ$	$KW$	$Z$
	B <sub>1</sub>	200	150	40	<b>390</b>
	B <sub>2</sub>	100	100	25	<b>225</b>
	B <sub>3</sub>	80	80	20	<b>180</b>
	B <sub>4</sub>	70	50	10	<b>130</b>
	B <sub>5</sub>	50	20	5	<b>75</b>
	<b>suma</b>	500	400	100	1000
	<b>średnia</b>	<b>100</b>	<b>80</b>	<b>20</b>	<b>200</b>

## POMIAR NIERÓWNOŚCI DLA POJEDYNCZEJ ZMIENNEJ

Tabela 2. Wartości z tabeli 1 zamienione na udziały zmiennych; składowe wektora  $\pi$  u dołu tabel są udziałami sum w kolumnach w ogólnej sumie wartości zmiennych  $D$ ,  $KZ$  i  $KW$ .

	$uD$	$uKZ$	$uKW$	$uZ$
$B_1$	0.80	0.75	0.80	<b>0.78</b>
$B_2$	0.10	0.075	0.06	<b>0.086</b>
$B_3$	0.03	0.063	0.08	<b>0.048</b>
$B_4$	0.02	0.075	0.04	<b>0.044</b>
$B_5$	0.05	0.038	0.02	<b>0.042</b>
<b>suma</b>	1	1	1	1
<b><math>\pi</math></b>	<b>0.50</b>	<b>0.40</b>	<b>0.10</b>	<b>1</b>

	$uD$	$uKZ$	$uKW$	$uZ$
$B_1$	0.80	0.04	0.00	<b>0.415</b>
$B_2$	0.10	0.08	0.03	<b>0.083</b>
$B_3$	0.03	0.06	0.05	<b>0.045</b>
$B_4$	0.02	0.08	0.9	<b>0.13</b>
$B_5$	0.05	0.75	0.02	<b>0.327</b>
<b>suma</b>	1	1	1	1
<b><math>\pi</math></b>	<b>0.50</b>	<b>0.40</b>	<b>0.10</b>	<b>1</b>

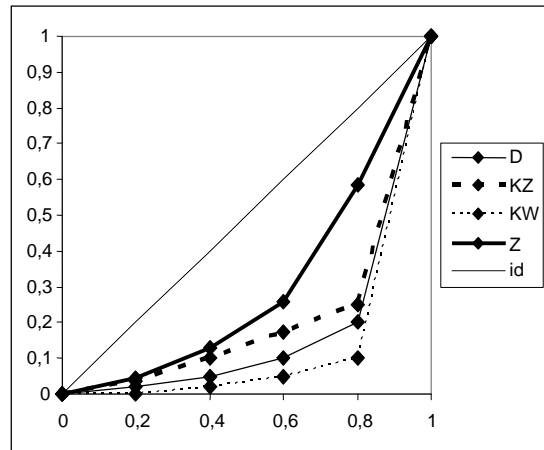
	$uD$	$uKZ$	$uKW$	$uZ$
$B_1$	0.40	0.38	0.40	<b>0.39</b>
$B_2$	0.20	0.25	0.25	<b>0.225</b>
$B_3$	0.16	0.2	0.2	<b>0.18</b>
$B_4$	0.14	0.125	0.1	<b>0.13</b>
$B_5$	0.1	0.05	0.05	<b>0.075</b>
<b>suma</b>	1	1	1	1
<b><math>\pi</math></b>	<b>0.50</b>	<b>0.40</b>	<b>0.10</b>	<b>1</b>

W tabelach 2a, 2b, 2c zawarte są udziały wartości każdej ze zmiennych  $D$ ,  $KZ$  i  $KW$  w bankach  $B_1 - B_5$  w sumie jej wartości, oznaczone odpowiednio  $uD$ ,  $uKZ$  i  $uKW$ . W uzupełniających tabelach dolnych wierszach zapisany jest wektor  $\pi$ , którego składowymi są udziały sum każdej zmiennej w ogólnej sumie wartości tych trzech zmiennych. Zauważmy, że w ten sposób każda z tabel 2a, 2b, 2c wyznacza pewien dwuwymiarowy rozkład, z rozkładem brzegowym  $\pi = (\pi_D, \pi_{KZ}, \pi_{KW})$ , jednakowym w tabelach 2a, 2b, 2c i równym  $\pi = (0.5, 0.4, 0.1)$  oraz z rozkładami warunkowymi zapisanymi w kolumnach (nazywanymi profilami danej zmiennej; na przykład rozkład (0.8, 0.1, 0.03, 0.02, 0.05) jest profilem dla depozytów  $D$  w tabelach 1a i 1b).

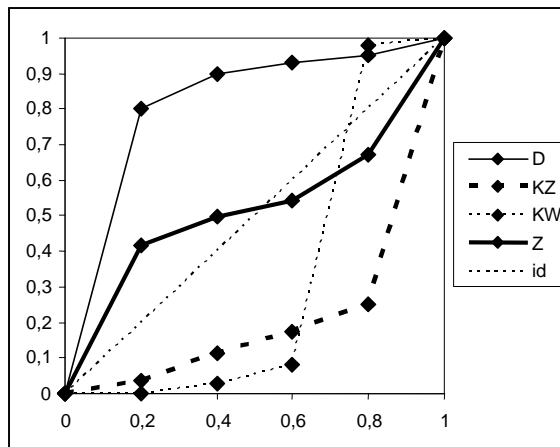
Do obliczenia krzywej Lorenza dla wybranej zmiennej potrzebny jest jedynie *ustawiony rosnąco* (niemalejąco) ciąg udziałów tej zmiennej, który porównujemy z rozkładem jednostajnym. Przykładowo dla zmiennej  $D$  w tabelach 1a i 1b rosnący ciąg udziałów jest równy: 0.02, 0.03, 0.05, 0.1, 0.8, a wtedy krzywa Lorenza  $L_D$  dla zmiennej  $D$  jest wypukłą łamaną o wierzchołkach  $((0, 0), (0.2, 0.02), (0.2+0.2, 0.02+0.03), \dots, (1, 1))$ .

Jeśli dokonamy permutacji zbioru banków, a więc spermutujemy również wartości udziałów, to postępując analogicznie jak przy wyznaczaniu  $L_D$

otrzymamy łamaną, która nie będzie wypukła. Dokonując wszystkich możliwych permutacji utworzymy zbiór 120 łamanych, które mieszczą się w kwadracie jednostkowym w obszarze ograniczonym od dołu krzywą Lorenza  $L_D$ , a od góry tzw. górną krzywą Lorenza  $\bar{L}_D$ , będącą odbiciem krzywej  $L_D$  względem punktu  $(0.5, 0.5)$ . Poszczególne krzywe z tego zbioru nazywamy  *kierunkowymi krzywymi Lorenza* (wg funkcji  $\varphi$  porządkującej banki) i oznaczamy  $L_{D;\varphi}$ .



Rysunek 1. Krzywe Lorenza  $L_D$ ,  $L_{KZ}$ ,  $L_{KW}$  i  $L_Z$  dla zmiennych w tabeli 1b.



Rysunek 2. Kierunkowe krzywe Lorenza  $L_{D;\varphi}$ ,  $L_{KZ;\varphi}$ ,  $L_{KW;\varphi}$  i  $L_{Z;\varphi}$  dla zmiennych w tabeli 1b przy uporządkowaniu od  $B_1$  do  $B_5$ .

Na rysunku 1 przedstawiono krzywe Lorenza  $L_D$ ,  $L_{KZ}$ ,  $L_{KW}$  i  $L_Z$  dla zmiennych w tabeli 1b. Uporządkowania  $\varphi$  są tutaj dostosowane osobno do każdej ze zmiennych:  $(B_4, B_3, B_5, B_2, B_1)$  dla  $L_D$ ,  $(B_1, B_3, B_2, B_4, B_5)$  dla  $L_{KZ}$ , etc. Natomiast na rys. 2 przedstawiono krzywe  $L_{D;\varphi}$ ,  $L_{KZ;\varphi}$ ,  $L_{KW;\varphi}$  i  $L_{Z;\varphi}$  dla uporządkowania  $(B_1, B_2,$



$B_3, B_4, B_5$ ) przyjętego w tabeli 1 (identycznego dla każdej z krzywych). Łatwo zauważyć, że jak wcześniej wspomniano każda z krzywych na rysunku 2 zawiera się w obszarze zawartym między krzywą Lorenza danej zmiennej a odbiciem tej krzywej względem punktu  $(0.5, 0.5)$ .

Tabela 1c wyróżnia się tym, że każda ze zmiennych ma wartości uporządkowane malejąco, poczynając od banku  $B_1$  do  $B_5$  (jest to szczególnie przykład zestawu zmiennych *komonotonicznych*). Wskutek tego krzywe Lorenza dla zmiennych  $D, KZ, KW$  pomnożone przez przypisaną im składową wektora  $\pi$  są w sumie równe krzywej Lorenza dla ich sumy (krzywa  $L_Z$ ). Tak nie jest w tabelach 1a i 1b; natomiast we wszystkich tabelach dla dowolnego uporządkowania banków zachodzi równość (zob. także [Rietveld 1990]):

$$L_{Z;\varphi}(t) = \pi_D L_{D;\varphi}(t) + \pi_{KZ} L_{KZ;\varphi}(t) + \pi_{KW} L_{KW;\varphi}(t), \quad t \in [0,1] \quad (1)$$

co dla danych z tabeli 1b można sprawdzić na rysunku 2.

Krzywa Lorenza jest funkcyjnym wskaźnikiem nierówności dowolnej zmiennej  $X$ . Częściowy porządek nierówności dla par zmiennych  $X$  i  $Y$  określa warunek: „ $L_X$  leży pod  $L_Y$ ”; np. na rysunku 1 krzywa  $L_{KW}$  leży pod krzywą  $L_D$ , czyli nierówność zmiennej  $KW$  jest większa niż nierówność zmiennej  $D$ . Natomiast liczbowym wskaźnikiem nierówności dowolnej zmiennej  $X$  jest wskaźnik *Gini*( $X$ ), który jest równy podwojonemu polu między przekątną łączącą w kwadracie jednostkowym punkty  $(0, 0)$  i  $(1, 1)$  a krzywą Lorenza  $L_X$ . Dla zmiennych z tabeli 1b mamy:  $Gini(KW)=0.732$ ,  $Gini(D)=0.652$ ,  $Gini(KZ)=0.575$ ,  $Gini(Z)=0.394$ , co zgadza się z oglądem pól na rysunku 1. Ponadto dla dowolnej zmiennej  $X$  i uporządkowania  $\varphi$  wprowadza się *kierunkowy wskaźnik Gini*( $X; \varphi$ ), który jest równy podwojonej różnicy dwóch pól: pola między wcześniej wspomnianą przekątną a tą częścią kierunkowej krzywej  $L_{X;\varphi}$ , która jest położona *pod* przekątną, oraz pola między przekątną a tą częścią krzywej  $L_{X;\varphi}$ , która przebiega *nad* przekątną. Kierunkowy wskaźnik Giniego jest największy przy uporządkowaniu  $\varphi = X$  (przy którym  $L_{X;\varphi} = L_X$ ). Dla zmiennych z tabeli 1b i uporządkowania  $\varphi$  od  $B_1$  do  $B_5$  otrzymujemy następujące wartości kierunkowych wskaźników Giniego:  $Gini(KZ; \varphi)=0.570$ ,  $Gini(KW; \varphi)=0.364$ ,  $Gini(Z; \varphi)=-0.052$ ,  $Gini(D; \varphi)=-0.632$ , co zgadza się z oglądem pól na rysunku 2.

Kierunkowa krzywa Lorenza i jej wskaźnik Giniego są szczególnymi przypadkami *krzywej koncentracji* i *wskaźnika koncentracji*, o których mowa dalej. Niech  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$  oraz  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $p_1 + \dots + p_m = q_1 + \dots + q_m = 1$  będą dwoma rozkładami na zbiorze  $m$  elementowym, odpowiadającymi dowolnej parze zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  określonych na tym zbiorze. *Krzywa koncentracji*  $C(Y; X; \varphi)$  *zmiennej*  $Y$  *względem zmiennej*  $X$  według uporządkowania  $\varphi$  zadającego permutację  $(i_1, \dots, i_m)$  ciągu  $(1, \dots, m)$  jest łamaną o wierzchołkach  $\{(0,0), (p_{i_1}, q_{i_1}), (p_{i_1}+p_{i_2}, q_{i_1}+q_{i_2}), \dots, (1,1)\}$ . *Kierunkowy wskaźnik koncentracji*  $ar(Y; X; \varphi)$  i *maksymalny wskaźnik koncentracji*  $ar_{max}(Y; X)$  dla krzywych  $C(Y; X; \varphi)$  i  $C_{max}(Y; X)$  definiuje się analogicznie jak wskaźniki nierówności.

Tak więc na przykład dla pary zmiennych  $(D, KZ)$  z tabeli 1b i przyjętego w niej uporządkowania banków od  $B_1$  do  $B_5$ , krzywa koncentracji  $C(KZ:D;\varphi)$  jest łamaną o wierzchołkach  $\{(0, 0), (0.80, 0.04), (0.80+0.10, 0.04+0.08), \dots, (1, 1)\}$ . Gdy uporządkowanie banków jest takie, że krzywa koncentracji staje się wypukła, jest ona *maksymalną krzywą koncentracji*  $C_{max}(KZ:D)$ , położoną pod wszystkimi innymi krzywymi  $C(KZ:D;\varphi)$ .

Dla danych z tabeli 1b zachodzi:  $ar(KZ:D;\varphi) = ar_{max}(KZ:D) = 0.874$ , czyli uporządkowanie banków od  $B_1$  do  $B_5$  ustawią pary wartości obu zmiennych tak, że zróżnicowanie odpowiadających tym zmiennym kolumn jest w tabeli 1b największe. Można sprawdzić, że równość  $ar$  i  $ar_{max}$  nie zachodzi dla tych samych zmiennych w tabeli 1a.

Wskaźnik Giniego ma wiele przedstawień, prowadzących do różnych uogólnień wielowymiarowych. Jednym z nich jest unormowana średnia różnica Giniego (ang. *distance Gini index*):

$$Gini(X) = \frac{E(|X - X'|)}{2E(X)} \quad (2)$$

gdzie  $X'$  jest niezależną kopią zmiennej  $X$ , a  $E$  oznacza wartość oczekiwaną. Zatem  $Gini(X)$  mierzy średnie zróżnicowanie wartości zmiennej  $X$  unormowanej za pomocą  $E(X)$ .

#### WSKAŹNIK NIERÓWNOŚCI DLA TABLIC Z WIELOMA ZMIENNYMI OPISUJĄCYMI ZBIÓR OBIEKTÓW

Kierunkowe wskaźniki Giniego dla każdej z cech  $D$ ,  $KZ$  i  $KW$  z osobna oraz dla ich sumy  $Z$  zastąpimy teraz kierunkowym wskaźnikiem nierówności dla trójki cech łącznie. Ma on tę własność, że jeśli zamiast trójki weźmie się pod uwagę tylko jedną zmienną, np.  $D$ , to wskaźnik zdefiniowany dla wielu zmiennych zredukuje się do  $Gini(D;\varphi)$ . Konstrukcję wskaźnika przedstawimy na przykładzie trójki  $X = (D, KZ, KW)$  w tabeli 1b przy pierwotnym ustawieniu banków od  $B_1$  do  $B_5$ . Niech  $T_\varphi$  będzie macierzą powstałą z tabeli 2b, a  $\tilde{T}_\varphi$  macierzą  $T_\varphi$  poprzedzoną kolumną  $\mathbf{p}$  o wartościach  $(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$ :

$$T_\varphi = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.04 & 0.00 \\ 0.10 & 0.08 & 0.03 \\ 0.03 & 0.06 & 0.05 \\ 0.02 & 0.08 & 0.90 \\ 0.05 & 0.75 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_\varphi = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.80 & 0.04 & 0.00 \\ 0.2 & 0.10 & 0.08 & 0.03 \\ 0.2 & 0.03 & 0.06 & 0.05 \\ 0.2 & 0.02 & 0.08 & 0.90 \\ 0.2 & 0.05 & 0.75 & 0.02 \end{bmatrix}.$$

Kolumny w macierzach  $T_\varphi$  i  $\tilde{T}_\varphi$  traktujemy teraz jako profile zmiennych dla rozkładów dwuwymiarowych, które oznaczymy odpowiednio przez  $P_\varphi$  i  $\tilde{P}_\varphi$ , przyjmując jako rozkłady brzegowe odpowiednio wektory  $\boldsymbol{\pi}$  oraz  $(0.5, 0.5\pi_D, 0.5\pi_{KZ}, 0.5\pi_{KW})$ . Kolumny udziałów zmiennych  $D$ ,  $KZ$  i  $KW$  w rozkładzie  $\tilde{P}_\varphi$  mają łącznie wagę 0.5, taką samą jak kolumna określonego na bankach jednostajnego rozkładu, z którym chcemy porównać macierz  $T_\varphi$ . Rozkład  $P_\varphi$  jest więc zadany przez parę  $(T_\varphi, \boldsymbol{\pi})$ , a rozkład  $\tilde{P}_\varphi$  przez parę  $(\tilde{T}_\varphi, [0.5, 0.5\boldsymbol{\pi}])$ ; w tablicach 1a, 1b, 1c wektor  $[0.5, 0.5\boldsymbol{\pi}]$  jest jednakowy i równy  $[0.5, 0.25, 0.20, 0.05]$ .

Znajdziemy najpierw związek między wskaźnikami *tau Kendalla* dla  $P_\varphi$  i  $\tilde{P}_\varphi$ . Na podstawie wzoru (8.23) w [Kowalczyk i in. 2004]:

$$\tau(P_\varphi) = 2 \times (\pi_D \pi_{KZ} ar(KZ : D; \varphi) + \pi_D \pi_{KW} ar(KW : D; \varphi) + \pi_{KZ} \pi_{KW} ar(KW : KZ; \varphi)). \quad (3)$$

Rozpisując analogicznie  $\tau(\tilde{P}_\varphi)$  i korzystając ze wzoru (1) otrzymujemy równość:

$$\tau(\tilde{P}_\varphi) = 0.5 \times Gini(Z; \varphi) + 0.25 \times \tau(P_\varphi). \quad (4)$$

Moduły obu wskaźników *tau Kendalla* mają następujące ograniczenia:

$$|\tau(P_\varphi)| \leq M = 1 - \pi_D^2 - \pi_{KZ}^2 - \pi_{KW}^2, \quad |\tau(\tilde{P}_\varphi)| \leq \tilde{M} = 0.25 \times (3 - \pi_D^2 - \pi_{KZ}^2 - \pi_{KW}^2). \quad (5)$$

Możemy więc wprowadzić ilorazy

$$DIV(\mathbf{X}; \varphi) = \frac{|\tau(P_\varphi)|}{M}, \quad INEQ(\mathbf{X}; \varphi) = \frac{|\tau(\tilde{P}_\varphi)|}{\tilde{M}} \quad (6)$$

nazwane w [Kowalczyk i in. 2006] kierunkowym wskaźnikiem *zróznicowania* wektora  $\mathbf{X}$  i kierunkowym wskaźnikiem *nierówności* wektora  $\mathbf{X}$  (*DIV* od ang. *divergence*, *INEQ* od ang. *inequality*). Zatem:

$$INEQ(\mathbf{X}; \varphi) = \alpha \times Gini(Z; \varphi) + (1 - \alpha) \times DIV(\mathbf{X}; \varphi), \quad (7)$$

$$\text{gdzie } \alpha = \frac{2}{3 - (\pi_D^2 + \pi_{KZ}^2 + \pi_{KW}^2)}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (8)$$

Gdy zamiast trójki zmiennych ( $D, KZ, KW$ ) weźmiemy pod uwagę tylko jedną zmienną, np.  $D$ , to  $\pi_D = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $1 - \alpha = 0$ ,  $Z = D$ , a więc  $INEQ(D; \varphi) = Gini(D; \varphi)$ .

Wskaźnik  $INEQ(X; \varphi)$  zależy od ustawienia  $\varphi$  dla wierszy i ustawienia  $\psi$  dla zmiennych w wektorze  $X$ . Maksymalny wskaźnik nierówności  $INEQ_{max}$  definiujemy za [Kowalczyk i in. 2006] jako:

$$INEQ_{max}(X) = \max_{\varphi, \psi} INEQ(X; \varphi, \psi) = INEQ(X; \varphi_{opt}, \psi_{opt}). \quad (9)$$

Wartości  $INEQ_{max}(D, KZ, KW)$  dla danych z tabel 1a, 1b i 1c podane są w tabeli 3 łącznie z optymalnymi ustawieniami  $(\varphi_{opt}, \psi_{opt})$ , współczynnikiem  $\alpha$  i wartościami wskaźników  $Gini(Z; \varphi_{opt})$  i  $DIV(X; \varphi_{opt}, \psi_{opt})$ , które występują we wzorze (7) po wstawieniu do tego wzoru pary ustawień  $\varphi$  i  $\psi$  maksymalizujących  $INEQ(X; \varphi)$ .

## PORÓWNANIE UJĘCIA MOSLERA-KOSHEVOYA Z UJĘCIEM GRADACYJNYM

Dwie propozycje uogólnienia wskaźnika nierówności dla pojedynczej zmiennej, podane w [Koshevoy i Mosler 1997], odnoszą się do dwóch różnych przedstawień wskaźnika Giniego dla pojedynczej zmiennej, o których była mowa w rozdziale 2. W pierwszym przedstawieniu  $Gini(X)$  jest powierzchnią pola między  $L_X$  i  $\bar{L}_X$ , w drugim zaś uśrednionym i unormowanym modułem różnicy wartości zmiennej  $X$  i jej kopii  $X'$ . Mosler i Koshevoy zastępują powierzchnię obszaru między  $L_X$  i  $\bar{L}_X$  objętością pewnej bryły w przestrzeni  $(k+1)$ -wymiarowej nazwanej Zonoidem Lorenza, jak również zastępują uśrednione odległości między wartościami zmiennych  $X$  i  $X'$  uśrednionymi odległościami dla wektorów. Pierwszy wskaźnik nosi nazwę  $GZI$  (od *Gini Zonoid Index*). Drugi wskaźnik, nazwany  $DGI$  (od *distance Gini index*), jest uogólnieniem unormowanej średniej różnicy Giniego (wzór (2)). Wartości  $GZI(X)$  i  $DGI(X)$  dla danych z tabel 1a, 1b i 1c są zamieszczone w tabeli 3.

W ujęciu gradacyjnym opisanym w rozdziale 3 mamy do czynienia z wypukłą kombinacją nieco innych uogólnień obu przedstawień wskaźnika Giniego dla pojedynczej zmiennej. Pierwszy składnik,  $\alpha \times Gini(Z; \varphi_{opt})$ , odnosi się do różnicy pól między kierunkową krzywą Lorenza dla sumy zmiennych a diagonalą. Drugi składnik,  $(1 - \alpha) \times DIV(X; \varphi_{opt}, \psi_{opt})$  uśrednia kierunkowe wskaźniki koncentracji dla par zmiennych; są one gradacyjnymi wskaźnikami różnicowania zastępującymi odległości euklidesowe. Jest godne uwagi, że posłużenie się dekompozycją tau Kendalla, która uśrednia kierunkowe wskaźniki koncentracji, prowadzi do jednoczesnego uwzględnienia obu nurtów uogólnień: „geometrycznego” i „odległościowego”.

Ujęcie gradacyjne przedstawione w tabelicy 3 wydaje się zgodne z intuicjami dotyczącymi nierówności w tabelach 1a, 1b i 1c, o których była mowa we Wstępie.

Dla danych 1a widać „gołym okiem” bardzo duże zróżnicowanie pomiędzy rekordami dla banków (bank  $B_1$  dominuje pozostałe banki, czyli koncentracja jest bardzo silna), a zatem należy się spodziewać dużej wartości  $Gini(Z; \varphi_{opt})$ . Natomiast profile kolumn są zbliżone i stąd należy się spodziewać małej wartości  $DIV(X; \varphi_{opt}, \psi_{opt})$ . Ogólnie koncentracja w tabeli 1a jest duża, oparta głównie na zróżnicowaniu rekordów dla pierwszego banku i banków pozostałych. Te intuicje są dobrze oddane przez wartości podane w tabeli 3.

Tabela 3: Wartości wyliczanych w artykule wskaźników nierówności.

Wskaźniki oceniające nierówność w tabelach danych	Tabela 1a	Tabela 1b	Tabela 1c	Ustawienie tabel wg wartości wskaźników
<b>w ujęciu gradacyjnym:</b>				
Optymalne ustawienie $\varphi_{opt}$	$B_4, B_5, B_3, B_2, B_1$	$B_3, B_2, B_4, B_5, B_1$	$B_5, B_4, B_3, B_2, B_1$	-
Optymalne ustawienie $\psi_{opt}$	$KZ, KW, D$	$KW, KZ, D$	$D, KZ, KW$	-
$\alpha$	0.775	0.775	0.775	-
$INEQ_{max}(X)$	0.482	0.456	0.232	$1a \succ 1b \succ 1c$
$Gini(Z; \varphi_{opt})$	0.606	0.393	0.290	$1a \succ 1b \succ 1c$
$DIV(X; \varphi_{opt}, \psi_{opt})$	0.053	0.671	0.031	$1b \succ \succ 1a \succ 1c$
<b>w ujęciu Moslera i Koshevoya:</b>				
$GZI(X)$	0.0011	0.1833	0.0003	$1b \succ \succ 1a \succ 1c$
$DGI(X)$	0.363	0.531	0.180	$1b \succ 1a \succ 1c$

Dla danych w tabeli 1b, zamiast koncentracji kapitału w jednym banku jak w 1a, mamy do czynienia z wyraźną koncentracją w dwóch bankach ( $B_1$  i  $B_5$ ), co każe się spodziewać dużej wartości wskaźnika  $Gini(Z; \varphi_{opt})$ , mniejszej jednak niż w 1a. Natomiast profile zmiennych w 1b są bardzo zróżnicowane w każdej z par zmiennych ( $D, KZ$ ), ( $D, KW$ ) i ( $KZ, KW$ ), co każe się spodziewać dużej wartości  $DIV(X; \varphi_{opt}, \psi_{opt})$ , znacznie większej niż w przykładzie 1a. Te intuicje są ponownie zgodne z wartościami wskaźników podanymi w tabeli 3. Uśrednienie  $Gini(Z; \varphi_{opt})$  i  $DIV(X; \varphi_{opt}, \psi_{opt})$  za pomocą  $\alpha$  i  $(1 - \alpha)$  prowadzi do wartości maksymalnej nierówności  $INEQ_{max}(X)$  nieco mniejszej niż w przykładzie 1a.

Dane w tabeli 1c wykazują umiarkowane zróżnicowanie pomiędzy bankami i bardzo małe zróżnicowanie profili poszczególnych zmiennych (np. udziały depozytów dla poszczególnych banków są bardzo podobne do udziałów kredytów wśród tych banków). Można się więc spodziewać umiarkowanej (ale mniejszej niż w tabelach 1a i 1b) wartości  $Gini(Z; \varphi_{opt})$  oraz bardzo małej wartości  $DIV(\mathbf{X}; \varphi_{opt}, \psi_{opt})$ . Tak właśnie jest w tabeli 3.

Jak się wydaje, Mosler i Koshevoy skłaniają się ku opisywaniu nierówności wielocechowej dwoma wskaźnikami,  $GZI(\mathbf{X})$  i  $DGI(\mathbf{X})$ , a nie jednym globalnym. Próba łącznej interpretacji wartości obu tych wskaźników w zestawieniu ze wskaźnikami gradacyjnymi będzie podjęta w [Kowalczyk i in. 2006]. Tutaj zwrócimy tylko uwagę, że w przykładach 1a i 1c  $GZI(\mathbf{X})$  przyjmuje małe wartości, co wynika z faktu, że zmienne są w tych tabelach silnie skorelowane. Gdyby którekolwiek dwie zmienne były liniowo zależne, to wartość  $GZI(\mathbf{X})$  byłaby równa 0.

Tabela 1c – zgodnie z intuicjami we Wstępie – uzyskała najmniejsze wartości wszystkich wskaźników występujących w tabeli 3. Z kolei tabela 1a ma wartości wskaźników  $INEQ_{max}(\mathbf{X})$  i  $Gini(Z; \varphi_{opt})$  większe niż tabela 1b, a dla wskaźników  $DGI(\mathbf{X})$ ,  $GZI(\mathbf{X})$  i  $DIV(\mathbf{X}; \varphi_{opt}, \psi_{opt})$  jest przeciwnie. Przypomnijmy, że intuicyjny osąd we Wstępie skłaniał się raczej ku wyższej ocenie nierówności w tabeli 1a.

## INNE KONCEPCJE POMIARÓW NIERÓWNOŚCI

Poza omówionym już podejściem Moslera-Koshevoya używającym narzędzi analizy wypukłej, w literaturze wyróżnia się jeszcze dwa podejścia: jedno oparte na tzw. funkcjach dobrobytu (ang. *social welfare functions*), a drugie oparte na funkcjach użyteczności [Savaglio 2004]. Funkcje te służą do sprawdzania macierzy danych w tablicy  $m \times k$  do pojedynczej zmiennej o  $m$ -wartościach, której nierówność ocenia się następnie za pomocą wskaźników jednowymiarowych. Przegląd takich wskaźników zawiera [Weymark 2004]. Prace Savaglio oraz [Gajdos i Weymark 2005] zawierają aksjomatyczne ujęcia pomiaru wielowymiarowej nierówności. W drugiej z tych prac podane są przykłady wskaźników wielowymiarowej nierówności, które powstały z rozmaitych uogólnień wskaźników jednowymiarowych.

Użyteczność badań nad pomiarem koncentracji w działalności sektora bankowego przedstawia raport Jackowicza i Kowalewskiego [2002], w którym rozpatrywana jest koncentracja w ujęciu jednowymiarowym. Autorzy piszą we wstępie, że miary koncentracji są w praktyce wykorzystywane do wyznaczenia reguł prowadzonej polityki ochrony konkurencji, jak również do objaśnienia przyczyn zachowań niekonkurencyjnych lub do oceny skutków niejednakowej efektywności uczestników rynku.

## LITERATURA

- Gajdos T., Weymark J. A. (2005) Multidimensional generalized Gini indices, *Economic Theory*, 26, str. 471 – 496
- Jackowicz K., Kowalewski O. (2002) Koncentracja działalności sektora bankowego w Polsce w latach 1994-2000, Departament Analiz i Badań, *Narodowy Bank Polski*, 143, Warszawa
- Koshevoy G., Mosler K. (1997) Multivariate Gini indices, *Journal of Multivariate Analysis*, 60, str. 252 – 276
- Kowalczyk T., Pleszczyńska E., Ruland, F. (red.). (2004) *Grade Models and Methods for Data Analysis*, Studies in Fuzziness and Soft Computing No 151, str. 1 – 477, Springer: Berlin-Heidelberg-New York
- Kowalczyk T., Pleszczyńska E., Szczesny W., Wiech M (2006) Measurement of multivariate inequality based on Kendall tau or Spearman rho (*w przygotowaniu*)
- Rietveld P. (1990) Multidimensional Inequality Comparisons, On Aggravation and Mitigation of Inequalities, *Economic Letters*, 32, str. 187 – 192
- Savaglio E. (2004) *Multidimensional inequality: a survey*, w: Farina F., Savaglio E. (red.) Inequality and economic integration, London: Routledge
- Weymark J. A. (2004) *The normative approach to the measurement of multidimensional inequality*, w: Farina F., Savaglio E. (red.) Inequality and economic integration, London: Routledge

### Concepts for measures of inequality in multivariate data

**Summary:** The article consists of three main parts. The first part introduces concepts of directional Lorenz curve and directional Gini index, generalized then to obtain suitable terms concerning concentration measures. In the second part some inequality indices are introduced, which present a grade approach to multivariate datasets. As an example three datasets concerning five banks and three variables (deposits, Polish currency loans and foreign currency loans) are considered. The final part consists of comparison of grade approach to approach proposed by Mosler and Koshevoy, followed by a short account of some other concepts of inequality measurement.

**Key words:** directional Lorenz curve, directional Gini index, concentration, inequality, diversity, Kendall's tau, grade data analysis

Dominik Śliwicki  
Katedra Ekonometrii i Statystyki WNEiZ UMK  
e-mail: dominik\_sliwicki@o2.pl

## **EKONOMETRYCZNE MODELOWANIE WYBRANYCH WSKAŹNIKÓW MAKROEKONOMICZNYCH W POLSCE**

**Streszczenie:** W opracowaniu został zaprezentowany przykład ekonometrycznego modelowania wybranych wskaźników makroekonomicznych z użyciem zgodnego dynamicznego modelu ekonometrycznego. Na podstawie oszacowanego modelu zostały wyznaczone prognozy na I kwartał 2006 roku oraz mnożniki bezpośrednie i pośrednie.

**Słowa kluczowe:** model zgodny, prognoza, mnożniki bezpośrednie, mnożniki pośrednie

### **EKONOMICZNE PODSTAWY MODELU – CZYNNIKI WZROSTU GOSPODARCZEGO**

Teoria ekonomii klasyfikuje czynniki wzrostu gospodarczego w kilku grupach. Pierwszą grupę stanowią czynniki bezpośrednie, do których zalicza się zatrudnienie i wydajność pracy oraz czynniki pośrednie, w skład których wchodzi majątek produkcyjny i efektywność jego wykorzystania. Te same czynniki mogą być przedstawione jako ekstensywne i intensywne. Ekstensywne czynniki wzrostu gospodarczego wyrażają się w zmianach ilościowych, a więc przyroście zatrudnienia oraz trwałych i obrotowych środków produkcji, czyli we wzroście inwestycji. Intensywne czynniki wzrostu gospodarczego to zmiany jakościowe w wykorzystaniu czynników produkcji. Są to takie zjawiska jak wzrost wydajności pracy siły roboczej, wzrost efektywności wykorzystania majątku produkcyjnego, zwiększenie efektywności inwestycji, postępu naukowo – technicznego, zastosowanych przedmiotów pracy (Grabowski 2000).

Wzrost gospodarczy wyraża się przede wszystkim w dynamice dochodu narodowego, zatem czynnikami wzrostu gospodarczego są czynniki wzrostu dochodu narodowego (Polszakiewicz 1994). Trzy najważniejsze wyznaczniki ścieżki długookresowego wzrostu produkcji to: siła robocza, kapitał, technologia. Siłę roboczą tworzy tylko część ludności, a ponadto nie każda osoba ujęta w statystyce siły roboczej i gotowa do podjęcia pracy była w danym momencie rzeczywiście zatrudniona. Bezrobocie jest istotną cechą gospodarki kapitalistycznej. Wzrasta ono w okresach recesji i obniża się w okresach wysokiej koniunktury. Produkcja zależy nie tylko od liczby zatrudnionych, ale również od liczby godzin przepracowanych przez nich w każdym roku (Hall, Taylor 2000). Ponadto siła robocza zawiera kapitał ludzki, czyli ucieleśnioną w ludziach wiedzę



i umiejętności. Wzrost poziomu wykształcenia, podnoszenie kwalifikacji i coraz większe doświadczenie zawodowe pracowników pozwalają zwiększyć produkcję przy danym zasobie kapitału rzeczowego (Begg i in. 1996).

Rozmiary kapitału rzeczowego są określone w danym roku przez inwestycje w poprzednich latach. Wzrost kapitału w gospodarce umożliwia wytwarzanie większej produkcji. Zasób kapitału wzrasta z roku na rok, dopóki inwestycje brutto są większe od deprecjacji zasobu kapitału. Zasób kapitału rośnie tak długo jak długo inwestycje netto są wielkością dodatnią (Hall, Taylor 2000).

Trzecim czynnikiem określającym produkcję jest technologia, która informuje ile można wytworzyć przy użyciu danej ilości pracy i kapitału. Technologia obejmuje wszystko, co wpływa na wydajność pracy i produktywność kapitału. Trwający nieustannie postęp techniczny zwiększa produktywność zarówno siły roboczej jak i kapitału (Hall, Taylor 2000). Kolejnym czynnikiem wzrostu gospodarczego jest wydajność pracy. Jest to stosunek ilości produktów i usług do poniesionych na ich wytworzenie nakładów pracy żywej. Na poziom wydajności pracy wpływ wywiera wiele czynników wzajemnie ze sobą powiązanych. Są to: warunki naturalne, organizacja procesu pracy, środki i metody motywacyjne, techniczne uzbrojenie pracy, stosunki społeczne w miejscu pracy. Ważnym czynnikiem określającym poziom wydajności pracy jest intensywność pracy, czyli stopień nateżenia pracy w toku jej wykonywania, wysiłku fizycznego i psychicznego w czasie pracy. Wzrost intensywności pracy umożliwia otrzymanie większej ilości produktów, czyli zwiększenie wydajności pracy (Grabowski 1998).

## BUDOWA MODELU ZGODNEGO

Można wyodrębnić kilka rodzajów modeli ekonometrycznych opisujących systemy i podsystemy gospodarcze, zależnie od charakteru ich uczestników, rodzaju działalności oraz powiązań z pozostałymi podmiotami. Należą do nich:

- ekonometryczne modele podmiotów gospodarczych: przedsiębiorstw, gospodarstw domowych, instytucji publicznych i podmiotów zagranicznych,
- ekonometryczne modele rynków – towarów i usług, pracy oraz pieniężnych,
- ekonometryczne modele rodzajów działalności gospodarczej – najogólniej można wyróżnić przepływy realne i finansowe oraz łączące je procesy kształtowania cen (Welfe, Welfe 2004).

Oszacowany model będzie wielorównaniowym modelem zgodnym. Przez zgodność modelu rozumie się zgodność harmonicznej struktury procesu endogenicznego i łącznej harmonicznej struktury procesów objaśniających oraz procesu resztowego, który jest niezależny od procesów objaśniających. Inaczej mówiąc, zgodność modelu liniowego polega na tym, że w każdym równaniu zachodzi zgodność struktury procesu endogenicznego oraz struktury liniowej formy ważonej procesów objaśniających i procesu resztowego. (Talaga, Zieliński 1986)

Do budowy modelu zgodnego przyjęto zmienne w postaci szeregów czasowych z lat 1995 – 2005 w ujęciu kwartalnym. Są to: AB – akumulacja brutto w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, BUD – przychody z budownictwa w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, EXP – wartość eksportu w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, IMP – wartość importu w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, INF – stopę inflacji, INW – wartość inwestycji w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, PK – popyt krajowy w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, PKB – wartość produktu krajowego brutto w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, PRZ – przychody z przemysłu w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, ROL – przychody z rolnictwa, leśnictwa, myślistwa, rybołówstwa w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, SI – spożycie indywidualne w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, SO – spożycie ogółem w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, SZ – spożycie zbiorowe w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, SPK – stopa procentowa kredytu redyskontowego, UN – przychody z usług nierynkowych w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, UR – przychody z usług rynkowych w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, USD – kurs dolara amerykańskiego w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, WDB – wartość dodana brutto w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, WYD – wydajność pracy w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, WYN – wynagrodzenia w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, X – saldo obrotów handlu zagranicznego w cenach stałych z IV kw. 2005 roku, ZATR – zatrudnienie. Ich wewnętrzną strukturę przedstawia tabela 2. Pierwszym krokiem budowy dynamicznych modeli zgodnych jest oszacowanie, na podstawie analizy wewnętrznej struktury procesów, tzw. modeli podstawowych. Strukturę procesów ekonomicznych przedstawi tabela 1.

Tabela 1. Struktura procesów stochastycznych

	R	Q	S	Z		R	Q	S	Z
AB	3	5	+	-	SO	1	2	+	-
BUD	0	5	+	-	SZ	1	0	+	-
EXP	2	5	-	-	SPK	1	3	-	-
IMP	1	5	-	-	UN	1	4	+	-
INF	1	1	+	-	UR	1	4	+	-
INW	2	5	+	-	USD	2	1	-	-
PK	1	1	+	-	WDB	1	5	+	-
PKB	1	5	+	+ 2000	WYD	1	5	+	-
PRZ	1	3	+	-	WYN	1	0	-	+ 1999
ROL	1	1	+	-	X	2	4	-	-
SI	1	1	+	-	ZATR	3	4	+	+ 2000

Źródło: opracowanie własne

r – stopień wielomianu trendu, q – rząd autoregresji, s – występowanie sezonowości, z – występowanie istotnego załamania szeregu czasowego, będącego wyrazem zmiany sposobu szacowania przez GUS (w nawiasach podano rok od którego ta zmiana występuje).

Do specyfikacji równań modelu zostanie wykorzystany test przyczynowości Grangera. Test Grangera oparty jest na koncepcji modelowej i wynika wprost z definicji przyczynowości (Granger 1969).

Niech dany będzie przypadek dwuwymiarowy postaci:

$$y_t = A_0 D_t + A(u) y_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$y_t = A_1 D_t + \Gamma(u)y_t + B(u)x_t + \eta_t \quad (2)$$

są to modele oszacowane klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, z których pierwszy jest modelem AR(p) dla szeregu  $y_t$  natomiast drugi jest modelem autoregresyjnym z rozłożonymi opóźnieniami zawierającym strukturę autoregresyjną szeregu  $x_t$ , Hipoteza zerowa dla jednokierunkowej zależności przyczynowej zakłada, że  $x_t$  nie jest przyczyną  $y_t$ , tzn.:

$$H_0: B(u) = 0 \quad (3)$$

Hipoteza alternatywna wówczas ma postać:

$$H_1: B(u) \neq 0 \quad (4)$$

Zakładając, że  $s^2(\varepsilon_t)$  i  $s^2(\eta_t)$  są estymatorami odpowiednich wariancji resztowych w równaniach odpowiednio (1) i (2), statystykę testu Grangera można przedstawić w postaci:

$$T_G^w = \frac{T(s^2(\varepsilon_t) - s^2(\eta_t))}{s^2(\eta_t)} \quad (5)$$

gdzie: T – liczebność próby

Statystyka ta jest zbieżna do rozkładu  $\chi^2(q)$ . W przypadku testowania hipotezy o przyczynowości jednoczesnej model (2) przyjmie postać:

$$y_t = A_1 D_t + \Gamma(u)y_t + B_1(u)x_t + \eta_t \quad (6)$$

gdzie:  $B_1(u) = \sum_{i=0}^q \beta_i u^i$

Hipotezę zerową można zapisać wówczas:

$$H_0: \beta_0 = 0 \quad (7)$$

Wobec alternatywy:

$$H_1: \beta_0 \neq 0 \quad (8)$$

Gdy analizowane jest sprzężenie zwrotne między procesami, wówczas oddzielnie należy testować hipotezy:  $x_t$  nie jest przyczyną  $y_t$  oraz  $y_t$  nie jest przyczyną  $x_t$ . Modele (1) i (2) należy odpowiednio w tym celu zmodyfikować (Osińska 2005).

Wyniki testu przyczynowości Grangera zaprezentowano w tabelach 1a – 1d.

Tabela 1a. Wyniki testu przyczynowości dla opóźnienia  $s = 1$ . Tabela 1b. Wyniki testu przyczynowości dla opóźnienia  $s = 2$ .

$s=1$	INW	ZATR	EXP	IMP	WYD	WYN	AB	$s=2$	INW	ZATR	EXP	IMP	WYD	WYN	AB
INW	-	0,04279	0,58493	0,79291	0,01944	0,41379	0,05423	INW	-	0,19697	0,77790	0,76515	0,01069	0,59789	0,01992
ZATR	0,05272	-	0,13592	0,12264	0,04457	0,09830	0,70720	ZATR	0,05210	-	0,33152	0,21506	0,07034	0,05390	0,70241
EXP	0,61834	0,90266	-	0,05671	0,21208	0,14147	0,67370	EXP	0,92643	0,10515	-	0,03545	0,76480	0,54389	0,39847
IMP	0,66725	0,29702	0,29101	-	0,36656	0,21387	0,65503	IMP	0,86266	0,35614	0,90827	-	0,94490	0,10230	0,53191
WYD	0,26293	0,00441	0,47531	0,23267	-	0,07265	0,59306	WYD	0,34958	0,06339	0,89842	0,25819	-	0,02155	0,76353
WYN	0,66994	0,03743	0,66034	0,36229	0,03533	-	0,36036	WYN	0,33037	0,07241	0,96574	0,55155	0,00866	-	0,83517
AB	0,33209	0,61829	0,45834	0,59962	0,84221	0,28418	-	AB	0,79689	0,37999	0,33267	0,59679	0,77501	0,45643	-
INF	0,05762	0,69514	0,00214	0,02036	0,18207	0,07119	0,32639	INF	0,01496	0,22089	0,08241	0,02024	0,31066	0,17756	0,49278
USD	0,09628	0,65255	0,08670	0,90279	0,50551	0,08102	0,77869	USD	0,00466	0,95641	0,09421	0,89067	0,50503	0,05783	0,39470
SPK	0,08840	0,73796	0,75902	0,59540	0,64213	0,52790	0,71826	SPK	0,04044	0,18717	0,92200	0,84388	0,44472	0,64546	0,59266
PK	0,24880	0,66547	0,78691	0,02315	0,42263	0,83232	0,39080	PK	0,78340	0,28652	0,53997	0,07453	0,34666	0,47583	0,47578
X	0,05214	0,23892	0,68238	0,86398	0,36454	0,38751	0,99097	X	0,04632	0,47330	0,25642	0,98453	0,66335	0,19127	0,83637
WDB	0,06461	0,54077	0,16230	0,11276	0,08197	0,65780	0,42921	WDB	0,01496	0,72782	0,98305	0,79908	0,01314	0,80228	0,63098
PKB	0,02962	0,00924	0,45335	0,52223	0,99266	0,18026	0,13451	PKB	0,09257	0,05747	0,46832	0,10093	0,52611	0,18077	0,25374

źródło: obliczenia własne

źródło: obliczenia własne

Tabela 1c. Wyniki testu przyczynowości dla opóźnienia  $s = 3$ .

$s=3$	INW	ZATR	EXP	IMP	WYD	WYN	AB
INW	-	0,06631	0,14127	0,67905	0,08892	0,96107	0,03993
ZATR	0,02046	-	0,50037	0,15134	0,01042	0,04405	0,65464
EXP	0,57819	0,63286	-	0,00827	0,86925	0,18661	0,12789
IMP	0,17737	0,63606	0,37895	-	0,80176	0,45195	0,81399
WYD	0,43719	0,08731	0,90211	0,12480	-	0,03440	0,57918
WYN	0,76664	0,02778	0,25629	0,94757	0,05551	-	0,05347
AB	0,97188	0,97778	0,45472	0,30132	0,25457	0,92802	-
INF	0,07266	0,55081	0,05545	0,02214	0,66989	0,08088	0,04262
USD	0,08759	0,76363	0,07979	0,03193	0,20244	0,04449	0,28981
SPK	0,05412	0,83162	0,35247	0,81297	0,53544	0,99056	0,51764
PK	0,67450	0,66301	0,80119	0,09960	0,06301	0,77037	0,12499
X	0,02529	0,32685	0,74444	0,02734	0,37204	0,55057	0,78254
WDB	0,08984	0,54004	0,36008	0,46443	0,04876	0,90238	0,39748
PKB	0,04376	0,04872	0,42870	0,51555	0,50945	0,40325	0,31088

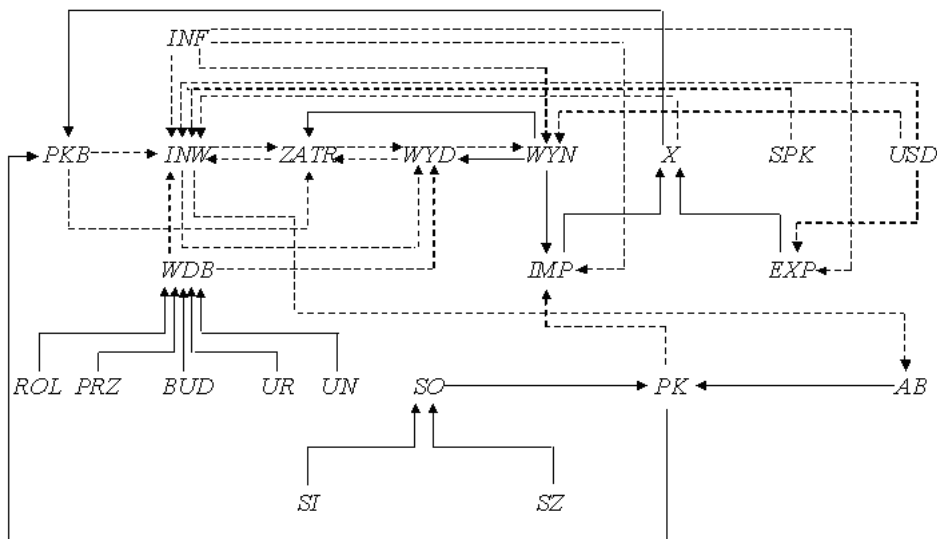
Tabela 1d. Wyniki testu przyczynowości dla opóźnienia  $s = 4$ .

$s=4$	INW	ZATR	EXP	IMP	WYD	WYN	AB
INW	-	0,00758	0,02157	0,98888	0,00143	0,67384	0,56064
ZATR	0,02436	-	0,97739	0,41215	0,07550	0,09572	0,96118
EXP	0,97024	0,34586	-	0,04129	0,32331	0,20335	0,22442
IMP	0,10366	0,87027	0,80182	-	0,47435	0,34266	0,16018
WYD	0,67650	0,06605	0,17467	0,83331	-	0,06226	0,92133
WYN	0,76486	0,18195	0,24484	0,66358	0,03088	-	0,89672
AB	0,78685	0,21653	0,75542	0,18466	0,03065	0,84776	-
INF	0,03671	0,13483	0,06688	0,04849	0,86613	0,25782	0,42996
USD	0,30791	0,62684	0,07398	0,99333	0,34017	0,02506	0,27684
SPK	0,08253	0,89478	0,03744	0,88197	0,38883	0,91825	0,24343
PK	0,25761	0,57795	0,73285	0,09737	0,27164	0,77844	0,22050
X	0,00187	0,49341	0,82489	0,28160	0,68914	0,23994	0,43214
WDB	0,04585	0,81664	0,17632	0,77558	0,00123	0,05354	0,67670
PKB	0,01603	0,01495	0,81549	0,76699	0,05341	0,97320	0,15291

źródło: obliczenia własne

źródło: obliczenia własne

Na podstawie wyników testu przyczynowości, teorii ekonomicznej, struktury procesów powstał rysunek 1., opisujący schemat powiązań między zmiennymi makroekonomicznymi uwzględnionymi w modelu.



Rysunek 1. Schemat powiązań między zmiennymi makroekonomicznymi

———— wpływ zmiennych z okresu bieżącego,

----- wpływ zmiennych z okresu bieżącego i okresów wcześniejszych

Schemat przedstawia trzy bezpośrednie sprzężenia zwrotne. Tworzą je: inwestycje i zatrudnienie, zatrudnienie i wydajność, wydajność i wynagrodzenia; jedno pośrednie sprzężenie zwrotne, które tworzą: produkt krajowy brutto, inwestycje, akumulacja brutto, popyt krajowy. Pięć zmiennych modelu jest opisane za pomocą równań tożsamościowych. Są to: wartość dodana brutto, spożycie ogółem, popyt krajowy, eksport netto, produkt krajowy brutto.

## ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELU

Z uwagi na fakt, że wszystkie równania modelu są identyfikowalne niejednoznacznie, właściwą do estymacji metodą jest podwójna metoda najmniejszych kwadratów (2MNK). Idea tej metody polega na dwukrotnym zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów.

Oszacowany model składa się z dwóch części:

- siedmiu równań stochastycznych opisujących: INW, ZATR, WYN, WYD, AB, EXP, IMP,

- pięciu równań tożsamościowych opisujących PKB, PK, SO, WDB, X.

Oszacowany 2MNK model ma postać:

$$\begin{aligned} \hat{INW} = & -281826 + 0,42 PKB + 15,72 ZATR + 8,85 ZATR_{-1} - 99580,1 INF - \\ & - 90495,5 INF_{-1} + 4397,43 USD_{-1} + 739,631 SPK_{-1} - 366,52 SPK_{-3} + \\ & + 0,48 X_{-1} + 0,46 X_{-3} - 2922,84 t + 186,37 t^2 - 2,75 t^3 \end{aligned} \quad (9)$$

$$R^2 = 98,51\% \quad DW = 2,29$$

$$\begin{aligned} \hat{ZATR} = & 6068,8 + 0,0129 PKB - 116,09 WYD + 22,52 WYD_{-4} + \\ & + 0,2 ZATR_{-4} - 296,95 Z + 87,44 t - 4,59 t^2 + 0,061 t^3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$R^2 = 99,82\% \quad DW = 2,45$$

$$\begin{aligned} \hat{WYD} = & 22,37 - 0,0027 ZATR + 0,27 WYD_{-4} + 0,00013 WDB - \\ & - 0,0000328 WDB_{-4} \end{aligned} \quad (11)$$

$$R^2 = 99,61\% \quad DW = 1,91$$

$$\begin{aligned} \hat{WYN} = & 1261,26 + 52,97 USD + 13,51 t + 32,32 Q_1 - 52,73 Q_2 - \\ & - 57,56 Q_3 + 399,24 Z_{wyn} \end{aligned} \quad (12)$$

$$R^2 = 99,47\% \quad DW = 1,70 \quad d_4 = 77,97$$

$$\begin{aligned} \hat{IMP} = & -25469,1 + 0,44 IMP_{-1} + 0,29 PK + 11479,4 USD - 51,91 WYN + \\ & + 195360 INF + 9563,14 Z_{wyn} + 1979,02 t \end{aligned} \quad (13)$$

$$R^2 = 98,22\% \quad DW = 1,87$$

$$\begin{aligned} \hat{EXP} = & -21205,6 + 0,56 EXP_{-1} + 0,55 EXP_{-4} - 0,69 EXP_{-5} + \\ & + 10277,3 USD - 740,84 t + 39,26 t^2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$R^2 = 97,45\% \quad DW = 2,04$$

$$\hat{AB} = 6879,06 - 0,15 AB_{-s} + 2,07 INW + 6906,12Z + 0,078t^3 \quad (15)$$

(±2211,81)    (±0,03)    (±0,07)    (±1494,12)    (±0,03)

$$R^2 = 96,86\% \quad DW = 1,73$$

$$PKB = PK + X \quad (16)$$

$$PK = SO + AB \quad (17)$$

$$SO = SI + SZ \quad (18)$$

$$X = EXP - IMP \quad (19)$$

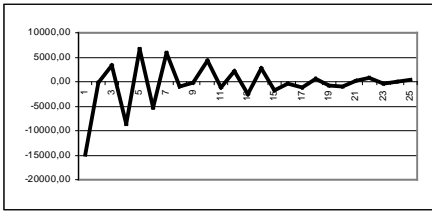
$$WDB = ROL + PRZ + BUD + UR + UN \quad (20)$$

Inwestycje zależą od inflacji z okresu bieżącego i okresów wcześniejszych, eksportu netto, kursu dolara amerykańskiego i stóp procentowych z okresów wcześniejszych, zatrudnienia z okresu bieżącego i okresów wcześniejszych oraz produktu krajowego brutto z okresu bieżącego. Zatrudnienie zależy od produktu krajowego brutto z okresu bieżącego oraz wydajności z okresu bieżącego i okresów wcześniejszych. Wydajność zależy od zatrudnienia z okresu bieżącego oraz wartości dodanej brutto z okresu bieżącego i okresów wcześniejszych. Wynagrodzenia zależą od kursu dolara amerykańskiego z okresu bieżącego. Import zależy od popytu krajowego z okresu bieżącego, wynagrodzeń z okresu bieżącego oraz inflacji z okresu bieżącego. Eksport zależy od kursu dolara amerykańskiego. Akumulacja brutto zależy inwestycji z okresu bieżącego. Pozostałe zmienne wchodzi do modelu tworząc równania tożsamościowe.

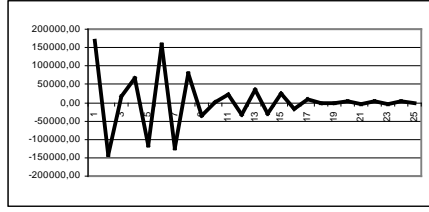
Oszacowane parametry są istotne przy 5% poziomie istotności. Pod ocenami parametrów zostały podane wartości błędów estymacji. Wartości statystyk Durбина – Watsona wskazują na brak autokorelacji składnika losowego pierwszego rzędu. Wartości współczynnika determinacji  $R^2$  wskazują na wysokie dopasowanie równań modelu do danych empirycznych.

## ANALIZA MNOŻNIKOWA

Mnożnik  $M_s$  wyraża wpływ zmiennych egzogenicznych na zmienne endogeniczne po upływie  $s$  okresów, tj. wpływ zmiennych egzogenicznych w okresie  $t-s$ , na zmienne endogeniczne w okresie  $t$ . Przy czym:  $M_0$  jest to mnożnik bezpośredni, wyrażający natychmiastowy wpływ zmiennych egzogenicznych na zmienne endogeniczne,  $M_1$  – mnożnik dynamiczny (pośredni) pierwszy,  $M_2$  – mnożnik pośredni drugi,  $M_3$  – mnożnik pośredni trzeci, itd. Wyznaczone mnożniki zostały zaprezentowane w tabelach 3 – 5. Wartości mnożników co do wartości bezwzględnej maleją co świadczy o zmniejszającym wpływie poszczególnych zmiennych egzogenicznych na zmienne endogeniczne. Przykłady zostały zamieszczone na rysunkach 2 – 3.



Rysunek 2. Mnożniki USD na INW



Rysunek 3. Mnożniki INF na IMP

Tabela 3. Mnożniki kursu dolara amerykańskiego

§	USD/INW	USD/ZATR	USD/MYD	USD/MYIN	USD/EX P	USD/IMP	USD/AB	USD/P KB	USD/P K	USD/X	USD/M DB	USD/S O
0	-14937,89	-392,34	1,0593	52,97	10277,30	-237,37	-30921,01	-20881,08	-30921,01	10039,93	0	0
1	-141,43	-154,59	0,4174	-1,2E-14	5755,29	-13690,15	-292,77	-8227,83	-292,77	-7934,86	0	0
2	3256,81	221,48	-0,5980	1,11E-14	3222,96	1826,52	6739,11	11787,59	6739,11	5048,48	0	0
3	-8564,39	-340,08	0,9182	-9,4E-15	1804,86	-2176,00	-17728,29	-18099,42	-17728,29	-371,14	0	0
4	6604,86	182,11	-0,2057	4,95E-15	6663,24	-3836,55	13872,05	16499,74	13872,05	2827,68	0	0
5	-5205,47	-304,15	1,5369	-4,6E-15	-194,52	2890,86	-10775,31	-8078,97	-10775,31	2696,34	4638,16	0
6	5844,49	232,04	-0,7823	4,07E-15	-2307,45	-1232,69	12098,09	8557,94	12098,09	-3540,14	43,92	0
7	-1058,63	-89,16	0,3572	-2,9E-15	-2523,34	4687,66	-2191,37	-27,05	-2191,37	2164,32	-1010,87	0
8	-259,92	-15,01	0,3307	1,98E-15	1006,30	-1120,24	-538,04	-651,92	-538,04	-113,88	2659,24	0
9	4332,94	95,39	-0,2484	-1,8E-15	-4141,06	2364,33	8969,19	7192,46	8969,19	-1776,73	-2050,81	0
10	-1108,94	-4,04	0,0085	1,87E-15	-3453,87	3280,75	-2295,51	-2468,64	-2295,51	-173,13	1616,30	0
11	2211,36	63,67	-0,2810	-1,1E-15	-1729,87	317,46	4577,51	3165,10	4577,51	-1412,41	-1814,71	0
12	-2458,40	-62,95	0,2222	5,73E-16	1325,88	538,33	-5088,88	-3224,67	-5088,88	1864,21	328,71	0
13	2816,10	76,14	-0,2006	-2,2E-16	-2229,48	-548,60	5829,33	3051,25	5829,33	-2778,08	80,71	0
14	-1692,61	-5,71	-0,2057	6,7E-16	-290,81	1548,83	-3503,71	-2245,69	-3503,71	1259,02	-1345,38	0
15	-486,54	-24,15	0,0085	-7,8E-16	1268,89	-1833,70	-1007,13	-1571,94	-1007,13	-664,81	344,33	0
16	-1112,15	-19,08	0,0124	4,1E-16	2633,42	-1110,76	-2302,15	-779,50	-2302,15	1522,66	-686,63	0
17	557,48	4,80	0,0297	-4,3E-16	-666,35	-678,29	1153,98	-190,67	1153,98	-1344,65	763,33	0
18	-757,72	3,79	-0,1391	6,24E-16	1005,24	52,89	-1568,48	-510,36	-1568,48	1058,13	-874,40	0
19	-890,51	-48,17	0,2119	-9,7E-16	1461,48	-1224,70	-1843,35	-1806,57	-1843,35	236,78	525,56	0
20	103,89	3,58	0,0339	6,28E-16	1391,27	-748,83	214,64	857,09	214,64	642,45	151,07	0
21	702,55	7,93	0,0086	-4,9E-16	-1404,44	516,18	1454,28	566,02	1454,28	-889,26	345,32	0
22	-328,42	2,06	-0,0394	5,88E-16	226,18	442,73	-679,82	-10,91	-679,82	668,91	-173,10	0
23	8,85	-19,99	0,1260	-7,7E-16	236,86	-293,81	18,32	-38,63	18,32	-56,95	235,27	0
24	386,15	12,74	0,0062	6,35E-16	-110,58	239,87	799,34	928,63	799,34	129,29	276,50	0

źródło: obliczenia własne

Tabela 4. Mnożniki stopy procentowej

§	SPK/INW	SPK/ZATR	SPK/MYD	SPK/MYIN	SPK/EX P	SPK/IMP	SPK/AB	SPK/P KB	SPK/P K	SPK/X	SPK/M DB	SPK/S O
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-812,56	-40,77	0,1101	-1,6E-15	0	-487,78	-1681,99	-2169,77	-1681,99	-487,78	0	0
2	1235,23	48,07	-0,1298	1,27E-15	0	1,43	2556,92	2558,34	2556,92	1,43	0	0
3	-949,63	-26,51	0,0716	-1,3E-16	0	554,98	-1965,74	-1410,76	-1965,74	554,98	0	0
4	644,81	16,10	-0,0435	-6,8E-17	0	-477,84	1334,76	856,92	1334,76	-477,84	0	0
5	-136,59	-8,11	0,0543	-8,4E-18	0	505,30	-282,73	222,57	-282,73	505,30	0	0
6	-254,99	-5,01	0,0113	1,75E-17	0	-277,47	-527,84	-805,31	-527,84	-277,47	252,30	0
7	381,16	14,55	-0,0698	4,83E-17	0	-3,44	789,00	785,56	789,00	-3,44	-383,54	0
8	-391,19	-14,34	0,0653	-3,8E-17	0	112,33	-809,77	-697,44	-809,77	112,33	294,86	0
9	342,05	11,52	-0,0425	2,85E-17	0	-150,96	708,05	557,08	708,05	-150,96	-200,21	0
10	-255,52	-8,22	0,0232	-6,8E-17	0	158,15	-528,93	-370,78	-528,93	158,15	42,41	0
11	154,41	4,82	-0,0101	8,14E-17	0	-140,04	319,63	179,59	319,63	-140,04	79,18	0
12	-67,72	-1,67	-0,0021	-5,9E-17	0	99,98	-140,19	-40,20	-140,19	99,98	-118,35	0
13	8,31	-0,53	0,0118	4,01E-17	0	-56,69	17,21	-39,48	17,21	-56,69	121,46	0
14	31,54	1,58	-0,0131	-2,7E-17	0	26,51	65,30	91,80	65,30	26,51	-106,21	0
15	-55,26	-2,04	0,0107	1,05E-17	0	-4,44	-114,38	-118,82	-114,38	-4,44	79,34	0
16	61,86	2,15	-0,0091	4,48E-18	0	-13,20	128,04	114,85	128,04	-13,20	-47,94	0
17	-55,63	-1,88	0,0073	-1E-17	0	22,95	-115,15	-92,20	-115,15	22,95	21,03	0
18	43,49	1,38	-0,0044	1,14E-17	0	-24,56	90,02	65,46	90,02	-24,56	-2,58	0
19	-29,59	-0,85	0,0016	-1,2E-17	0	21,85	-61,25	-39,40	-61,25	21,85	-9,79	0
20	15,86	0,41	0,0001	1,07E-17	0	-17,43	32,82	15,39	32,82	-17,43	17,16	0
21	-4,19	-0,05	-0,0010	-7,4E-18	0	11,93	-8,67	3,26	-8,67	11,93	-19,21	0
22	-3,90	-0,20	0,0017	4,02E-18	0	-6,15	-8,07	-14,22	-8,07	-6,15	17,27	0
23	8,38	0,33	-0,0019	-1,7E-18	0	1,48	17,35	18,83	17,35	1,48	-13,50	0
24	-10,07	-0,36	0,0017	1,56E-20	0	1,59	-20,84	-19,25	-20,84	1,59	9,19	0

źródło: obliczenia własne

Tabela 5. Mnożniki stopy inflacji

s	INF/INW	INF/ZATR	INF/WYD	INF/WYN	INF/EXP	INF/IMP	INF/AB	INF/PKB	INF/PK	INF/X	INF/WDB	INF/SO
0	-44135,60	1456,27	-3,9319	2,13 E-13	0	168865,40	-91360,70	77504,70	-91360,70	168865,40	0	0
1	-171031,83	-9338,55	25,2087	-3,9 E-13	0	-142869,12	-354035,89	-496905,01	-354035,89	-142869,12	0	0
2	288538,93	11550,03	-31,1851	3,23 E-13	0	17434,13	597275,59	614709,72	597275,59	17434,13	0	0
3	-328026,13	-11520,29	31,1048	-2,4 E-13	0	65887,17	-679014,09	-613126,91	-679014,09	65887,17	0	0
4	303865,29	10107,06	-28,3607	1,57 E-13	0	-116355,87	629001,15	512645,28	629001,15	-116355,87	0	0
5	-196647,14	-8011,35	30,2185	-1,1 E-13	0	158713,23	-407059,58	-248346,35	-407059,58	158713,23	13704,11	0
6	90088,41	3752,84	-11,6489	7,21 E-14	0	-125026,14	186483,00	61456,86	186483,00	-125026,14	53105,38	0
7	-4192,31	-455,00	-2,0201	-4,5 E-14	0	79535,88	-8678,07	70857,81	-8678,07	79535,88	-89591,34	0
8	-52991,83	-1660,74	10,0701	2,87 E-14	0	-35629,35	-109693,10	-145322,45	-109693,10	-35629,35	101852,11	0
9	82860,35	2671,84	-11,7316	-1,4 E-14	0	1476,11	171520,93	172997,03	171520,93	1476,11	-94350,17	0
10	-89005,80	-2877,53	10,9686	-2,7 E-15	0	22039,03	-184242,00	-162202,97	-184242,00	22039,03	61058,94	0
11	79136,09	2501,16	-8,2472	1,22 E-14	0	-33561,09	163811,70	130250,61	163811,70	-33561,09	-27972,45	0
12	-61104,15	-1836,68	4,7916	-1,6 E-14	0	35396,33	-126485,59	-91089,26	-126485,59	35396,33	1301,71	0
13	41396,37	1120,11	-1,2223	1,65 E-14	0	-30803,41	85690,49	54887,08	85690,49	-30803,41	16453,96	0
14	-22483,33	-523,58	-0,8012	-1,5 E-14	0	24207,08	-46540,49	-22333,41	-46540,49	24207,08	-25728,14	0
15	6947,30	49,03	2,0728	1,06 E-14	0	-16307,35	14380,90	-1926,45	14380,90	-16307,35	27636,30	0
16	4011,46	270,26	-2,6694	-6,2 E-15	0	8735,67	8303,71	17039,39	8303,71	8735,67	-24571,75	0
17	-10251,05	-437,26	2,8234	2,79 E-15	0	-2500,07	-21219,87	-23719,73	-21219,87	-2500,07	18972,84	0
18	12737,99	473,48	-2,3939	-2,3 E-16	0	-1690,04	26367,63	24677,59	26367,63	-1690,04	-12853,57	0
19	-12387,62	-429,16	1,7968	-1,6 E-15	0	4165,47	-25642,36	-21476,89	-25642,36	4165,47	6981,07	0
20	10224,60	338,82	-1,1734	2,49 E-15	0	-5144,81	21164,93	16020,12	21164,93	-5144,81	-2157,14	0
21	-7188,99	-225,70	0,6408	-2,6 E-15	0	4997,02	-14881,22	-9884,20	-14881,22	4997,02	-1245,56	0
22	4126,77	117,56	-0,1644	2,24 E-15	0	-4070,44	8542,41	4471,97	8542,41	-4070,44	3182,95	0
23	-1505,56	-30,68	-0,1556	-1,7 E-15	0	2854,87	-3116,51	-261,64	-3116,51	2854,87	-3955,14	0
24	-435,35	-29,90	0,3286	1,11 E-15	0	-1632,60	-901,17	-2533,77	-901,17	-1632,60	3846,35	0

źródło: obliczenia własne

## PROGNOZY ZMIENNYCH MAKROEKONOMICZNYCH

Na podstawie modelu wyznaczono prognozy na I kwartał 2006 roku. Z uwagi na występowanie sprzężeń zwrotnych, prognozy zostały wyznaczone z formy zredukowanej. Wartość zmiennej INF została oszacowana na podstawie prognozy inflacji wyznaczonej przez Ministerstwo Finansów. Wartość SPK została przyjęta na poziomie rzeczywistym w styczniu 2006 roku. Wartości wyznaczonych prognoz oraz błędów ex ante zawiera tabela 5.

Tabela 6. Wartości prognoz na I kw. 2006 oraz błędy ex ante

zmienna	prognoza I 2006	Względny błąd ex ante	Zmienna	prognoza I 2006	Względny błąd ex ante
USD	3,0854	5,72%	ZATR	7618,71	0,67%
WDB	207193,80	1,92%	WYD	29,872	0,38%
SI	159440,24	1,45%	SO	205635,94	*
SZ	46195,70	2,55%	PK	249604,34	*
IMP	95559,9	3,12%	AB	43968,40	8,47%
INW	15993,94	7,81%	X	-4130,24	*
WYN	2464,08	1,23%	PKB	245474,11	*
EXP	91429,6	4,05%	INF	0,001998	Prognoza MF
SPK	4,25	wart. rzeczywista			

źródło: opracowanie własne



Na podstawie wartości względnych błędów *ex ante* wnioskuje się o dopuszczalności wyznaczonych prognoz. Za błąd graniczny autor przyjmuje 10% zatem oszacowane prognozy są dopuszczalne. \* oznacza brak możliwości oszacowania błędów, ponieważ prognozy zostały wyznaczone na podstawie równań tożsamościowych.

## ZAKOŃCZENIE

W pracy zaprezentowano oszacowanie modelu dla danych makroekonomicznych oraz jego wykorzystanie do wyznaczenia mnożników i prognoz na I kwartał 2006 roku. Schemat zależności, który był podstawą oszacowania modelu nie został w całość potwierdzony w drodze estymacji modelu. Z bezpośrednich sprzężeń zwrotnych pozostało tylko sprzężenie pomiędzy wydajnością pracy zatrudnieniem. Sprzężenie pośrednie natomiast znalazło odzwierciedlenie w oszacowanym modelu. Rzeczywistość gospodarcza charakteryzuje się bardzo dużą zmiennością co powoduje, że wykorzystanie metod ilościowych w długich horyzontach czasowych może dawać odbiegające od rzeczywistości wyniki. Niemniej jednak metody statystyczno – matematyczne w ekonomii są powszechnie stosowane, co potwierdza ich przydatność we wspomaganie działalności gospodarczej.

## LITERATURA

- Begg D., Fischer S., Dornbusch R. (1996) Makroekonomia, PWE, Warszawa  
Grabowski T. (2000) Podstawy teorii ekonomii, Wyd. Adam Marszałek, Toruń  
Granger C. W. J. (1969) Investigating Causal Relations by Econometric Models And Cross-spectral Methods, *Econometrica*, Vol. 37, No.3., 424 – 438  
Hall R. E., Taylor J. B. (2000) Makroekonomia, PWN, Warszawa  
Milewski R. (1999) Elementarne zagadnienia ekonomii, PWN, Warszawa  
Osińska M. (2005) Ekonometria finansowa, PWE, Warszawa  
Polszakiewicz B. (1994) Wybrane problemy ekonomii, Tom 1, UMK, Toruń  
Talaga L., Zieliński Z. (1986) Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym, PWN, Warszawa  
Welfe W., Welfe A. (2004) Ekonometria stosowana, PWE, Warszawa

### **Econometric modelling of choosen macroeconomic indicators in Poland**

**Summary:** In the presented paper an example of econometric modelling of chosen macroeconomic indicators using dynamic consistent models was presented. On the ground of estimated model forecasts for the first quarter of 2006 and multiplier analysis were made.

**Key words:** dynamic consistent model, multiplier, forecasting

Grażyna Trzpiot, Dominik Krężołek  
Katedra Statystyki Akademii Ekonomicznej w Katowicach  
e-mail: [trzpiot@sulu.ae.katowice.pl](mailto:trzpiot@sulu.ae.katowice.pl), [dominik\\_tarkano@wp.pl](mailto:dominik_tarkano@wp.pl)

## STATYSTYCZNA WERYFIKACJA MODELU CAPM NA PRZYKŁADZIE POLSKIEGO RYNKU KAPITAŁOWEGO

**Streszczenie:** Poniższa praca prezentuje testy badające zasadność stosowania modelu wyceny aktywów kapitałowych CAPM w przypadku Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie SA. Wykorzystano dwa podejścia do testowania modelu: tradycyjne (zaproponowane przez Fama i MacBeth) oraz warunkowe (zaproponowane przez Pettengill, Sundaram oraz Matur). Podejście warunkowe zawiera dodatkowo test średnio dodatnich nadwyżek rynkowych oraz test symetryczności zależności ryzyko – dochód w okresach dodatnich i ujemnych nadwyżek rynkowych. Weryfikację modelu przeprowadzono dla dziennych logarytmicznych stóp zwrotu z akcji 92 spółek notowanych na GPW w okresie styczeń 2000 – grudzień 2005.

**Słowa kluczowe:** CAPM, współczynnik beta, metoda najmniejszych kwadratów (MNK), równanie regresji, model korelacji krzyżowej

### WPROWADZENIE

Model wyceny aktywów kapitałowych (Capital Asset Pricing Model) powstał dzięki pracom W. Sharpe'a [Sharpe 1964]. W modelu tym zmiany ceny akcji tłumaczy się jako dążenie do osiągnięcia przez nie stanu równowagi. Każdy walor w modelu charakteryzuje się ryzykiem, mierzonym współczynnikiem beta, oraz stopą zwrotu. Współczynnik beta jest jedną z miar ryzyka, określającą zależność stopy zwrotu akcji od przeciętnej stopy zwrotu obserwowanej na rynku. Informuje, o ile w przybliżeniu zmieni się stopa zwrotu danego waloru, jeśli stopa zwrotu dla indeksu rynkowego wzrośnie o jeden procent [Gołębowska 2002]. Tak więc współczynnik beta mierzy wrażliwość danego waloru na ruchy rynku [Bryka-Kita i in. 2004]. Testowanie modelu CAPM opiera się na sprawdzeniu, czy zachowana jest relacja pomiędzy ryzykiem rynkowym, wyrażonym przez współczynnik beta, a oczekiwaną stopą zwrotu z akcji. Powstało również wiele prac, które zarówno potwierdzają jak i negują podstawowe założenia modelu.

### METODOLOGIA TESTOWANIA MODELU

Zasadność stosowania modelu CAPM w warunkach polskiego rynku kapitałowego przetestowano stosując dwa podejścia: tradycyjne (traditional approach) oraz warunkowe (conditional approach).

Tradycyjne podejście do testowania CAPM zaproponowali Fama i MacBeth [Fama i in. 1973]. Koncepcja ta zakłada podział całego okresu badawczego na trzy

podokresy: budowania portfeli (portfolio formation subperiod), szacowania współczynników beta portfeli (initial estimation subperiod) oraz testowania modelu (testing subperiod).

W podokresie formowania portfeli, współczynniki beta dla poszczególnych akcji objętych badaniem szacowane są metodą najmniejszych kwadratów na podstawie równania regresji:

$$R_{it} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i R_{mt} + \hat{\xi}_{it}, \quad (1)$$

gdzie  $\hat{\beta}_i$  oznacza estymator rzeczywistego parametru  $\beta$  dla  $i$ -tego aktywu, natomiast  $\hat{\xi}_{it}$  oznacza błąd szacunku, z założenia losowy, dla  $i$ -tego aktywu w okresie  $t$ .

Oszacowane w ten sposób współczynniki beta służą następnie do utworzenia portfeli. Proces ten odbywa się na zasadzie rankingu – do portfela pierwszego wchodzi określona ilość walorów o najwyższych wartościach współczynnika beta, do portfela drugiego, ta sama ilość akcji, ale o najwyższym współczynniku spośród pozostałych, i tak aż do wyczerpania całego zbioru akcji objętych badaniem.

W podokresie szacowania współczynników beta dla utworzonych portfeli, wartości  $\hat{\beta}_p$  estymowane są za pomocą modelu regresji:

$$\hat{R}_{pt} = \hat{\alpha}_p + \hat{\beta}_p R_{mt} + \hat{\xi}_{pt}, \quad (2)$$

gdzie  $\hat{R}_{pt}$  oznacza średni zwrot z akcji w portfelu  $p$  w okresie  $t$ ,  $\hat{\beta}_p$  jest estymatorem rzeczywistego parametru  $\beta$  dla portfela  $p$ ,  $R_{mt}$  oznacza stopę zwrotu z portfela rynkowego w okresie  $t$ , natomiast  $\hat{\xi}_{pt}$  to błąd estymacji, z założenia losowy, dla portfela  $p$  w okresie  $t$ .

Oszacowane współczynniki beta dla zbudowanych portfeli wykorzystywane są następnie w ostatnim etapie badania – podokresie testowania modelu. W etapie tym, do testowania zasadności CAPM, stosowany jest model korelacji krzyżowej (*cross-sectional regression model*), opisany równaniami:

$$\hat{R}_{pt} - \hat{R}_f = \hat{\gamma}_{0t} + \hat{\gamma}_{1t} \hat{\beta}_{p,t-1} + \hat{\xi}_{pt}, \quad (3)$$

$$\hat{R}_{pt} - \hat{R}_f = \hat{\gamma}_{0t} + \hat{\gamma}_{1t} \hat{\beta}_{p,t-1} + \hat{\gamma}_{2t} \hat{\beta}_{p,t-1}^2 + \hat{\gamma}_{3t} \hat{S}_{p,t-1}^{\xi} + \hat{\xi}_{pt}, \quad (4)$$

gdzie  $\hat{\beta}_{p,t-1}$  jest estymatorem rzeczywistego parametru  $\beta$  dla portfela  $p$ , otrzymanym w okresie szacowania współczynników beta dla portfeli  $(t-1)$ ,  $\hat{\beta}_{p,t-1}^2$  to kwadrat wartości  $\hat{\beta}_{p,t-1}$ , natomiast  $\hat{S}_{p,t-1}^{\xi}$  oznacza odchylenie standardowe błędu estymacji, otrzymanego w okresie szacowania współczynników beta portfeli  $(t-1)$ .

Równanie określone wzorem (3) testuje dodatnią zależność między ryzykiem, mierzonym współczynnikiem beta, a stopą zwrotu. Natomiast równanie określone wzorem (4) zawiera dodatkowo zmienne  $\hat{\beta}_{p,t-1}^2$ , służącą do testowania liniowości wynikającej z założeń modelu oraz  $\hat{S}_{p,t-1}^\xi$ , służącą do testowania istnienia innych, niż beta, czynników ryzyka, mogących tłumaczyć zwroty z aktywów.

Wykorzystując statystykę  $t$ -Studenta do wyznaczenia istotności współczynników  $\hat{\gamma}_{0t}$ ,  $\hat{\gamma}_{1t}$ ,  $\hat{\gamma}_{2t}$  oraz  $\hat{\gamma}_{3t}$ , analizowane są następujące hipotezy:

1.  $\hat{\gamma}_{0t}$  jest istotnie różny od zera:  $H_0 : \gamma_{0t} = 0$ ,  $H_1 : \gamma_{0t} \neq 0$ ;
2.  $\hat{\gamma}_{1t}$ , który reprezentuje premię za ryzyko, jest dodatni:  
 $H_0 : \gamma_{1t} = 0$ ,  $H_1 : \gamma_{1t} > 0$ ;
3.  $\hat{\gamma}_{2t}$ , reprezentujący nieliniową relację ryzyko-dochód, jest równy zero:  
 $H_0 : \gamma_{2t} = 0$ ,  $H_1 : \gamma_{2t} \neq 0$ ;
4.  $\hat{\gamma}_{3t}$ , reprezentujący inne niż beta czynniki ryzyka, jest równy zero:  
 $H_0 : \gamma_{3t} = 0$ ,  $H_1 : \gamma_{3t} \neq 0$ .

Statystyka sprawdzająca zadana jest poniższym wzorem:

$$t = \frac{\hat{\gamma}_i}{D(\hat{\gamma}_i)}, \quad \text{o } v - 4 \text{ stopniach swobody} \quad (5)$$

Warunkowe podejście do testowania modelu CAPM zaproponowane zostało przez Pettengil'a, Sundaram'a i Mathur'a [Pettengil i in. 1995]. Wariant ten założenia modelu testuje przy pomocy poniższego równania regresji (PSM)<sup>1</sup>:

$$R_{pt} - R_f = \hat{\phi}_{0t} + \hat{\phi}_{1t} \delta \hat{\beta}_{p,t-1} + \hat{\phi}_{2t} (1 - \delta) \hat{\beta}_{p,t-1} + \hat{\phi}_{3t} \hat{\beta}_{p,t-1}^2 + \hat{\phi}_{4t} \hat{S}_{p,t-1}^\xi + \xi_{pt}, \quad (6)$$

gdzie  $\delta$  oznacza zmienną dychotomiczną, używaną do określenia dodatniej i ujemnej nadwyżki stopy zwrotu z rynku ( $\delta = 1 \Leftrightarrow R_m - R_f > 0$  oraz  $\delta = 0 \Leftrightarrow R_m - R_f < 0$ ).

Równanie (6) określa, że jeżeli zrealizowana stopa zwrotu z rynku jest wyższa od stopy zwrotu wolnej od ryzyka, to istnieje dodatnia zależność pomiędzy współczynnikiem beta a zrealizowanymi zwrotami z portfela. Z drugiej strony, gdy zrealizowany zwrot z rynku jest niższy niż stopa zwrotu wolna od ryzyka, istnieje ujemna zależność pomiędzy współczynnikiem beta a zrealizowanymi zwrotami z portfela. Równanie (6), podobnie jak (4), zawiera test liniowości oraz test

<sup>1</sup> Skrót pochodzi od pierwszych liter nazwisk autorów.

istnienia innych niż beta czynników ryzyka odpowiedzialnych za kształtowanie się stóp zwrotu portfeli na rynku.

Zasadność stosowania warunkowego podejścia do modelu wyceny aktywów kapitałowych testowana jest za pomocą następujących hipotez:

1.  $\hat{\varphi}_{0t}$  jest istotnie różny od zera:  $H_0 : \varphi_{0t} = 0$ ,  $H_1 : \varphi_{0t} \neq 0$ ;
2.  $\hat{\varphi}_{1t}$ , reprezentujący premię za ryzyko, jest dodatni w okresie wzrostów na rynku:  $H_0 : \varphi_{1t} = 0$ ,  $H_1 : \varphi_{1t} > 0$ ;
3.  $\hat{\varphi}_{2t}$ , reprezentujący premię za ryzyko, jest ujemny w okresach spadków na rynku:  $H_0 : \varphi_{2t} = 0$ ,  $H_1 : \varphi_{2t} < 0$ ;
4.  $\hat{\varphi}_{3t}$ , reprezentujący nieliniową zależność ryzyko-dochód, jest równy zero:  $H_0 : \varphi_{3t} = 0$ ,  $H_1 : \varphi_{3t} \neq 0$ ;
5.  $\hat{\varphi}_{4t}$ , reprezentujący inne, niż współczynnik beta, czynniki ryzyka, jest równy zero:  $H_0 : \varphi_{4t} = 0$ ,  $H_1 : \varphi_{4t} \neq 0$ .

Test dodatniej zależności ryzyko-dochód jest ponadto badany za pomocą dwóch dodatkowych warunków - nadwyżki rynkowe nad stopą wolną od ryzyka ( $R_m - R_f$ ) są, średnio, dodatnie oraz zależność ryzyko-dochód jest symetryczna pomiędzy okresami dodatnich i ujemnych nadwyżek rynkowych ( $R_m - R_f$ ).

Do przetestowania pierwszego z powyższych warunków wykorzystywany jest standardowy test  $t$ -Studenta. Natomiast w przypadku warunku drugiego, porównywane są współczynniki  $\hat{\varphi}_1$  oraz  $\hat{\varphi}_2$  i wykorzystywany jest test  $t$ -Studenta dla średnich z dwóch populacji. Hipotezy mają następującą postać:

$$H_0 : \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 = 0, \quad H_1 : \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 \neq 0.$$

Statystyka testująca warunek drugi ma postać:

$$t = \frac{\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2}{\sqrt{D^2(\hat{\varphi}_1) + D^2(\hat{\varphi}_2) + 2\text{cov}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)}}, \quad \text{o } \nu - 2 \text{ stopniach swobody.} \quad (7)$$

Warunek symetryczności relacji ryzyko-dochód (dodatniej zależności w okresach wzrostów na rynku oraz ujemnej w okresach spadków) pozostaje spełniony, w przypadku braku podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

## ANALIZA EMPIRYCZNA NA PRZYKŁADZIE GPW W WARSZAWIE

W badaniu uwzględniono 92 spółki, notowane w okresie od stycznia 2000 do grudnia 2005. Wszelkie braki danych uzupełniono metodą interpolacji liniowej. Portfelem rynkowym jest Warszawski Indeks Giełdowy WIG. Walorem wolnym

od ryzyka są 13 tygodniowe bony skarbowe emitowane przez Skarb Państwa (roczną rentowność zdyskontowano na dzienną stopę zwrotu).

Wykorzystując zaproponowaną metodologię okres badawczy podzielono na trzy podokresy:

Tabela 1. Podział okresu badawczego

Okres I	2000 - 2001	Formowanie portfeli na podstawie współczynników beta poszczególnych akcji,
Okres II	2002 - 2003	Estymacja współczynników beta uformowanych portfeli,
Okres III	2004 - 2005	Testowanie modelu.

W całym okresie badania wykorzystano logarymiczną stopę zwrotu akcji  $i$  – tej spółki definiowaną jako  $R_i = \ln P_t - \ln P_{t-1}$ , gdzie  $P$  oznacza odpowiednio cenę akcji w okresie  $t$  oraz  $t - 1$ .

Wyniki estymacji parametrów równań (3) oraz (4) przedstawiono w tabeli 1. Na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  wartość parametru  $\hat{\gamma}_{0t}$  jest statystycznie nieistotna w przypadku portfeli oznaczonych numerami 8, 10, 11 oraz 12, co oznacza, że dla tych portfeli ponoszenie ryzyka nierynkowego nie wiązało się z żadnym dodatkowym zyskiem dla inwestorów. W przypadku parametru  $\hat{\gamma}_{1t}$  hipotezę zerową odrzucono tylko w przypadku portfela oznaczonego numerem 7 (dla  $\alpha = 0,05$ ). Nie mniej jednak, mimo iż parametr jest statystycznie istotny, jego wartość jest ujemna, co nie jest zgodne z założeniem modelu CAPM. W pozostałych przypadkach brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Podsumowując wyniki estymacji równania regresji (3) dla każdego z badanych portfeli stwierdzono, że w badanym okresie na polskiej giełdzie nie były spełnione założenia modelu dotyczące dodatniej zależności pomiędzy ryzykiem, mierzonym współczynnikiem beta, a oczekiwaną stopą zwrotu portfela. Wyniki testów na podstawie równania (4) przedstawiono w tabeli 3. Zakładając poziom istotności  $\alpha = 0,05$  stwierdzono, że wartość parametru  $\hat{\gamma}_{0t}$  statystycznie istotnie różni się od zera dla portfeli o numerach 1, 2, 5 oraz 6. W pozostałych przypadkach brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej (co jest zgodne z założeniem modelu). Parametr  $\hat{\gamma}_{1t}$  jest statystycznie istotny, na poziomie  $\alpha = 0,05$ , tylko dla portfela o numerze 7 (jednak mimo tego wartość parametru jest ujemna). Wartości parametrów  $\hat{\gamma}_{2t}$  oraz  $\hat{\gamma}_{3t}$  dla wszystkich portfeli są statystycznie nieistotne (dla  $\alpha = 0,05$ ). Tak więc w badanym okresie na polskiej giełdzie występowała liniowa zależność pomiędzy stopami zwrotu a ryzykiem beta oraz nie występowały dodatkowe czynniki wpływające na poziom stóp zwrotu badanych portfeli.

Tabela 2. Wyniki estymacji parametrów równania regresji danego wzorem (3)

$\hat{R}_{pt} - \hat{R}_f = \hat{\gamma}_{0t} + \hat{\gamma}_{1t} \hat{\beta}_{p,t-1} + \hat{\xi}_{pt}$						
	$\hat{\gamma}_{0t}$	$\hat{\gamma}_{1t}$	<i>t - Studenta</i>		<i>p - value</i>	
			$\hat{\gamma}_{0t}$	$\hat{\gamma}_{1t}$	$\hat{\gamma}_{0t}$	$\hat{\gamma}_{1t}$
<b>P 1</b>	0,00543 <b>(0,00056)*</b>	0,00104 <b>(0,00122)</b>	9,78259	0,85247	0,00000	0,40314
<b>P 2</b>	0,00232 <b>(0,00054)</b>	0,00052 <b>(0,00098)</b>	4,30588	0,53019	0,00029	0,60129
<b>P 3</b>	0,00477 <b>(0,00078)</b>	0,00050 <b>(0,00234)</b>	6,13390	0,21313	0,00000	0,83319
<b>P 4</b>	0,00467 <b>(0,00134)</b>	-0,00273 <b>(0,00276)</b>	3,47041	-0,98890	0,00217	0,33346
<b>P 5</b>	0,00365 <b>(0,00091)</b>	0,00459 <b>(0,00252)</b>	4,01044	1,81918	0,00059	0,08252
<b>P 6</b>	0,00465 <b>(0,00057)</b>	-0,00178 <b>(0,00140)</b>	8,18059	-1,27712	0,00000	0,21488
<b>P 7</b>	0,00463 <b>(0,00070)</b>	-0,00413 <b>(0,00166)</b>	6,60550	-2,48655	0,00000	0,02097
<b>P 8</b>	0,00028 <b>(0,00089)</b>	0,00240 <b>(0,00198)</b>	0,32019	1,21567	0,75185	0,23700
<b>P 9</b>	0,00196 <b>(0,00092)</b>	0,00180 <b>(0,00192)</b>	2,13709	0,93969	0,04396	0,35758
<b>P 10</b>	-0,00051 <b>(0,00265)</b>	0,00273 <b>(0,00287)</b>	-0,19274	0,95164	0,84893	0,35162
<b>P 11</b>	0,00289 <b>(0,00226)</b>	-0,00202 <b>(0,00169)</b>	1,27818	-1,19405	0,21451	0,24518
<b>P 12</b>	-0,00160 <b>(0,00210)</b>	-0,00019 <b>(0,00150)</b>	-0,76300	-0,12671	0,45357	0,90032

Źródło: obliczenia własne; \* w nawiasach podano wartość błędu średniego szacunku

Warunkowe podejście do testowania modelu CAPM zakłada istnienie dodatnich i ujemnych nadwyżek rynkowych, odpowiednio w okresie wzrostów na rynku, jak i w okresie spadków (równanie (6)). Wyniki estymacji wspomnianego równania regresji przedstawiono w tabeli 4. Zakładając poziom istotności  $\alpha = 0,05$  wartości prawie wszystkich parametrów są statystycznie nieistotne. Odstępstwa występują tylko w przypadku parametru  $\hat{\phi}_{0t}$  dla portfeli o numerach 1, 2, 5, 6 oraz 7. Parametry  $\hat{\phi}_{1t}$  oraz  $\hat{\phi}_{2t}$  spełniały w pełni założenia testu tylko w przypadku portfeli o numerach 3 oraz 8. Nie mniej jednak ich wartości były statystycznie nieistotne. Podobne wnioski można wysnuć odnośnie parametrów  $\hat{\phi}_{3t}$  oraz  $\hat{\phi}_{4t}$ . Tak więc w przypadku analizowanych portfeli nie spełnione było założenie istnienia dodatniej i ujemnej zależności ryzyko - dochód odpowiednio

w okresie dodatnich i ujemnych nadwyżek rynkowych.

Następnym etapem testowania modelu w warunkowym podejściu jest test średnich nadwyżek rynkowych oraz test symetryczności tych nadwyżek. Wyniki pierwszego z nich przedstawiono w tabeli 5. Na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  odrzucono hipotezę zerową w przypadku jedenastu portfeli. Tylko portfel o numerze 11 nie spełniał tego założenia. Podsumowując, założenie o występowaniu średnich dodatnich nadwyżek rynkowych jest spełnione w przypadku większości z analizowanych portfeli (przy obu przyjętych poziomach istotności).

Kolejnym testem jest wspomniany test badający, czy relacja pomiędzy ryzykiem i stopą zwrotu w okresach dodatnich i ujemnych nadwyżek jest symetryczna. Hipoteza zerowa głosi symetryczność nadwyżek. Wyniki testu przedstawiono w tabeli 6. Na podstawie wyników testu, brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Ostatecznie zatem można stwierdzić, że w badanym okresie zachowana była symetryczność związku ryzyka i stopy zwrotu na polskiej giełdzie dla wszystkich badanych portfeli.

## PODSUMOWANIE

Na podstawie danych pochodzących z Giełdy Papierów Wartościowych S.A. w Warszawie dokonano testu zasadności stosowania modelu wyceny aktywów kapitałowych CAPM. Wyniki tych testów w obu podejściach przemawiają za odrzuceniem modelu, jako opisującego zachowanie się stóp zwrotu na rynku. Stosowalność CAPM potwierdzają tylko testy liniowości oraz istnienia dodatkowych czynników mogących mieć wpływ na poziom zrealizowanych stóp zwrotu. Podobne wyniki dały testy symetryczności relacji ryzyko – dochód w okresach dodatnich i ujemnych nadwyżek rynkowych oraz test istnienia średnich, dodatnich nadwyżek rynkowych.

Wyniki testów należy interpretować dość ostrożnie, gdyż polski rynek kapitałowy jest rynkiem młodym, w początkowej fazie rozwoju (porównując z innymi wielkimi zachodnimi rynkami finansowymi), a to może mieć duży wpływ na wyniki testów modelu. Ponadto na wyniki testu rzutuje również zbyt mała liczba obserwacji, gdyż w badaniu uwzględniono tylko te spółki, które w całym analizowanym okresie notowane były na polskiej giełdzie.



Tabela 3. Wyniki estymacji parametrów równania regresji danego wzorem (4)

$$\hat{R}_{jt} - \hat{R}_{jt} = \hat{\gamma}_{0t} + \hat{\gamma}_{1t} \hat{\beta}_{p,t-1} + \hat{\gamma}_{2t} \hat{\beta}_{p,t-1}^2 + \hat{\gamma}_{3t} \hat{S}_{p,t-1}^4 + \hat{\varepsilon}_{jt}$$

	$\hat{\gamma}_{0t}$	$\hat{\gamma}_{1t}$	$\hat{\gamma}_{2t}$	$\hat{\gamma}_{3t}$	<i>t - Studenta</i>				<i>p - value</i>			
					$\hat{\gamma}_{0t}$	$\hat{\gamma}_{1t}$	$\hat{\gamma}_{2t}$	$\hat{\gamma}_{3t}$	$\hat{\gamma}_{0t}$	$\hat{\gamma}_{1t}$	$\hat{\gamma}_{2t}$	$\hat{\gamma}_{3t}$
					P 1	0,00786 <b>(0,0018)*</b>	0,00114 <b>(0,0019)</b>	0,00026 <b>(0,0027)</b>	-0,2679 <b>(0,1877)</b>	4,40498	0,61228	0,09819
P 2	0,00603 <b>(0,0026)</b>	-0,0014 <b>(0,0017)</b>	0,00202 <b>(0,0015)</b>	-0,3033 <b>(0,2072)</b>	2,3011	-0,8195	1,38376	-1,4637	0,03228	0,42218	0,18168	0,15881
P 3	0,00148 <b>(0,003)</b>	0,00193 <b>(0,0041)</b>	-0,0014 <b>(0,0058)</b>	0,35706 <b>(0,3151)</b>	0,49243	0,46782	-0,2395	1,13336	0,62778	0,64497	0,81318	0,27047
P 4	0,00496 <b>(0,0035)</b>	-0,0102 <b>(0,0119)</b>	0,00742 <b>(0,0119)</b>	0,12120 <b>(0,2357)</b>	1,39899	-0,8553	0,62342	0,51416	0,17713	0,40252	0,54005	0,61278
P 5	0,00622 <b>(0,0021)</b>	0,00831 <b>(0,0064)</b>	-0,0057 <b>(0,0097)</b>	-0,4068 <b>(0,2627)</b>	2,91269	1,30534	-0,5902	-1,5483	0,00861	0,20660	0,56169	0,13722
P 6	0,00377 <b>(0,0018)</b>	-0,0015 <b>(0,0036)</b>	-0,0006 <b>(0,0049)</b>	0,10065 <b>(0,1847)</b>	2,15694	-0,4019	-0,1135	0,54501	0,04336	0,69201	0,91080	0,59177
P 7	0,00431 <b>(0,0021)</b>	-0,0100 <b>(0,0040)</b>	0,00857 <b>(0,0059)</b>	0,14069 <b>(0,3414)</b>	2,04340	-2,4853	1,46386	0,41204	0,05441	0,02191	0,15877	0,68469
P 8	0,00153 <b>(0,0019)</b>	-0,0036 <b>(0,0045)</b>	0,0091 <b>(0,0062)</b>	-0,0987 <b>(0,2002)</b>	0,80595	-0,7975	1,47697	-0,4933	0,42975	0,43450	0,15526	0,62721
P 9	0,00242 <b>(0,0023)</b>	0,00346 <b>(0,0063)</b>	-0,0015 <b>(0,0063)</b>	-0,0729 <b>(0,1807)</b>	1,13653	0,54938	-0,2369	-0,4037	0,26917	0,58883	0,81507	0,69070
P 10	-0,01216 <b>(0,0098)</b>	0,02942 <b>(0,0223)</b>	-0,0150 <b>(0,0124)</b>	0,04749 <b>(0,2529)</b>	-1,2416	1,31740	-1,2111	0,18772	0,22875	0,20260	0,23998	0,85299
P 11	0,01180 <b>(0,0167)</b>	-0,0152 <b>(0,0239)</b>	0,00464 <b>(0,0087)</b>	0,03767 <b>(0,2981)</b>	0,70622	-0,6392	0,53509	0,12636	0,48819	0,52996	0,59849	0,90071

Źródło: obliczenia własne. \* w nawiasach podano wartość błędu średniego szacunku

Tabela 4. Wyniki estymacji równania regresji danego wzorem (6)

$$R_{jt} - R_{ft} = \hat{\varphi}_{0t} + \hat{\varphi}_{1t} \hat{\beta}_{p,t-1} + \hat{\varphi}_{2t} (1 - \delta) \hat{\beta}_{p,t-1} + \hat{\varphi}_{3t} \hat{\beta}_{p,t-1}^2 + \hat{\varphi}_{4t} \hat{\beta}_{p,t-1}^4 + \varepsilon_{jt}$$

	$\hat{\varphi}_{0t}$	$\hat{\varphi}_{1t}$	$\hat{\varphi}_{2t}$	$\hat{\varphi}_{3t}$	$\hat{\varphi}_{4t}$	<i>t - Studenta</i>					<i>p - value</i>				
						$\hat{\varphi}_{0t}$	$\hat{\varphi}_{1t}$	$\hat{\varphi}_{2t}$	$\hat{\varphi}_{3t}$	$\hat{\varphi}_{4t}$	$\hat{\varphi}_{0t}$	$\hat{\varphi}_{1t}$	$\hat{\varphi}_{2t}$	$\hat{\varphi}_{3t}$	$\hat{\varphi}_{4t}$
						P 1	0,0077 <b>(0,0018)</b>	0,0004 <b>(0,0021)</b>	0,00234 <b>(0,00243)</b>	0,00083 <b>(0,00280)</b>	-0,2519 <b>(0,19072)</b>	4,27105	0,16724	0,96273	0,29524
P 2	0,0059 <b>(0,0027)</b>	-0,0016 <b>(0,0018)</b>	-0,0008 <b>(0,0025)</b>	0,00208 <b>(0,00150)</b>	-0,2950 <b>(0,21321)</b>	2,16270	-0,8677	-0,3065	1,38429	-1,3838	0,04352	0,39636	0,76254	0,18231	0,18247
P 3	0,0029 <b>(0,0036)</b>	0,0022 <b>(0,0042)</b>	-0,0025 <b>(0,0072)</b>	-0,0016 <b>(0,0059)</b>	0,21803 <b>(0,36758)</b>	0,82369	0,52451	-0,3469	-0,2648	0,59315	0,42033	0,60599	0,73248	0,79400	0,56008
P 4	0,0056 <b>(0,0034)</b>	-0,0106 <b>(0,0114)</b>	-0,0164 <b>(0,0119)</b>	0,0079 <b>(0,0113)</b>	0,11405 <b>(0,22417)</b>	1,66135	-0,9327	-1,3772	0,70099	0,50874	0,11306	0,36269	0,18445	0,49181	0,61679
P 5	0,0064 <b>(0,0024)</b>	0,0083 <b>(0,0065)</b>	0,0076 <b>(0,0075)</b>	-0,0052 <b>(0,0103)</b>	-0,4283 <b>(0,29006)</b>	2,72107	1,26515	1,01521	-0,5104	-1,4766	0,01356	0,22111	0,32276	0,61567	0,15617
P 6	0,0046 <b>(0,0018)</b>	-0,0003 <b>(0,0036)</b>	-0,0042 <b>(0,0039)</b>	-0,0008 <b>(0,0047)</b>	0,01602 <b>(0,18593)</b>	2,60292	-0,0878	-1,0664	-0,1723	0,08616	0,01748	0,93092	0,29959	0,86499	0,93224
P 7	0,0051 <b>(0,0019)</b>	-0,0087 <b>(0,0037)</b>	-0,0122 <b>(0,0038)</b>	0,0093 <b>(0,0054)</b>	-0,0057 <b>(0,31804)</b>	2,62839	-2,3494	-3,2200	1,73818	-0,0188	0,01655	0,02977	0,00451	0,09836	0,98523
P 8	0,001 <b>(0,0017)</b>	0,0001 <b>(0,0043)</b>	-0,0053 <b>(0,0041)</b>	0,0047 <b>(0,0059)</b>	-0,0259 <b>(0,18251)</b>	0,55824	0,02601	-1,2932	0,79762	-0,1418	0,58320	0,97952	0,21145	0,43495	0,88875
P 9	0,0021 <b>(0,0022)</b>	0,0050 <b>(0,0067)</b>	0,0027 <b>(0,0064)</b>	-0,0031 <b>(0,0067)</b>	-0,0455 <b>(0,18578)</b>	0,96142	0,75345	0,41386	-0,4555	-0,2447	0,34842	0,46042	0,68361	0,65394	0,80933
P 10	-0,0038 <b>(0,00940)</b>	0,0087 <b>(0,0217)</b>	0,0049 <b>(0,0223)</b>	-0,0042 <b>(0,0119)</b>	0,33042 <b>(0,25403)</b>	-0,4031	0,39863	0,22064	-0,3506	1,30072	0,69136	0,69461	0,82773	0,72973	0,20891
P 11	0,0033 <b>(0,0136)</b>	-0,0025 <b>(0,0194)</b>	-0,0044 <b>(0,01928)</b>	0,0004 <b>(0,0070)</b>	0,0526 <b>(0,2380)</b>	0,24517	-0,1305	-0,2279	0,05248	0,22106	0,80896	0,89754	0,82217	0,95869	0,82740
P 12	-0,0061 <b>(0,0064)</b>	0,0052 <b>(0,0070)</b>	0,00238 <b>(0,00679)</b>	-0,0018 <b>(0,0022)</b>	0,1323 <b>(0,1645)</b>	-0,9629	0,7357	0,48021	-0,7969	0,80447	0,34765	0,47091	0,73003	0,43533	0,43108

Źródło: obliczenia własne. \* w nawiasach podano wartość błędnie szacunku

Tabela 5. Wyniki testu średnich nadwyżek rynkowych

Parametr	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6
Średnia premia za ryzyko	0,0057	0,0026	0,0049	0,0035	0,0050	0,0042
Odchylenie standardowe	0,0021	0,0023	0,0029	0,0030	0,0027	0,0021
Liczba obserwacji	24	24	24	24	24	24
$t$ – Studenta	13,1439	5,2205	8,0531	5,6919	9,0863	9,8566
$p$ – value	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Parametr	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12
Średnia premia za ryzyko	0,0031	0,0012	0,0027	0,0019	0,0002	-0,0019
Odchylenie standardowe	0,0019	0,0022	0,0025	0,0027	0,0019	0,0035
Liczba obserwacji	24	24	24	24	24	24
$t$ – Studenta	8,2411	2,7004	5,2709	3,6152	0,5899	-2,6172
$p$ – value	0,0000	0,0064	0,0000	0,0007	0,2805	0,0077

Źródło: obliczenia własne

Tabela 6. Test symetryczności nadwyżek rynkowych

Parametr	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6
$\hat{\phi}_1$	0,00036	-0,00157	0,00219	-0,01060	0,00826	-0,00031
$\hat{\phi}_2$	0,00234	-0,00077	-0,00249	-0,01636	0,00758	-0,00415
$D^2(\hat{\phi}_1)$	0,11235	0,22542	0,07533	0,08463	0,04932	0,08826
$D^2(\hat{\phi}_2)$	0,04203	0,05344	0,01660	0,03527	0,03590	0,03997
$\text{cov}(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$	-0,00991	-0,01534	-0,00917	-0,03284	-0,01918	-0,01709
$t$ – Studenta	0,00735	-0,00470	-0,00108	-0,11580	0,07317	-0,01456
$p$ – value	0,99420	0,99629	0,99915	0,90886	0,94233	0,98851
Parametr	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12
$\hat{\phi}_1$	-0,00872	0,00011	0,00502	0,00865	-0,00253	0,00517
$\hat{\phi}_2$	-0,01224	-0,00533	0,00266	0,00493	-0,00439	0,00238
$D^2(\hat{\phi}_1)$	0,06006	0,07496	0,09925	0,21090	0,41221	0,57112
$D^2(\hat{\phi}_2)$	0,04733	0,03705	0,03820	0,15442	0,40347	0,41194
$\text{cov}(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$	-0,03043	-0,02830	-0,03045	-0,15712	-0,36461	-0,35499
$t$ – Studenta	-0,09715	-0,02216	0,02778	0,06007	-0,02354	0,01444
$p$ – value	0,92349	0,98252	0,97809	0,95264	0,98143	0,98861

Źródło: obliczenia własne

## LITERATURA

- Bryka–Kita K., Rozkrut D. Testowanie modelu CAMP na polskim rynku kapitałowym, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Nr 389, Finanse. Rynki Finansowe. Ubezpieczenia. Nr 2, 2004.
- Fama E. F., MacBeth J. D. Risk, return, and equilibrium: empirical tests, “Journal of Political Economy”, Vol. 81, 1973, p. 607-636.
- Gołabowska B. Wykorzystanie współczynnika beta w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych, praca doktorska, Akademia Ekonomiczna im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 2002.
- Pettengil G. N., Sundaram S., Mathur I. The conditional relation between beta and returns, “Journal of Financial and Quantitative Analysis”, Vol. 30, No 1, March 1995, p. 101-116.
- Sharpe W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk, “The Journal of Finance”, Vol. 21, No 3, September 1964, p. 425-442.

**The statistical verification of the CAPM in the polish capital market**

**Summary:** This paper presents some tests of validity of CAPM using data from the Warsaw Stock Exchange (WSE). Two approaches are presented: *the traditional approach* (proposed by Fama and MacBeth) and *conditional approach* (proposed by Pettengill, Sundaram and Mathur). The conditional approach contains additionally two tests: first one, that the excess market returns are, on average, positive and second one – that the risk – return relationship is symmetrical between periods of positive and negative excess market returns. To test the assumptions of CAPM the daily log-returns of 92 stocks listed in the WSE for the period January 2000 to December 2005 are used in this study.

**Key words:** CAPM, beta coefficient, the Ordinary Least Square (OLS), the cross-sectional regression model

Krzysztof Wiśniński  
Katedra Statystyki Matematycznej, AR w Szczecinie  
e-mail: kwisinski@e-ar.pl

## ZASTOSOWANIE MODELU MOTAD DO TWORZENIA PORTFELA AKCJI

**Streszczenie:** W artykule omówiono metodologię modelu MOTAD pod kątem zastosowania tej metody do tworzenia portfela akcji. Praktyczne wykorzystanie zaprezentowanej metody zilustrowano przykładem empirycznym.

**Słowa kluczowe:** podejmowanie decyzji, model MOTAD, portfel akcji.

### KLASYFIKACJA WARUNKÓW PODEJMOWANIA DECYZJI

Przy podejmowaniu decyzji, w szczególności decyzji, które dotyczą inwestowania w akcje, ważnym problemem jest określenie warunków, w jakich są one podejmowane. Interesującą taksonomię decyzji zaproponował Kofler (zob. Kofler 1993, str. 6). Klasyfikuje on decyzje na:

- decyzje podejmowane w warunkach pewności; wiemy jaka będzie przyszłość - jest to przypadek deterministyczny;
- decyzje podejmowane w warunkach ryzyka; znamy rozkład prawdopodobieństwa przyszłych możliwych stanów;
- decyzje podejmowane w warunkach niewiedzy; nie mamy żadnych informacji o przyszłości;
- decyzje podejmowane w warunkach niepełnej informacji; przypadek pośredni pomiędzy decyzjami podejmowanymi w warunkach ryzyka i decyzjami podejmowanymi w warunkach niewiedzy.

Przy przyjętej klasyfikacji inwestowanie na giełdzie możemy zaliczyć do podejmowania decyzji w warunkach ryzyka lub do podejmowania decyzji w warunkach niepełnej informacji. Pierwsze podejście (warunki ryzyka) ma tę zaletę, że stosując je można często określić prawdopodobieństwo osiągnięcia celów inwestycyjnych. Jednak jego wadą jest przyjęcie, często trudnych do zweryfikowania, założeń związanych z rozkładami cen akcji. Z kolei w podejściu drugim (warunki niepełnej informacji) kosztem utraty ilościowych ocen, dotyczących prawdopodobieństwa realizacji celu inwestycji, uzyskuje się lepszą zgodność założeń modelowanego zjawiska z rzeczywistością. Przedstawiona w tym artykule metoda wspomagania decyzji inwestycyjnych traktuje inwestowanie jako decyzję podejmowaną w warunkach niepełnej informacji.

## APLIKACJA MODELU MOTAD DO BUDOWY PORTFELA AKCJI

Podstawowymi „parametrami” każdej decyzji inwestycyjnej (portfela akcji) są spodziewany zysk (stopa zwrotu) i ryzyko jego osiągnięcia. Celem matematycznych metod wspomagających inwestowanie jest pogodzenie tych dwóch sprzecznych ze sobą celów i dostarczenie inwestorowi wartościowych wariantów strategii inwestycyjnych. Jednym z możliwych podejść do optymalizacji portfela akcji jest wykorzystanie metod programowania matematycznego.

Poniżej zostanie omówiony tzw. model MOTAD (Minimalization of the Total Absolute Deviation). Model ten został opracowany przez Hazella (zob. Hazell 1971) i został przez niego wykorzystany do optymalizacji produkcji roślinnej

w gospodarstwach rolnych. Metodologia metody MOTAD zostanie w niniejszym artykule omówiona przy założeniu wykorzystania jej do budowy portfela akcji.

Rozważmy pewien portfel  $n$  akcji, który spełnia pewne liniowe ograniczenia narzucone przez decydenta:

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą współczynników techniczno - ekonomicznych,  $\mathbf{x}$  - wektorem opisującym skład portfela (wektorem zmiennych decyzyjnych). Załóżmy dalej, że decydent posiada informacje o cenach każdej akcji w  $k$  momentach w przeszłości:

$$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1k},$$

$$y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2k},$$

$$\vdots$$

$$y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nk},$$

(ceny akcji z przeszłości dobierane są w zależności od czasowego horyzontu inwestycyjnego, np. w przypadku inwestowania krótkoterminowego mogą to być ceny na zamknięciu sesji giełdowych). Niech  $\bar{y}_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , oznacza średnią arytmetyczną cen  $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik}$ . Oznaczmy przez  $u_{is}$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ,  $s=1,2,\dots,k$ , odchylenie ceny  $i$ -tej akcji w momencie  $s$  od średniej arytmetycznej  $\bar{y}_i$  ( $u_{is} = y_{is} - \bar{y}_i$ ). Wprowadźmy teraz nieujemne zmienne odchylenia dodatnich  $z_i^+$  oraz odchylenia ujemnych  $z_i^-$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , które będą spełniać warunek:

$$\sum_{s=1}^n u_{is} x_s + z_i^+ - z_i^- = 0. \quad (3)$$

W modelu MOTAD jako miarę ryzyka portfela akcji przyjmuje się wartość następującej sumy:  $\sum_{i=1}^k z_i^+ + \sum_{i=1}^k z_i^-$ . Zatem funkcja celu modelu będzie miała postać:

$$\sum_{i=1}^k z_i^+ + \sum_{i=1}^k z_i^- \rightarrow \min. \quad (4)$$

Ponieważ suma odchyleń dodatnich jest równa sumie odchyleń ujemnych:

$$\sum_{i=1}^k z_i^+ = \sum_{i=1}^k z_i^-,$$

zamiast ograniczenia (3) i funkcji celu (4) możemy wprowadzić ograniczenia

$$\sum_{s=1}^n y_{is} x_s + z_i^- \geq 0 \quad (5)$$

i funkcję celu

$$\sum_{i=1}^k z_i^- \rightarrow \min. \quad (6)$$

W modelu MOTAD miarą ryzyka jest więc suma ujemnych odchyleń cen akcji z przeszłości od średnich arytmetycznych tych przeszłych cen.

Tak jak wspomniano wcześniej, obok minimalizacji ryzyka, drugim celem portfela akcji jest maksymalizacja oczekiwanego zysku. Aby zapewnić satysfakcjonującą stopę zwrotu portfela, do modelu wprowadzimy ograniczenie wymuszające odpowiedni poziom realizacji spodziewanego zysku. Ograniczenie to będzie miało postać:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n \geq \lambda. \quad (7)$$

Współczynniki  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , wyznaczone na podstawie historycznych cen akcji, wyrażają oczekiwane stopy zwrotu z poszczególnych akcji w zakładanym czasowym horyzoncie inwestycyjnym. Wartość parametru  $\lambda$  zostaje określona przez decydenta i wyraża akceptowaną przez niego stopę zwrotu portfela. Model decyzyjny określony przez ograniczenia (1), (2), (5) i (7) z funkcją celu (6) jest modelem, który minimalizuje ryzyko portfela akcji oraz maksymalizuje, poprzez osiągnięcie satysfakcjonującego poziomu realizacji, stopę zwrotu portfela. Zaletą metody MOTAD jest jej prostota metodologiczna oraz fakt, że rozwiązanie modelu otrzymuje się za pomocą zwykłego programowania liniowego. W alternatywnych modelach, które ograniczają ryzyko poprzez minimalizację wariancji (np. model VE - zob. np. Sengupta 1972, str. 244, Krawiec 1991, str. 46) rozwiązanie otrzymuje się przy wykorzystaniu procedur programowania kwadratowego.

## PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA MODELU MOTAD DO BUDOWY PORTFELA AKCJI

Naszym celem będzie zbudowanie portfela akcji, w skład którego będą mogły wchodzić cztery spółki: *A*, *B*, *C*, *D*. Portfel ten utworzymy kupując akcje na zamknięciu sesji piątkowej pewnego tygodnia (w tabeli 1 - sesja V). Przyjmujemy, że planowany okres inwestycji jest równy jednemu tygodniowi (pięć sesji giełdowych) oraz, że oczekiwana stopa zwrotu z każdej akcji będzie w tym okresie równa stopie, która się zrealizowała w tygodniu poprzedzającym inwestycję.

Tabela 1. Ceny akcji (w zł) na zamknięciu pięciu sesji giełdowych oraz stopy zwrotu tych akcji w tym okresie.

	Spółka A	Spółka B	Spółka C	Spółka D
Sesja I (Pon)	8,2	20,3	5,2	13,5
Sesja II (Wt)	8,6	19,5	6,0	14,1
Sesja III (Śr)	9,4	19,0	7,1	13,0
Sesja IV (Czw)	9,3	19,5	6,9	12,5
Sesja V (Pt)	9,5	19,7	7,3	14,4
Stopa zwrotu	0,16	-0,03	0,40	0,07
Średnia cena akcji	9,0	19,6	6,5	13,5

Źródło: opracowanie własne

Tabela 1 zawiera ceny akcji na zamknięciach pięciu kolejnych sesji, które poprzedzały planowaną inwestycję, średnie arytmetyczne tych cen oraz stopy zwrotu osiągnięte w czasie tego tygodnia.

Z kolei tabela 2 przedstawia wszystkie ograniczenia modelu oraz zawiera funkcję celu. Ograniczenie 1 określa kwotę przeznaczoną na inwestycję. Ograniczenia 2-7, które dotyczą inwestycji w poszczególne spółki oraz relacji między tymi inwestycjami, wynikają z preferencji decydenta. Z kolei ograniczenia 9-13, zgodnie z metodologią modelu MOTAD, są wprowadzone po to, aby za ich pomocą móc wyrazić ryzyko portfela. Lewa strona ograniczenia 8 opisuje spodziewany zysk z inwestycji. Ograniczenie to jest „sparametryzowane”; inwestor może przyjmować za parametr  $\lambda$  różne wartości.



Tabela 2. Model MOTAD optymalizujący portfel akcji.

Nr ograniczenia	Zmienne decyzyjne									Relacje	Wektor ograniczeń	Jednostki
	$x_1$ (A)	$x_2$ (B)	$x_3$ (C)	$x_4$ (D)	$z_1^-$	$z_2^-$	$z_3^-$	$z_4^-$	$z_5^-$			
1	1	1	1	1						=	10 000	zł
2	1	1	-0,5	-0,5						$\geq$	0	zł
3	1	1	-3	-3						$\leq$	0	zł
4			1							$\geq$	500	zł
5			1	-2						$\leq$	0	zł
6	1	-1,2								$\geq$	0	zł
7	1	-2,2								$\leq$	0	zł
8	0,16	-0,03	0,40	0,07						$\geq$	$\lambda$	zł
9	-0,8	0,7	-1,3		1					$\geq$	0	zł
10	-0,4	-0,1	-0,5	0,6		1				$\geq$	0	zł
11	0,4	-0,6	0,6	-0,5			1			$\geq$	0	zł
12	0,3	-0,1	0,4	-1,0				1		$\geq$	0	zł
13	0,5	0,1	0,8	0,9					1	$\geq$	0	zł
Funkcja celu					1	1	1	1	1	$\rightarrow$ min		zł

Źródło: opracowanie własne

Tabela 3. Rozwiązanie modelu MOTAD optymalizującego portfel akcji dla różnych wartości oczekiwanych stóp zwrotu portfela.

Oczekiwany zysk $\lambda$ (zł)	$x_1$ (zł)	$x_2$ (zł)	$x_3$ (zł)	$x_4$ (zł)	Funkcja celu (ryzyko) (zł)
878	4091	3409	1153	1347	4521
1500	3268	2723	2358	1651	5541
2000	2218	1849	3895	2038	7340
2100	2008	1674	4202	2116	7700
2200	1930	1404	4444	2222	8146
2268	2288	1046	4444	2222	8785

Źródło: obliczenia własne

Tabela 3 zawiera rozwiązanie modelu portfela akcji z tabeli 2 dla przykładowych wartości parametru  $\lambda$  (model jest niesprzeczny jeśli parametr  $\lambda$  przyjmuje wartości z przedziału (877,12 zł – 2268,75 zł). Widać, że wymuszenie większej wartości oczekiwanej zysku daje portfele o większym ryzyku. Inwestor w zależności od swoich preferencji może wybrać rozwiązanie, które go satysfakcjonuje.

## LITERATURA

Hazell P.B.R. (1971) A linear alternative to quadratic and semivariance programming for farm planning under uncertainty, *Amer. J. Agr. Econ.* (53), str. 53-62.

Kofler E. (1993) *Podjmowanie decyzji przy niepełnej informacji*, Real Publisher, Warszawa.

Krawiec B. (1991) *Metody optymalizacji w rolnictwie*, PWN, Warszawa.

Sengupta J.K. (1972) *Stochastic Programming*, Nort Holland, Amsterdam.

**The application of motad model in indicating the optimum portfolio structure**

**Summary:** The article describes the methodology of the MOTAD model. The example of the optimising portfolio structure of an insurance company has been used to show how the above-mentioned method works.

**Key words:** decision making, MOTAD model, portfolio.

## ZASTOSOWANIE TESTU PERRONA DO BADANIA PUNKTÓW ZWROTNYCH INDEKSÓW GIEŁDOWYCH: WIG, WIG20, MIDWIG I TECHWIG

**Streszczenie:** Celem pracy jest identyfikacja zmian w strukturze trendu dla indeksów WIG, WIG20, MIDWIG oraz TechWIG w okresie od 1.07.2003 – 31.03.2006. Pierwszy etap badań polega na określeniu, za pomocą testu Perrona, momentu wystąpienia punktów zwrotnych. Drugi to ustalenie przyczyn pojawienia się istotnych zmian w analizowanym szeregu czasowym.

**Słowa kluczowe:** szereg czasowy, stacjonarność, test Perrona, indeksy giełdowe

### WSTĘP

Na Giełdzie Papierów Wartościowych (GPW) w Warszawie notowane są akcje ponad 200 spółek. Nie jest zatem możliwa jednoczesna obserwacja ruchów cen wszystkich walorów i ocena rynku. Służą temu odpowiednio skonstruowane indeksy giełdowe, których wartości są bezpośrednio zależne od cen wybranych instrumentów notowanych na giełdzie. Spośród 13 indeksów publikowanych przez GPW w Warszawie w badaniach wykorzystano<sup>1</sup>:

1. WIG20 - indeks cenowy, skonstruowany dla akcji 20 „złotych” spółek,
2. MIDWIG - indeks cenowy 40 spółek o średniej wielkości,
3. WIG - indeks dochodowy zbudowany na podstawie notowań 134 spółek,
4. TechWIG - indeks, w skład którego wchodzi 37 spółek z sektora teleinformatycznego.

Indeksy giełdowe należą do jednych z najczęściej analizowanych finansowych szeregów czasowych [Jajuga 2000]. Wykorzystuje się do tego różne narzędzia badawcze w tym modele ekonometryczne, których zastosowanie wymaga sprawdzenia stacjonarności modelowanego procesu.

W wielu szeregach finansowych można wyróżnić trend, który w różnych okresach może się zachowywać inaczej. W równaniu trendu liniowego rozważa się możliwość zmiany wyrazu wolnego, współczynnika kierunkowego lub jednoczesną zmianę obu parametrów. W przypadku wystąpienia jednej z wymienionych zmian, stosuje się testy: Dickeya-Fullera, rozszerzony Dickeya-Fullera (ADF)

---

<sup>1</sup> Skład indeksów jest uaktualniany co kwartał w trzeci piątek kolejnych miesięcy, przy czym rewizja roczna ma miejsce w marcu. Dane dotyczące liczby spółek w poszczególnych indeksach pochodzą z maja 2006r.

i Phillipsa-Perrona [por. Enders 1995, Piłatowska 2003, Syczewska 1999], które pozwalają stwierdzić czy szereg jest stacjonarny czy nie. [Perron 1989] zaproponował modyfikację testu ADF uwzględniającą możliwość wystąpienia zmiany w strukturze. Test ten pozwala również na określenie momentu pojawienia się punktu zwrotnego.

W przypadku szeregów finansowych, zmiany w strukturze mogą być spowodowane wieloma czynnikami, do których należą: decyzje i wydarzenia polityczne (np. wybory, tworzenie nowego rządu) lub ekonomiczne (np. informacja o stanie gospodarki lub jej segmentów), szoki na innych rynkach (np. paliwowym, walutowym lub za granicą), a także nieoczekiwane zdarzenia (np. ataki terrorystyczne lub klęski żywiołowe).

W pracy zastosowano test Perrona w celu zbadania występowania istotnych zmian w strukturze trendu wybranych indeksów GPW w Warszawie. Podjęto również próbę identyfikacji wydarzeń, które je spowodowały.

## TEST PERRONA

Badanie zmian w strukturze trendu liniowego może dotyczyć zmian stałej, współczynnika kierunkowego lub obu parametrów równocześnie, co zapisuje się w postaci odpowiednio sformułowanego modelu. Jeśli zakłada się zmianę wyłącznie wyrazu wolnego w funkcji trendu, to analizowany będzie model postaci:

$$y_t = \alpha_0 + \beta t + \theta D(U)_t + \delta D(TB)_t + \alpha_1 y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1a)$$

gdzie:  $y_t$  - obserwacje badanego szeregu w okresie  $t$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\delta$ ,  $\alpha_1$ ,  $c_i$  - parametry strukturalne modelu,  $t$  - zmienna wyrażająca trend,  $t = 1, 2, \dots, T$ ,

$$D(TB)_t = \begin{cases} 1, & \text{dla } t = T_B + 1 \\ 0, & \text{dla } t \neq T_B + 1 \end{cases}, \quad D(U)_t = \begin{cases} 1, & \text{dla } t > T_B \\ 0, & \text{dla } t \leq T_B \end{cases}$$

$T_B$  - moment wystąpienia zmiany w strukturze.

W tym przypadku testowaniu podlega zestaw hipotez:

$$\begin{aligned} H_0 : & \theta = 0; \beta = 0; \delta \neq 0; \alpha_1 = 1 \\ H_1 : & \theta \neq 0; \beta \neq 0; \delta = 0; \alpha_1 < 1 \end{aligned} \quad (1b)$$

Hipoteza zerowa zakłada istnienie pierwiastka jednostkowego ( $\alpha_1 = 1$ ) oraz wystąpienie pojedynczej zmiany tzw. szoku. Hipoteza alternatywna zakłada, że nie występuje pierwiastek jednostkowy (proces jest stacjonarny -  $\alpha_1 < 1$ ), oraz zmiana nie ma charakteru szokowego, ale dotyczy zmiany stałej w funkcji trendu.

Kiedy istnieje przypuszczenie, iż uległ zmianie współczynnik kierunkowy w funkcji trendu, to testowaniu podlega model postaci:

$$y_t = \alpha_0 + \beta t + \theta D(U)_t + \gamma D(T^*)_t + \alpha_1 y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2a)$$

$$\text{gdzie: } D(T^*)_t = \begin{cases} t - T_B, & \text{dla } t > T_B \\ 0, & \text{dla } t \leq T_B \end{cases}$$

Dla modelu (2a) hipotezy formułuje się jako:

$$\begin{aligned} H_0 : \theta &\neq 0; \beta = 0; \gamma = 0; \alpha_1 = 1 \\ H_1 : \theta &= 0; \beta \neq 0; \gamma \neq 0; \alpha_1 < 1 \end{aligned} \quad (2b)$$

Hipoteza zerowa zakłada istnienie pierwiastka jednostkowego wobec  $H_1$ , iż proces nie posiada pierwiastka jednostkowego. Ponadto w hipotezie alternatywnej zakłada się, że zmiana współczynnika kierunkowego jest istotna.

W celu sprawdzenia, czy w funkcji trendu zmianie ulegają jednocześnie współczynnik nachylenia oraz wyraz wolny, należy oszacować równanie postaci:

$$y_t = \alpha_0 + \beta t + \theta D(U)_t + \gamma D(T)_t + \delta D(TB)_t + \alpha_1 y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3a)$$

$$\text{gdzie: } D(T)_t = \begin{cases} t, & \text{dla } t > T_B \\ 0, & \text{dla } t \leq T_B \end{cases}$$

Weryfikacji podlega zespół hipotez, łączących hipotezy (1b) i (2b), czyli:

$$\begin{aligned} H_0 : \theta &= 0; \beta = 0; \gamma = 0; \delta \neq 0; \alpha_1 = 1 \\ H_1 : \theta &\neq 0; \beta \neq 0; \gamma \neq 0; \delta = 0; \alpha_1 < 1 \end{aligned} \quad (3b)$$

Do weryfikacji prawdziwości hipotezy, iż  $\alpha_1 = 1$ , Perron zaproponował sprawdzian testu postaci:

$$t^* = \frac{\hat{a}_1 - 1}{s.e.(\hat{a}_1)} \quad (4)$$

gdzie:  $\hat{\alpha}_1$  - oszacowany parametr  $\alpha_1$ ,  $s.e.(\hat{\alpha}_1)$  - błąd szacunku dla parametru  $\alpha_1$ .

Weryfikacja hipotez o strukturalnych zmianach trendu przebiega w kilku etapach. W pierwszym kroku, w zależności od rodzaju zmiany trendu, jaka jest brana pod uwagę, należy oszacować równanie dane w postaci (1a), (2a) lub (3a). W drugim kroku poddaje się weryfikacji zestaw hipotez (1b), (2b) lub (3b), wyznaczając w tym celu wartość sprawdzianu testu (4) oraz podejmując decyzję o odrzuceniu (lub nie) hipotezy zerowej<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Wartości krytyczne dla testu Perrona zawarto w pracy [Perron 1989].

## OPIS BADANIA

Analizie poddano dzienne szeregi zamknięcia indeksów WIG, WIG20, MIDWIG i TechWIG w okresie od 1.07.2003r. do 31.03.2006r. (689 obserwacje). Na podstawie analizy wykresów indeksów ustalono hipotetyczne momenty wystąpienia zmian strukturalnych. Zazwyczaj nie były to konkretne daty, lecz pewne okresy, w których można było zaobserwować zmianę trendu. W dalszym postępowaniu każdy z indeksów został przebadany testem Perrona. Dla każdej analizowanej próby oszacowano modele postaci (1a) - (3a) i poddano weryfikacji hipotezy (1b) - (3b). Sprawdzano zatem, czy szereg jest stacjonarny względem trendu z uwzględnieniem zmiany w jego strukturze oraz kiedy nastąpiła ta zmiana. Z uwagi na to, że w analizowanych szeregach wystąpiło kilka punktów zwrotnych, każdorazowo brano pod uwagę taki fragment szeregu, w którym wystąpiła pojedyncza zmiana<sup>3</sup>. W badaniu przyjęto poziom istotności  $\alpha=0,05$ . Przykładowe wyniki zawiera tabela 1.

Tabela 1. Wyniki testowania punktów zwrotnych

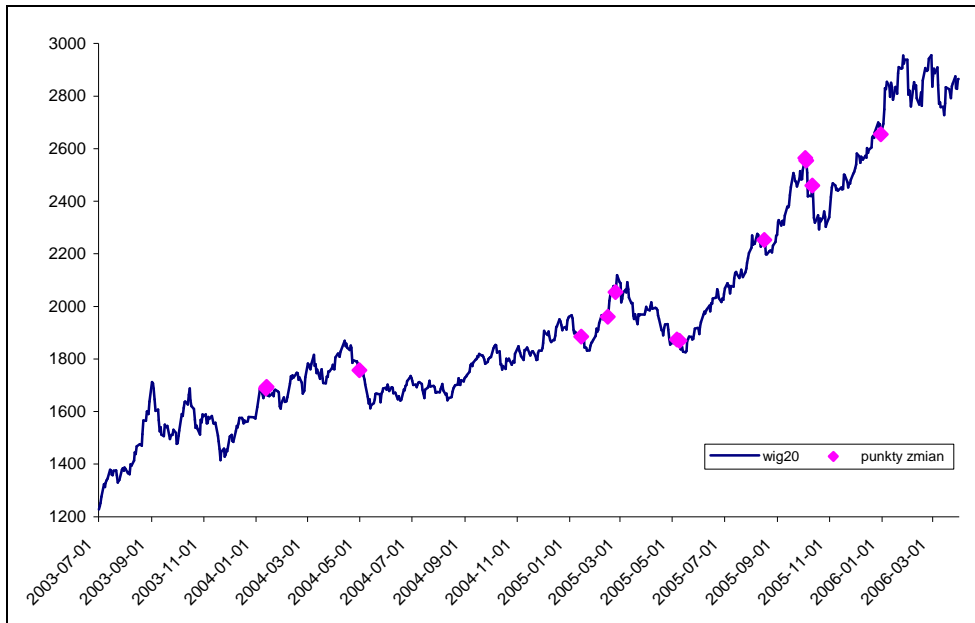
Moment zmiany uzyskany w teście	Rodzaj indeksu	Początek badanej próby	Koniec badanej próby	Liczba obserwacji i moment zmiany	Rodzaj testowanej zmiany	$\lambda$	$k$	$t^*$
03.10.2005	WIG20	2005-08-19	2005-12-29	92 (32)	Model 1	0,347	1	-4,401
		Parametr	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\delta$
		Ocena estymatora parametru	428,285	0,812	1,531	-56,498	---	44,511
		Wart. statystyki $t$ - Stud.	4,433	19,011	4,902	-4,672	---	1,578
	TechWIG	2005-08-19	2005-12-29	92 (32)	Model 3	0,347	1	-4,709
		Parametr	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\delta$
		Ocena estymatora parametru	215,368	0,684	0,537	-26,079	0,349	10,611
		Wart. statystyki $t$ - Stud.	4,742	10,203	3,216	-4,281	2,464	1,520

Zródło: opracowanie własne.

<sup>3</sup> Modyfikację testu Perrona, uwzględniającą możliwość wystąpienia dwóch zmian strukturalnych w funkcji trendu zaproponował Rybiński [Syczewska 1999]. Innym testem pozwalającym na testowanie zmian strukturalnych jest test Chowa [Charemza, Deadman 1997].

Przedstawione w tabeli 1 rezultaty są wynikiem oszacowania, na podstawie próby 19.08.2005 – 29.12.2005, dwunastu modeli postaci: (1a), (2a) i (3a) dla czterech indeksów giełdowych WIG, WIG20, MIDWIG i TechWIG. Okazało się, że tylko w dwóch przypadkach stwierdzono występowanie punktów zwrotnych w trendzie w dniu 3.10.2005r. W przypadku indeksu WIG20 zmiana dotyczyła wyłącznie wyrazu wolnego (co oznaczano jako model 1), podczas gdy dla TechWIG zmiana miała miejsce zarówno dla wyrazu wolnego, jak i współczynnika kierunkowego (- model 3).

Dla kolejnych indeksów w badanym okresie uzyskano od kilku do kilkunastu punktów zwrotnych, co dla indeksu WIG20 przedstawiono na rys. 1.



Rysunek 1. Punkty zwrotne wyznaczone dla indeksu WIG20 za pomocą testu Perrona.

Po wyznaczeniu momentów pojawienia się punktów zwrotnych, podjęto próbę określenia przyczyn pojawienia się określonych zmian strukturalnych. W tym celu przeprowadzono przegląd prasy codziennej oraz czasopism, a także komentarzy analityków rynku zamieszczonych w Internecie. Innymi słowy, starano się zidentyfikować znaczące (tj. zauważone przez komentatorów i analityków rynku) wydarzenia, które mogły przyczynić się do zmiany w strukturze trendu rozważanych indeksów.

## WYNIKI BADAŃ

W wyniku przeprowadzonych badań, wyznaczono dla każdego szeregu czasowego po kilka punktów, w których pojawiła się istotna zmiana w strukturze

trendu. Punkty zwrotne wraz z wyjaśnieniem przyczyn ich wystąpienia przedstawiono w tabelach 2 i 3. W kolejnych kolumnach podano: wydarzenia, które prawdopodobnie wywołały zmianę w strukturze trendu oraz źródła komentarzy, jakie pojawiały się w publikacjach na temat bieżącej sytuacji na rynku finansowym. Dla każdego z indeksów podano daty punktów zwrotnych oraz charakter zmian trendu (np. model 2 oznacza zmianę współczynnika kierunkowego).

Tabela 2. Momenty zmiany w strukturze indeksów w latach 2003 i 2004

Wydarzenie	Źródło komentarzy	WIG	WIG20	MIDWIG	TechWIG
		Punkty zwrotne: data i typ modelu			
Publikacja wyników spółek za III kwartał 2003r.		X	X	13.11.2003 Model (3) 28.11.2003 Model (2)	13.11.2003 Model (3)
Efekt stycznia lub publikacja danych makroekonomicznych USA	[Świderek 2004a], [Brycki 2004a]	12.01.2004 Model (3)	12.01.2004 Model (3)	09.01.2004 Model (1)	X
Wstąpienie Polski do Unii Europejskiej	[Banasik 2004a], [Zaremba-Śmietański 2004]	30.04.2004 Model (3) 04.05.2004 Model (3)	30.04.2004 Model (1) 04.05.2004 Model (3)	30.04.2004 Model (3) 04.05.2004 Model (3)	X
Oczekiwanie na publikację raportów kwartalnych	[Kłusek 2004]	X	X	X	03.08.2004 Model (2)
Koniec wakacji i powrót inwestorów na giełdę lub aktywność inwestorów z zagranicy i funduszy emerytalnych	[Brycki 2004b, 2004c], [Banasik 2004b]	30.08.2004 Model (1)	30.08.2004 Model (2)	25.08.2004 Model (3)	X

Źródło: opracowanie własne.

Dla przełomu września i października 2005 roku, kiedy w Polsce odbywały się wybory parlamentarne i prezydenckie oraz formowano rząd (tab. 3) otrzymano następujące momenty zmiany w strukturze trendu:

- 3 października 2005r. dla WIG, WIG20 i TechWIG;
- 4 października 2005r. dla WIG, WIG20, TechWIG oraz MIDWIG;
- 11 października 2005r. dla wszystkich rozważanych indeksów.



Czy w takim razie wyniki wyborów miały wpływ na zachowanie inwestorów? W tej kwestii zdania analityków są podzielone. Większość komentatorów nie widzi wpływu wyników wyborów parlamentarnych na korektę na giełdzie.

Tabela 3. Momenty zmiany w strukturze indeksów w roku 2005

Wydarzenie	Źródło komentarzy	WIG	WIG20	MIDWIG	TechWIG
		Punkty zwrotne: data i typ modelu			
Spadek cen ropy oraz kursu dolara	[Świderek 2004b]	03.01.2005 Model (3)	X	X	X
Napływ zagranicznego kapitału na GPW	[Bednarski 2005a], [Banasiak 2005]	14.01.2005 Model (3)	14.01.2005 Model (3)	X	14.01.2005 Model (3)
Publikacje raportów spółek za IV kwartał 2004r.	[A. Sz. 2005]	14.02.2005 Model (3)	14.02.2005 Model (3)	14.02.2005 Model (3)	14.02.2005 Model (3)
Wycofanie się inwestorów zagranicznych/ realizacja zysków	[Kłusek, 2005a]	22.02.2005 Model (2)	22.02.2005 Model (3)	22.02.2005 Model (3)	22.02.2005 Model (3)
Publikacje raportów spółek za I kwartał 2005r	[Bednarski 2005b], [Jabłoński 2005], [Kłusek 2005b]	06.05.2005 Model (3) 09.05.2005 Model (2)	06.05.2005 Model (3) 09.05.2005 Model (2)	X	09.05.2005 Model (3)
Publikacje raportów spółek za II kwartał 2005r.	[Grzegorzczak 2005]	16.08.2005 Model (3)	16.08.2005 Model (3)	09.08.2005 Model (2)	X
Sytuacja polityczna po wyborach parlamentarnych lub wycofywanie się inwestorów z zagranicy - realizacja zysków	[Brycki 2005a, 2005b], [Zaremba-Śmiałowski 2005], [Bednarski 2005c]	03.10.2005 Model (1)	03.10.2005 Model (1)	X	03.10.2005 Model (3)
		04.10.2005 Model (1)	04.10.2005 Model (3)	04.10.2005 Model (3)	04.10.2005 Model (3)
		11.10.2005 Model (1)	11.10.2005 Model (1)	11.10.2005 Model (3)	11.10.2005 Model (3)
Początek roku – tzw. efekt stycznia	[Świderek 2005], [Brycki 2006]	30.12.2005 Model (3)	30.12.2005 Model (3)	X	30.12.2005 02.01.2006 Model (3)

Źródło: opracowanie własne.

Na przykład w pracy [Brycki 2005a] czytamy: „Po wielu tygodniach zwyżek ceny akcji ostro spadają. Polskich papierów pozbywają się inwestorzy zagraniczni. Podobnie jak na innych rynkach regionu. [...] Akcje w Brazylii zniżkują jeszcze bardziej.” W opracowaniu [Brycki 2005b] przytacza się wypowiedź maklera CAIB Securitas P. Dudzińskiego, według którego spadki, które zaczęły się 4 października są efektem rozpoczęcia procesu realizacji zysków przez zagraniczne fundusze na tzw. rynkach wschodzących i nie dotyczą one tylko Warszawy, ale również Budapesztu i Moskwy. Jednocześnie [Zaremba-Śmietański 2005] wskazuje, iż „utrzymuje się silne wykupienie rynku. [...] W tym kontekście pożądana korekta zrobiłaby dobrze, a chwilowy spadek cen zachęciłby inwestorów, którzy stoją z boku. Akcje są bowiem wywindowane w górę przez zachodni kapitał. Czas, żeby do hossy aktywniej dołączyli inwestorzy krajowi”. Również według [Bednarski 2005b], wyniki wyborów nie powinny mieć wpływu na rynek. W jego opinii „wydarzeniami na GPW rządzą inwestorzy zagraniczni, którzy bardziej niż na sprawy lokalne patrzą na zwiększające się ryzyko wzrostu stóp procentowych w USA.”

Analizując dane w tab. 2 i 3 można zauważyć, że najwięcej zmian zaobserwowano dla indeksu WIG, dalej dla WIG20, MIDWIG i TechWIG. W większości przypadków dla indeksów WIG i WIG20 zmiany w strukturze następowały w tym samym momencie. Natomiast dla indeksów MIDWIG i TechWIG zmiany te pojawiały w pewnych okresach w tym samym momencie, co dla indeksu WIG, a w innych były zupełnie niepowiązane ze zmianą indeksu WIG. Fakt, że trend dla WIG i WIG20 zmieniał się w tym samym momencie wynika przede wszystkim ze sposobu wyznaczania indeksu WIG, na którego wartość największy wpływ mają największe spółki, czyli spółki będące podstawą wyznaczenia wartości indeksu WIG20.

## WNIOSKI

Podsumowując omawiane badania można stwierdzić, iż w analizowanym okresie wpływ<sup>4</sup> na zmianę trendu na GPW w Warszawie miały przede wszystkim decyzje inwestorów zagranicznych. Wniosek taki wypływa z analiz rynków kapitałowych w krajach ościennych, bowiem kiedy inwestorzy zagraniczni zaczęli kupować akcje lub realizować zyski na polskiej giełdzie, w podobny sposób zachowywali się na giełdach w Pradze i w Budapeszcie.

Innym istotnym czynnikiem, zidentyfikowanym na podstawie testu Perrona i przytoczonych komentarzy analityków giełdowych, mającym wpływ na zmiany w strukturze trendu, były publikacje wyników finansowych spółek giełdowych.

---

<sup>4</sup> Niestety nie wszystkim zidentyfikowanym istotnym zmianom w strukturze szeregu udało się przypisać wydarzenia zauważone przez komentatorów. Dotyczy to np. zmian indeksu TechWIG 29.01.2004r.

W analizowanym okresie, na te wydarzenia indeksy WIG, WIG20 i MIDWIG zareagowały trzykrotnie, a indeks TechWIG – czterokrotnie.

Warto zauważyć wystąpienie tzw. efektu stycznia, na co z pewnością miały wpływ regulacje prawne dotyczące opodatkowania dochodów z zysków kapitałowych w Polsce. Jednakże, jak podaje [Szyszka 2006], obecność efektu stycznia można również zaobserwować w krajach, w których nie ma podatku od dochodów kapitałowych. Wówczas wytłumaczeniem tej anomalii rynku mogą być daleko posunięte powiązania światowych rynków kapitałowych.

Należy podkreślić, że w badanym okresie Rada Polityki Pieniężnej (RPP) kilkakrotnie zmieniała poziom stóp procentowych, natomiast z przeprowadzonej analizy wynika, że te decyzje RPP nie miały istotnego wpływu na wartości głównych indeksów giełdowych GPW w Warszawie. Podobne wyniki uzyskali [Serwa, Szymańska 2004], którzy sprawdzali, jaki wpływ m.in. na indeksy WIG, WIG20 i TechWIG miały tzw. „szoki w polityce pieniężnej” w okresie styczeń 1999r. – grudzień 2002r. W pracy tych Autorów czytamy: „Szokom na rynku pieniężnym nie towarzyszą gwałtowne zmiany indeksów giełdowych.”

Trudno jest natomiast jednoznacznie ocenić czy wydarzenia polityczne tj. wybory parlamentarne i prezydenckie miały istotny wpływ na rynek kapitałowy, czy oddziaływały w niewielkim stopniu. Faktem jest, że w tym okresie zidentyfikowano po kilka punktów zwrotnych dla każdego z indeksów. Analitycy w większości komentarzy eksponowali zachowania zagranicznych inwestorów, pomniejszając (czy wręcz negując) wpływ czynników pozaekonomicznych. Wartym jednakże odnotowania wydaje się fakt, że jesienią 2005r. pojawiło się najwięcej punktów zwrotnych w krótkim okresie.

## LITERATURA

- A. Sz. (2005) Pod presją wyników kwartalnych, Rzeczpospolita z 15.02., str. B8  
 Banasik P. (2004a) Komentarz, Rzeczpospolita z 4.05., str. B8  
 Banasik P. (2004b) Komentarz, Rzeczpospolita z 4 - 5.09., str. B8  
 Banasik P. (2005) Komentarz, Rzeczpospolita z 15.01., str. B8  
 Bednarski T. (2005a) Komentarz Rzeczpospolita z 14.01., str. B8  
 Bednarski T. (2005b) Komentarz, Rzeczpospolita z 6.05., str. B8  
 Bednarski T. (2005c) Komentarz Giełdowy, Rzeczpospolita z 21.10, str. B8  
 Brycki G. (2004a) Dane z USA zaszkodziły akcjom, Rzeczpospolita z 10-11.01.,str. B8  
 Brycki G. (2004b) Zagranica kupuje polskie akcje, Rzeczpospolita z 1.09., str. B8  
 Brycki G. (2004c) Nadal w górę, Rzeczpospolita z 3.09, str. B8  
 Brycki G. (2005a) Zagraniczni inwestorzy wyprzedają akcje, Rzeczpospolita z 7.10., str. 1  
 Brycki G. (2005b) Ucieczka z rynków wschodzących, Rzeczpospolita z 7.10.,str. B1  
 Brycki G. (2006) Jest efekt stycznia, Rzeczpospolita z 4.01., str. B8  
 Charemza W., Deadman D. (1997) Nowa Ekonometria, PWE, Warszawa  
 Enders W. (1995) Applied Econometric Time Series, J. Wiley, New York  
 Grzegorzczak W. (2005) Spokojnie przed długim weekendem, Rzeczpospolita z 8.08., str. B8

- Jabłoński P. (2005) Dwugłós o kursie złotego, Rzeczpospolita z 9.05., str. B8
- Jajuga K. (red.) (2000) Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego, Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław
- Kłusek S. (2004) Komentarz, Rzeczpospolita z 5.08., str. B8
- Kłusek S. (2005a) Komentarz, Rzeczpospolita z 24.02.2005r., str. B8
- Kłusek K. (2005b) Komentarz Giełdowy, Rzeczpospolita z 12.05., str. B8
- Perron P. (1989) The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis, *Econometrica*, Vol. 57, No. 6, str. 1361-1401
- Piłatowska M. (2003) Modelowanie niestacjonarnych procesów ekonomicznych. Studium Metodologiczne, Wydawnictwo UMK, Toruń
- Serwa D., Szymańska M. (2004) Reakcje rynków finansowych na szoki w polityce pieniężnej, *Bank i Kredyt*, 6, str. 16-25
- Syczewska E. (1999) Analiza relacji długookresowych: estymacja i weryfikacja, Monografie i opracowania, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa
- Szyska A. (2006) Efektywność rynku kapitałowego a anomalie w rozkładzie stóp zwrotu w czasie, [www.atinvest.pl](http://www.atinvest.pl)
- Świderek T. (2004a) Mówią, że to efekt stycznia, Rzeczpospolita z 6.01., str. B8
- Świderek T. (2004b) Dobry początek roku, Rzeczpospolita z 4-5.09., str. B8
- Świderek T. (2005) Wysokie zyski z islandzkich akcji, Rzeczpospolita z 31.12., str. B8
- Zaremba-Śmietański P. (2004) Komentarz, Rzeczpospolita z 5.05., str. B8
- Zaremba-Śmietański P. (2005) Komentarz Giełdowy, Rzeczpospolita z 5.10., str. B8

### **Application of the Perron Test to the Turning Points Investigation for the Market Indexes: WIG, WIG20, MIDWIG and TechWIG**

**Summary:** The aim of the research is to identify turning points of the selected market indexes of the Warsaw stock exchange. These indexes are: WIG, WIG20, MIDWIG and TechWIG and the investigated period is from 1.07.2003 to 31.03.2006. The first stage of the research consists in selection of the precise moment (i.e. date) when the turning point appears. In the second stage we find out the important events that cause the change in the trend structure of investigated time series.

**Key words:** time series, stationary process, Perron test, market indexes.

Tomasz Ząbkowski  
Katedra Ekonometrii i Informatyki, SGGW  
e-mail: tzabkowski@mors.sggw.waw.pl

## **PORÓWNANIE METOD TRAMO-SEATS I SIECI NEURONOWYCH WYKORZYSTYWANYCH DO PROGNOZOWANIA KRÓTKOOKRESOWEGO SZEREGÓW CZASOWYCH**

**Streszczenie:** Artykuł prezentuje dwa podejścia prognozowania szeregu czasowego wykorzystania minut przez abonentów firmy telekomunikacyjnej. Do porównania zostały wykorzystane: metoda Tramo- Seats bazująca na metodologii ARIMA oraz różnego typu sztuczne sieci neuronowe. Metody te zostały w artykule gruntownie scharakteryzowane. Otrzymane w części eksperymentalnej wyniki dla prognoz krótkookresowych sugerują zasadność stosowania metody Tramo-Seats.

**Słowa kluczowe:** Tramo-Seats, sieci neuronowe, prognozowanie, szeregi czasowe.

### **WSTĘP**

Prognozowanie jako działalność poznawcza i zmierzająca od wskazania najbardziej prawdopodobnych kierunków przebiegu zjawisk i zdarzeń społeczno-ekonomicznych jest coraz częściej nierozłącznym elementem, związanym z ludzką działalnością. Główną przyczyną takiego stanu rzeczy jest niepewność występująca często w sferze zjawisk ekonomicznych i w znacznym stopniu utrudniająca trafność podejmowania decyzji.

W praktyce gospodarczej, wszelkiego rodzaju prognozy są nieodzownym elementem działalności każdego przedsiębiorstwa i od ich trafności zależy efektywność zarządzania firmą [Dittmann 2002]. Spośród wielu prognoz, istotną rolę w zarządzaniu przedsiębiorstwem odgrywają prognozy sprzedaży. W niniejszej publikacji, rozważany będzie przykład prognozy sprzedaży, bądź precyzyjniej ujmując, wykorzystania ogólnej liczby minut przez klientów firmy telekomunikacyjnej. W związku z tym, że otoczenie i rynek usług telekomunikacyjnych jest bardzo dynamiczny, zakres prognoz dotyczących sprzedaży i wykorzystania minut przez abonentów ma charakter krótkookresowy, tj. do 6 miesięcy. Prognozowanie tego problemu wykorzystywane jest do działalności operacyjnej i służy do określania bieżących wydatków m.in. na reklamę, administrację oraz do testowania skutków wprowadzania zmian ceny. Wyznaczona prognoza jest również wykorzystywana w prognozowaniu finansowym, m.in. do określania wielkości środków finansowych niezbędnych do realizacji prognozowanej wielkości sprzedaży.

Wybór odpowiedniej metody prognozowania jest zagadnieniem bardzo ważnym i jednocześnie dość trudnym. Przy wyborze metod, spośród różnych ich właściwości, pod uwagę bierze się najczęściej horyzont prognozy, liczbę okresów wykorzystywanych do budowania prognozy, koszty stosowania metod, dokładność uzyskiwanych prognoz czy też prostotę i łatwość ich stosowania. Często dla danego problemu można wskazać więcej niż jedną metodę prognozowania.

W prezentowanej publikacji do prognozowania krótkookresowego na podstawie szeregu czasowego zostaną wykorzystane dwie metody, które może nie są najprostszymi i najczęściej wykorzystywanymi do prognozowania, ale przy wykorzystaniu mocy obliczeniowej komputera pozwalają na osiągnięcie bardzo dobrych prognoz przyszłych wartości szeregu czasowego. Metoda Tramo Seat stanowi obecnie jedną z najpopularniejszych i najczęściej stosowanych metod wygładzania, a następnie prognozowania szeregów czasowych. Natomiast sztuczne sieci neuronowe możemy określić jako technikę modelowania, zdolną do odwzorowywania nadzwyczaj złożonych funkcji. W szczególności sieci neuronowe mają charakter nieliniowy, co istotnie wzbogaca możliwości ich zastosowań do złożonych problemów.

## METODA TRAMO SEATS

Metoda Tramo Seats stanowi obecnie jedną z najpopularniejszych i najczęściej stosowanych metod wygładzania szeregów czasowych. Metoda ta opracowana została przez V. Gómeza [Gomez i in. 1996] i A. Maravalla [Marvall 2000-2002] i jest coraz powszechniej stosowaną w szeroko pojętym zakresie wygładzania szeregów czasowych przez urzędy statystyczne, banki centralne i instytuty badawcze w Europie. Składa się z dwóch etapów Tramo i Seats. Pierwszy jest określany jako etap eliminacji wstępnej, w drugim dokonuje się właściwa dekompozycja i eliminowanie wpływów sezonowych.

Często rzeczywiste szeregi czasowe są trudne do modelowania, ponieważ zawierają bardzo nieregularne zdarzenia, których istota sprawia, że nie powinny być modelowane. Dlatego te obserwacje są usuwane, aby uniknąć zniekształceń w analizie szeregów. Dzięki procedurom wstępnym możliwe staje się "wyczyszczenie" szeregu z tych efektów, tzn. uzyskanie takich danych, jak gdyby te efekty nie miały miejsca. Szczególne znaczenie dla obydwu procedur ma identyfikacja modelu. Model powinien możliwie najlepiej opisywać badaną rzeczywistość i być uwiarygodniony przez testy statystyczne, dostępne w procedurach wyrównań.

Metoda Tramo/Seats jest metodą ściśle opartą na metodologii ARIMA wykorzystując ją nie tylko jako pomocnicze narzędzie prognozowania i wygładzania szeregu, lecz także jako podstawowe narzędzie właściwej dekompozycji do wydzielenia składowych szeregu.

TRAMO (Time series Regression with ARIMA noise, Missing values, and Outliers) jest metodą, a ściślej mówiąc programem do estymacji i prognozowania

modeli regresyjnych z brakującymi obserwacjami, błędami ARIMA, a także z różnego typu wartościami nietypowymi oraz deterministycznymi takimi jak obserwacje nietypowe, efekty kalendarzowe, święta ruchome. Istotną kwestią jest uwzględnienie tzw. efektu kalendarzowego (TD – trading day effect) powodującego różny rozkład dni roboczych w poszczególnych miesiącach. Efekt kalendarzowy może być opisany za pomocą jednej zmiennej klasyfikującej dni na robocze/nie robocze, bądź też na 6 zmiennych, które uchwytują oddzielne efekty dla każdego dnia tygodnia. Mając wektor  $y$  obserwacji szeregu czasowego:

$$y = [y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_m)], \quad (1)$$

gdzie  $0 < t_1 < \dots < t_m$ , program dopasowuje model regresji, który w najprostszej postaci możemy zapisać następująco:

$$y(t) = z(t)b + x(t), \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{b}$  jest wektorem współczynników  $\omega$ ,  $\alpha$ , i  $\beta$ , natomiast  $\mathbf{z}(t)$  oznacza macierz z kolumnami zawierającymi zmienne opóźnione w szeregu, zmienne kalendarzowe oraz inne zmienne regresyjne i interwencyjne brane pod uwagę przy budowie modelu. Szczegółowy zapis modelu (2) może być opisany w poniższy sposób:

$$y_{(t)} = \sum_{i=1}^{n_{out}} \varpi_i \lambda_i(B) d_i(t) + \sum_{i=1}^{n_c} \alpha_i cal_i(t) + \sum_{i=1}^{n_{reg}} \beta_i reg_i(t) + x(t), \quad (3)$$

gdzie  $B$  oznacza operator opóźnienia,  $d_i(t)$  jest zmienną zerojedynkową oznaczającą pozycję poszczególnych wartości nietypowej,  $\lambda_i(B)$  jest wielomianem  $B$  oddającym dynamikę wartości,  $cal_i$  oznacza typ zmiennej kalendarzowej,  $reg_i$  oznacza zmienną objaśniającą bądź interwencyjną. Parametr  $\varpi_i$  to współczynnik zmiennej opisującej obserwacje nietypowe,  $\alpha_i$  i  $\beta_i$  to odpowiednio współczynniki dla efektów kalendarzowych i interwencji. Z kolei symbole  $n_{out}$ ,  $n_c$ ,  $n_{reg}$  oznaczają całkowitą liczbę zmiennych w danym etapie.

Model ARIMA, który jest dopasowywany dla  $x(t)$  może zostać zapisany w postaci  $(p, d, q)(p_s, d_s, q_s)$ , gdzie zbiór trzech parametrów oznacza odpowiednio rząd autoregresji, rząd „różnicowania”, oraz wielkość opóźnienia średniej ruchomej dla kombinacji czynników sezonowych i niesezonowych [Gomez i in. 2001].

SEATS (Signal Extraction in ARIMA Time Series) jest z kolei szeregiem metod do dekompozycji szeregu czasowego na zestaw komponentów w procesie określanym jako AMB (ARIMA-model-based). Zwykle, jako kolejny krok po przejściu etapu Tramo, szereg, ale już pozbawiony efektów deterministycznych takich jak obserwacje nietypowe, efekty kalendarzowe, święta ruchome, jest

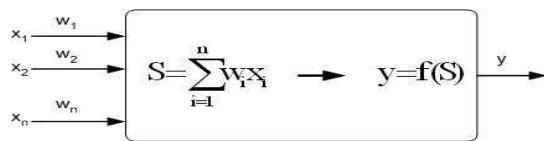
poddawany dekompozycji mającej na celu wyodrębnienie komponentów szeregu. Szereg po dekompozycji, w postaci addytywnej, możemy zapisać następująco:

$$Y(t) = T(t) + C(t) + S(t) + I(t), \quad (4)$$

gdzie  $T(t)$  oznacza trend,  $C(t)$  oznacza wahania cykliczne,  $S(t)$  oznacza wahania sezonowe, natomiast  $I(t)$  oznacza wahania przypadkowe.

## SZTUCZNE SIECI NEURONOWE

W prezentowanej publikacji sztuczna sieć neuronowa rozumiana będzie jako technika obliczeniowa wzorowana na strukturze i sposobie działania układów nerwowych organizmów żywych. Sztuczna sieć neuronowa jest zespołem połączonych ze sobą elementów przetwarzających tzw. neuronów. Sztuczny neuron jako model swojego rzeczywistego odpowiednika jest przedstawiony na Rys.1.



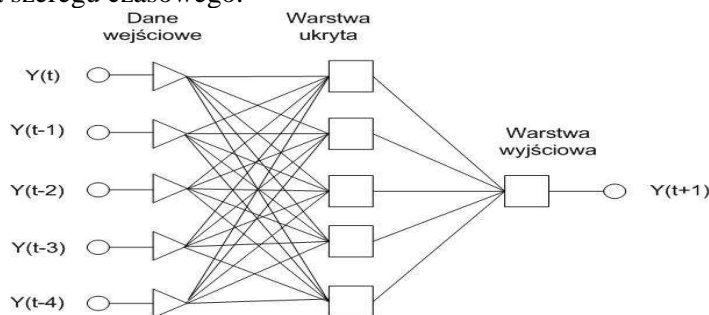
Rys.1. Przykładowy schemat sztucznego neuronu. Źródło: opracowanie własne na podstawie [Najman i in., 2000].

Jego zasadniczym celem jest przetworzenie informacji wejściowej, dostarczanej w postaci wartości  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , w wartość wyjściową  $y$ . Przyjmuje się, że zarówno wartości wprowadzane na wejścia neuronu, jak i uzyskiwana na jego wyjściu wartość wyjściowa, mają postać liczb rzeczywistych. Z każdym wejściem neuronu związany jest współczynnik zwany wagą. Współczynniki wagowe neuronu są podstawowymi parametrami wpływającymi na sposób funkcjonowania sztucznej komórki nerwowej. Przetwarzanie informacji przez sztuczny neuron składa się z dwóch etapów. Pierwszym z nich jest agregacja danych wejściowych, zaś drugim wyznaczenie wartości wyjściowej neuronu.

Agregacja danych wejściowych ma na celu przetworzenie wektora wejściowego  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  w pojedynczą wartość (zagregowaną wartość wejściową). Na rezultat tej transformacji w zasadniczy sposób wpływają wartości wag. Spośród wielu sposobów agregacji największą popularnością cieszy się wyznaczanie wartości zagregowanej poprzez zsumowanie iloczynów wartości wejściowych i odpowiadających im wag. Zwykle neurony wchodzące w skład sieci tworzą warstwy, z których pierwsza nosi nazwę warstwy wejściowej, ostatnia warstwy wyjściowej, zaś wszystkie warstwy znajdujące się pomiędzy nimi określane są jako warstwy ukryte. Wartości wejściowe sieci wprowadzane są na wejścia neuronów warstwy wejściowej. Następnie, poprzez istniejące połączenia,



wartości wyjściowe neuronów jednej warstwy przekazywane są na wejścia elementów przetwarzających kolejnej warstwy. Wartości uzyskane na wyjściach neuronów ostatniej warstwy są jednocześnie wartościami wyjściowymi sieci. Prawidłowo skonstruowana sieć neuronowa może służyć do rozwiązywania wielu typów zagadnień. Do najpopularniejszych zastosowań sieci należy zaliczyć budowane przy ich wykorzystaniu modele rozwiązujące problemy regresyjne, klasyfikacyjne oraz prognostyczne [Haykin 1994]. W problemach prognostycznych, a takim jest rozważany w tej publikacji problem prognozowania krótkookresowego, celem stosowania modeli neuronowych jest wyznaczenie przyszłej wartości szeregu czasowego. Sieć rozwiązująca zagadnienia tego typu korzysta z bieżących oraz przeszłych wartości tego samego szeregu [Najman i in. 2000]. Na Rys. 2. została przedstawiona struktura sieci neuronowej dla potrzeb prognozowania szeregu czasowego.



Rys. 2. Architektura sieci neuronowej do prognozowania szeregu czasowego. Źródło: opracowanie własne na podstawie [Najman i in., 2000].

Proces mający na celu określenie prawidłowych wartości parametrów sieci (wag, struktury sieci) to tzw. uczenie sieci, które jest niezbędnym elementem procesu konstrukcji modelu neuronowego. Proces uczenia realizowany jest przy wykorzystaniu dostępnych zestawów danych, które ilustrują przebieg badanych zjawisk dla wybranych obiektów i/lub przeszłych okresów czasu. W trakcie uczenia na wejścia sieci wprowadzane są zgromadzone wartości i obserwowane jest towarzyszące tej operacji zachowanie sieci. Jeżeli zachowanie sieci nie może zostać uznane za w pełni poprawne, to przeprowadzana jest modyfikacja parametrów sieci mająca na celu poprawę jej funkcjonowania. Sposób przeprowadzenia modyfikacji określany jest przez zastosowany algorytm uczenia sieci. Typowym przypadkiem uczenia sieci w problemach prognostycznych jest tzw. uczenie z nauczycielem, gdzie zbiór uczący zawiera zarówno wartości zmiennych wejściowych jak i odpowiadające im wartości zmiennej (lub zmiennych) wyjściowych. Idea uczenia z nauczycielem jest taka, że po wprowadzeniu poprzez neurony wejściowe wartości zmiennych wejściowych wyznaczana jest odpowiedź sieci. Uzyskana w ten sposób wartość porównywana

jest z rzeczywistą wartością przechowywaną w zbiorze uczącym. Jeśli porównywane wartości nie są równe, to parametry sieci (wagi) modyfikowane są w taki sposób, aby odpowiedź sieci upodobniła się do wartości rzeczywistej. Należy zwrócić uwagę, że wyznaczany w trakcie uczenia błąd uczenia nie może stanowić podstawy do oceny jakości sieci, gdyż jego wartość może zostać sprowadzona do dowolnie niskiego poziomu poprzez rozbudowę części ukrytej sieci. Zwiększanie liczby neuronów ukrytych ma również swoje wady - zwiększa liczbę parametrów sieci szacowanych w czasie uczenia, co często w istotny sposób wpływa na czas obliczeń. Jednakże najpoważniejszą konsekwencją stosowania zbyt rozbudowanych struktur sieciowych jest możliwość utraty przez sieć zdolności do uogólniania. Z uwagi na negatywny wpływ przeuczenia na funkcjonowanie sieci należy wzbogacić procedurę uczenia o mechanizm odpowiedzialny za wczesne wykrycie zaniku zdolności do generalizacji. Sygnały o przeuczeniu nie mogą być generowane w oparciu o miary jakości sieci wyznaczone na podstawie zbioru uczącego, gdyż te wskazują w takiej sytuacji na coraz lepsze dopasowanie sieci do danych. Podstawą do uzyskania informacji o przeuczeniu muszą być mierniki wyznaczone na podstawie danych nie prezentowanych w trakcie uczenia. Aby umożliwić takie działania dostępny zbiór danych dzielony jest na trzy części: zbiór uczący (prezentowany sieci w trakcie uczenia i służący do modyfikacji wartości parametrów), zbiór walidacyjny (pozwalający na monitorowanie procesu uczenia sieci) oraz zbiór testowy (służący do przeprowadzenia ostatecznej oceny uzyskanej sieci).

## PORÓWNANIE MODELI

Do celów porównawczych został wykorzystany szereg czasowy obrazujący miesięczne wykorzystanie ilości minut przez abonentów firmy telekomunikacyjnej. Celem doświadczenia było zbudowanie prognozy krótkoterminowej na najbliższe 6 miesięcy, które w jak najlepszym stopniu odzwierciedli prawdziwy przebieg zjawiska. Tak zbudowana prognoza ma służyć do prognozowania finansowego obejmującego oszacowanie wpływów gotówkowych, zależnych od ilości wykorzystanych minut. W związku z tym akceptowalny błąd prognozy musi być niewielki. Błąd predykcji był mierzony za pomocą średniego bezwzględnego procentowego błędu (MAPE), który jest często stosowaną miarą w tego typu prognozach. Błąd ten możemy zapisać w następującej formie:

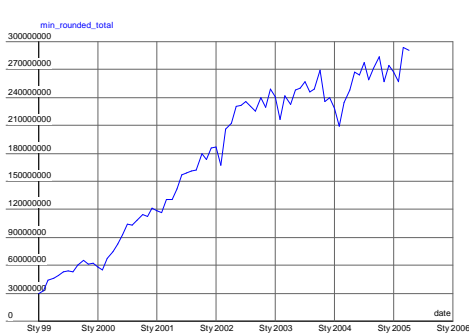
$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i| / s_i, \quad (5)$$

gdzie  $s_i$  -wartość rzeczywista, a  $\varepsilon_i$  wartość reszty.

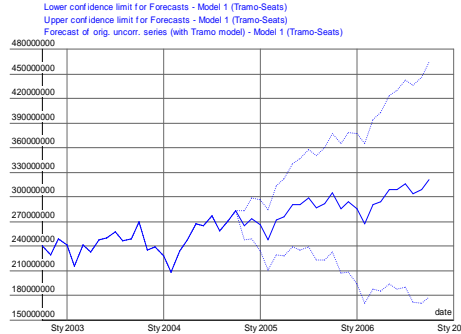
Do dyspozycji był szereg czasowy, zawierający dane miesięczne za okres od stycznia 1999 do kwietnia 2005. Szereg posiada 76 obserwacji i jego przebieg jest przedstawiony na Rys. 3. Dość charakterystyczną cechą tego szeregu jest to, że w miesiącu lutym, na przestrzeni badanego okresu, występuje znaczny spadek

ilości wykorzystanych minut. Jednocześnie, na przestrzeni lat, dynamika wzrostu uległa zmianie, z niemalże potęgowych przyrostów na początku badanego okresu do wahań porównywalnych do białego szumu w ostatnim okresie.

W przypadku metody Tramo-Seats do budowy modelu zostały wykorzystane obserwacje 1-70, natomiast obserwacje 71-76 stanowiły część szeregu, na którym był mierzony błąd prognozy. Zgodnie z procedurą opisaną we wcześniejszym rozdziale podczas eliminacji wstępnej obejmującej m.in. eliminację wartości odstających w szeregu oraz po wyeliminowaniu efektów kalendarzowych został zidentyfikowany model ARIMA z następującymi parametrami  $(0, 2, 1)(0, 1, 1)$ . Obliczenia zostały wykonane przy użyciu pakietu Demetra, wersja 2.04, dostępnego m.in. na stronach Eurostat. Na Rys. 4. przedstawiona została prognoza szeregu dla oszacowanego modelu metodą Tramo-Seats.



Rys. 3. Szereg czasowy wykorzystania minut.  
Źródło: opracowanie własne



Rys. 4. Prognoza szeregu metodą T/S  
Źródło: opracowanie własne

Nieco inaczej został przeprowadzony eksperyment dla sieci neuronowych. W tym wypadku obserwacje 1-60 stanowiły zbiór uczący, obserwacje 61-70 stanowiły zbiór walidacyjny, a obserwacje 71-76 służyły do mierzenia błędu prognozy. W przypadku sieci neuronowych zostało wygenerowanych losowo 100 sieci o architekturze MLP i RBF, z czego 6 najlepszych modeli zostało wybranych do porównania z modelem otrzymanym w procesie modelowania za pomocą Tramo-Seats. Jako zmienne wejściowe w budowanych modelach posłużyły przeszłe wartości tego samego szeregu. Przykładowo – struktura w Modelu 1 oznacza, że model zawiera 5 zmiennych wejściowych  $[Y(t), Y(t-1), Y(t-2), Y(t-3), Y(t-4)]$ , 24 neurony w warstwie ukrytej, oraz w warstwie wyjściowej otrzymujemy wynik w postaci  $Y(t+1)$ . Sieci neuronowe zostały wygenerowane w pakiecie Statistica, wersja 6.1, Sieci Neuronowe. Sumaryczne zestawienie wyników prezentuje Tabela 1.

Tab. 1. Zestawienie otrzymanych wyników porównywanych modeli.

Model	1	2	3	4	5	6	7
<b>Struktura</b>	MLP 5:24:1	MLP 6:3:1	MLP 6:13:1	RBF 9:14:1	RBF 9:17:1	RBF 9:15:1	Tramo- Seat
<b>Błąd MAPE</b>	4,70%	4,49%	4,84%	3,72%	3,99%	3,90%	3,44%

Źródło: Obliczenia własne

Analizując wyniki w tabeli można stwierdzić, że prognoza zbudowana przy wykorzystaniu metodologii Tramo-Seat pozwala osiągnąć najmniejszy błąd, tj. 3,44%, nieco gorzej wypadają sieci neuronowe o strukturze RBF, gdzie błąd jest rzędu 3,72%-3,99%, a najmniej trafnie prognozują zjawisko sieci typu MLP.

## PODSUMOWANIE

Otrzymane wyniki pozwalają sądzić, że za pomocą metody Tramo-Seats, w tym konkretnym przypadku, możemy uzyskać lepsze wyniki do prognozowania szeregu czasowego wielkości wykorzystywanych minut w firmie telekomunikacyjnej. Metoda ta pozwoliła na wykrycie pewnych charakterystyk badanego szeregu czasowego, które decydują o jego powtarzalności, w zależności od miesiąca i ilości dni roboczych w nim występujących. Przekłada się to na lepsze rozpoznanie poszczególnych komponentów szeregu, co w następstwie skutkuje uzyskaniem trafniejszych prognoz. W przypadku wykorzystania sieci neuronowych, można zauważyć, że większą trafność prognoz uzyskamy stosując sieci o radialnych funkcjach bazowych (RBF), które to służą najczęściej do nieliniowej aproksymacji zmiennych numerycznych. Z różnych twierdzeń [Poggio i Girosi, 1990] wynika, że taka sieć może służyć jako uniwersalny aproksymator i przybliżyć z dowolną dokładnością dowolną funkcję ciągłą określoną na dziedzinie wielozmiennej. Z kolei sieci MLP wykorzystane podczas eksperymentu niezbyt trafnie prognozowały badane zjawisko.

## LITERATURA

- Dittmann P. (2002) Metody prognozowania sprzedaży w przedsiębiorstwie Wyd. AE, Wrocław
- Gomez, V., Marvall, A. (2001) Seasonal Adjustment and Signal Extraction in Economic Time Series, Ch.8 in Pena D., Tiao G.C. and Tsay, R.S. (eds.) A Course in Time Series Analysis, New York: J. Wiley and Sons.
- Gomez, V., Marvall, A. (1996) Programs TRAMO (Time series Regression with Arima noise, Missing observations, and Outliers) and SEATS (Signal Extraction in Arima Time Series). Instructions for the User, Working Paper 9628, Banco de Espana.
- Haykin S. (1994) Neural networks: a comprehensive foundation, Macmillan, New York

- Najman Migdał K., Najman K. (2000) Zastosowanie sieci neuronowych na WGPW, Rynek Kapitałowy – Skuteczne Inwestowanie, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, tom II, str. 433-454,
- Najman Migdał K., Najman K. (2000) Sieci neuronowe – wykorzystanie do prognozowania WIG, Profesjonalny Inwestor, nr 8/2000, str. 10-18,
- Marvall A. (2000) An application of TRAMO and SEATS, in Annali di Statistica, special issue on Seasonal Adjustment Procedures. Experiences and Perspectives, 20, p. 271-344.
- Marvall A. (2002), An application of TRAMO-SEATS: Automatic Procedure and Sectoral Aggregation. The Japanese Foreign Trade Series, Working Paper 0207, Research Department, Banco de Espana.
- Poggio, T.; Girosi, F. (1990) Networks for approximation and learning, Proceedings of the IEEE, Volume 78, Issue 9, Page(s):1481 – 149.

### **Comparison of Tramo-Seats and Artificial Neural Networks for time series forecasting**

**Summary:** The paper presents the methods for time series forecasting. The case was to forecast an airtime usage of telecom customers. The methods chosen for comparison were ARIMA based Tramo-Seats and artificial neural networks. The results obtained in practical experiment suggest using Tramo-Seats for short time forecasting in this specific problem.

**Key words:** Tramo-Seats, artificial neural networks, forecasting, time series.